1981年7月　　数学研究与评论　　第1期

关于$E_n(W_p^r)_p$的一些结果*

叶懋冬

（浙江大学）

设L_p是以2π为周期、在周期上p次可和的函数$f(t)$所成的空间．令F_{2n-1}为阶数低于n的三角多项式的集合，H是一函数集．记

$$E_n(f)_p=\min_{T(t)\in F_{2n-1}}\|f(t)-T(t)\|_p,$$

$$E_n(H)_p=\sup_{f\in H}E_n(f)_p\ .$$

又设$W_p^r(1\leqslant p\leqslant\infty)$是满足条件：$f^{(r-1)}(t)$绝对连续、$\|f^{(r)}(t)\|_p\leqslant1$的以$2\pi$为周期的函数类．$W_p^r$在尺度$L_q$下的最佳逼近问题是实变函数逼近论中的一个有意义的问题，这即是求量$E_n(W_p^r)_q$，目前只知道它在$p=\infty$，$q=\infty$；$p=2$，$q=2$以及$q=1$，$1\leqslant p\leqslant\infty$时的数值[1]．

记p'为p的共轭数：$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$．本文求得了$E_n(W_p^r)_p$当$p'$为偶整数时的数值，即得到

$$E_n(W_p^r)_p=\frac{1}{n^r}\ ,\qquad 当p'=2,4,6,\cdots.$$

因而对$E_n(W_p^r)_p$在$1\leqslant p\leqslant2$时的性态有了初步的了解．

以下我们用$H_p^n(n=0,1,2,\cdots)$表示L_p内满足下列条件的函数类：$\varphi\in L_p$，$\|\varphi\|_p\leqslant1$且当$n\geqslant1$时φ正交于一切阶数低于n的三角多项式．又设$D(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx$或$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$，记$D*H_p^n$为形如

$$D*\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D(x-t)\varphi(t)dt\qquad\varphi(t)\in H_p^n$$

的卷积函数类．最后，令e_1，e_2，e_3，e_4，…依次表示

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n+1)x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n+1)x,\ \cdots.$$

引理1． 若$D\in L_1$，则

$$E_n(D*H_p^0)_q=\sup_{\|u\|_{q'}>0}\frac{\|Au\|_{p'}}{\|u\|_{q'}}\ ,$$

* 1980年12月23日收到．
推荐者：郭竹瑞（杭州浙江大学数学系）．

其中 $u=\sum_{i=1}^{\infty}u_ie_i$，且当$D=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx$时，$Au=\sum_{i=1}^{\infty}a_{n+[\frac{i-1}{2}]}u_ie_i$；当 $D=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\sin kx$ 时，$Au=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}b_{n+[\frac{i-1}{2}]}u_ie_i$。符号$[z]$表示不大于$z$的最大整数。

证　由[2]得

$$E_n(D*H_p^\circ)_q=\sup_{h\in H_{q'}^n}\|D*h\|_{p'}\ . \tag{1}$$

令 $d_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\cos kx$ 或$\sum_{k=n}^{\infty}b_k\sin kx$，因 $H_{q'}^n$ 的元与阶数小于n的三角多项式正交，故对一切$h\in H_{q'}^n$有$(D(x)-d_n(x))*h=0$，即

$$E_n(D*H_p^\circ)_q=\sup_{h\in H_{q'}^n}\|d_n(x)*h\|_{p'} \tag{1}$$

现在我们证明

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}a_k\cos kx\right)*\sum_{i=1}^{\infty}u_ie_i=\sum_{i=1}^{\infty}a_{n+[\frac{i-1}{2}]}u_ie_i\ , \tag{2}$$

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}b_k\sin kx\right)*\sum_{i=1}^{\infty}u_ie_i=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}b_{n+[\frac{i-1}{2}]}u_ie_i\ . \tag{3}$$

事实上，易见

$$a\cos kx*\left(\frac{v_1}{\sqrt{\pi}}\sin kx+\frac{v_2}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right)=av_1\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}+av_2\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},$$

$$b\sin kx*\left(\frac{v_1}{\sqrt{\pi}}\sin kx+\frac{v_2}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right)=bv_1\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}-bv_2\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}.$$

由三角函数系的正交性及卷积的线性即得(2)、(3)式。

综合(1)、(2)与(3)式，可知引理1成立。

引理2. 若D满足条件：$D\in L_1$ 及$\max_{k\geq n}|a_k|=|a_n|$或$\max_{k\geq n}|b_k|=|b_n|$　则当 $p'=2m$（m为正整数）时，成立

$$E_n(D*H_p^\circ)_p=|a_n|\quad 或\quad E_n(D*H_p^\circ)_p=|b_n|.$$

证　不失一般性，只需对$D=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx$证明即可。由引理1

$$E_n(D*H_p^\circ)_p=\sup\ \frac{\|Au\|_{2m}}{\|u\|_{2m}}\ ,$$

而

$$\|Au\|_{2m}=\left(\int_0^{2\pi}(a_nu_1e_1+a_nu_2e_2+a_{n+1}u_3e_3+a_{n+1}u_4e_4+\cdots)^{2m}dt\right)^{\frac{1}{2m}}.$$

