一类离散分布参数的经验 Bayes 估计的收敛速度*

赵林城

（中国科技大学）

§1. 前 言

自 1955 年 H.Robbins [1]引进经验 Bayes 判决以来，这一领域的研究工作有了很大的进展，J.Neyman 甚至把经验 Bayes 估计的引进视为统计学近年来的两大突破之一．最近几年，经验 Bayes 估计的收敛速度问题受到人们的注意，Lin([2])，Singh([3],[4])等学者作了一些工作．

本文拟对一类离散分布族的经验 Bayes 估计收敛速度作统一的处理．这类分布族包括 Poisson 分布族、负二项分布族和 log 分布族等常见的分布族．为此，考虑离散分布族

$$f_\theta(x)d\mu(x),\quad x\in N,\quad \theta\in\Theta, \tag{1}$$

其中N为自然数集或非负整数集，μ为可数测度，Θ为实轴上的区间．设参数θ的先验分布为$dH(\theta)$，$H\in\mathscr{H}$，$\varphi(\theta)$为待估函数，满足

$$\int\varphi^2(\theta)dH(\theta)<\infty,\quad 对\ \forall H\in\mathscr{H}. \tag{2}$$

设X在θ给定时服从分布(1)，则其边缘分布为

$$f(x)d\mu(x)=\left(\int_\Theta f_\theta(x)dH(\theta)\right)d\mu(x). \tag{3}$$

为简便起见，设$f(x)>0$处处成立．当H已知时，在平方损失$L(\varphi(\theta),d)=(\varphi(\theta)-d)^2$之下，$\varphi(\theta)$的基于样本$x$的经验 Bayes 估计为

$$d_H(x)=\int\varphi(\theta)f_\theta(x)dH(\theta)/f(x). \tag{4}$$

假定$d_H(x)$有下述形状

$$d_H(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_K(x)f(x+k)/f(x)\triangleq g(x)/f(x). \tag{5}$$

其中，所有的$a_K(x)$均为x的已知函数，且

$$A(x)\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2(x)f(x+k)<\infty,\quad 对\ \forall x\in N. \tag{6}$$

* 1980年12月31日收到．

推荐者：陈希孺(中国科技大学)．

$d_H(x)$的 Bayes 风险为

$$B(H)=\int\sum_{x\in N}(d_H(x)-\varphi(\theta))^2f_\theta(x)dH(\theta). \tag{7}$$

当H未知时，无法按(4)式定出$d_H(x)$。设$(X_1,\theta_1),\cdots,(X_n,\theta_n),(X,\theta)$ $iid.$，θ的分布为$dH(\theta)$，给定θ时X的条件分布如(1)式所示。设从$(X_1,\cdots X_n;X)$中抽取的样本为$x_1,\cdots,x_n$(历史资料)和x(新样本)，若采用$d_n(x)=d_n(x_1,\cdots,x_n;x)$作为$\varphi(\theta)$的估计量，则 Bayes 风险为

$$B_n=\int_\Theta\sum_{x\in N}E(d_n(x)-\varphi\theta))^2f_\theta(x)dH(\theta). \tag{8}$$

本文用E表示对$(X_1,X_2,\cdots)$的联合分布P取期望，E_*表示对$(X_1,X_2,\cdots;X)$的联合分布P_*取期望。易证

$$B_n-B(H)=E_*(d_n(X)-d_H(X))^2. \tag{9}$$

若对$\forall H\in\mathscr{H}$，$B_n-B(H)\to0$，则称$\{d_n(x)\}$为$\varphi(\theta)$在先验分布族$\mathscr{H}$之下的经验 Bapes 估计。若$B_n-B(H)=o(n^{-q})$，$q>0$，则称经验 Bayes 估计$\{d_n(x)\}$的收敛速度为q。

Lin 在[5]中讨论的情形相当于$\varphi(\theta)=\theta$，且

$$d_H(x)=a_1(x)f(x+1)/f(x)\triangleq g(x)f(x) \tag{10}$$

的情形，他采用了

$$d_n(x)=a_1(x)f_n(x+1)