易知上式的括号展开再积分后所有的非零项都是正的，而$\|Au\|_{2m}$与$\|u\|_{2m}$展开方式是完全一样的。结合D的条件，得

$$\|Au\|_{2m}\leqslant\left(\int_0^{2\pi}(a_nu_1e_1+a_nu_2e_2+a_nu_3e_3+a_nu_4e_4+\cdots)^{2m}dt\right)^{\frac{1}{2m}}=|a_n|\,\|u\|_{2m},$$

即

$$E_n(D*H_p^0)_p\leqslant|a_n|.$$

另一方面，若取$\bar{u}$使$u_1=u_2\neq0$，$u_i=0$，$i\geqslant3$，即可知$\dfrac{\|A\bar{u}\|_{2m}}{\|\bar{u}\|_{2m}}=|a_n|$，亦即

$$E_n(D*H_p^0)_p=|a_n|,$$

引理2得证。

定理　当p的共轭数$p'=2m$（m为正整数）时，成立

$$E_n(W_p^r)_p=\frac{1}{n^r}.$$

证　据[2]，

$$E_n(W_p^r)_p=E_n(D_r*H_p^1)_p,$$

其中　$D_r=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(kx-\frac{\pi r}{2}\right)}{k^r}$，$r=1,2,\cdots$，所以由引理2得

$$E_n(W_p^r)_p\leqslant E_n(D_r*H_p^0)_p=\frac{1}{n^r}.$$

另一方面，令$f_0=\dfrac{\sin nx}{n^r\|\sin nx\|_p}\in W_p^r$，由于对一切$\varphi\in F_{2n-1}$，均有

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,|\sin nt|^{p-1}\operatorname{sign}\sin nt\,dt=0,$$

由[2]可知f_0在F_{2n-1}中以0为最佳逼近元，于是

$$E_n(W_p^r)_p\geqslant E_n(f_0)_p=\frac{1}{n^r}.$$

故得定理。

由这个结果容易看出，当$1<p\leqslant2$时，$E_n(W_p^r)_p$作为p的连续函数，在区间[1,2]上作类似于周期性的振荡，它在p接近1时频率急剧升高，直至无穷。这个结果是有点出乎意料之外的。

从$E_n(W_p^r)_p$这样的变化性态出发，考虑到$E_n(W_1^r)_1=E_n(W_\infty^r)_\infty=\dfrac{\mathscr{K}_r}{n^r}$（$\mathscr{K}_r$为法瓦尔常数），我们可以推测，当$p$的共轭数$p'$为奇数时，似乎会有$E_n(W_p^r)_p=\dfrac{\mathscr{K}_r}{n^r}$。另外，在$2\leqslant p<\infty$时，好像也会有相应的结果。这些都有待于更深入的分析和探求。

致谢：承蒙导师郭竹瑞教授的热情指导，谨致以深切的感谢。并感谢王建忠同志对本文提出的宝贵意见。

参考文献

[1] 孙永生，实变函数逼近论的几个问题，逼近论会议论文集，杭州大学出版，(1978)25-34。

[2] *Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения*, М., 《*Наука*》, (1976).

Some results about $E_n(W_p^r)_p$

By Ye Maodong (叶懋冬)

Abstract

Let L_p be the function space consisting of periodic functions $f(t)$ with period 2π and $f(t)$ be p-summable on a period, F_{2n-1} be the set of all trigonometric polynomials of degree$<n$. Suppose W_p^r is the set of period functions with period 2π and such that for each $f(t)$ W_p^r we have (i) $f^{(r-1)}(t)$ is absolutely continuous and (ii) $\|f^{(r)}(t)\|_p\leqslant 1$. The measure of best approximation to W_p^r with respect to L_q norm is defined by

$$E_n(W_p^r)_q=\sup_{f\in W_p^r}\min_{T(t)\in F_{2n-1}}\|f(t)-T(t)\|_q$$

Now only when $p=\infty$, $q=\infty$; $p=2$, $q=2$ and $q=1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ the quantities $E_n(W_p^r)_q$ are known.

Let p' be the dual of p: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. In this paper we calculated $E_n(W_p^r)_p$ when p' is any even integer. We obtain

$$E_n(W_p^r)_p=\frac{1}{n^r},\ p'=2,4,6,\cdots$$

Hence some elementary properties of $E_n(W_p^r)_p$ for $1\leqslant p\leqslant 2$ are known.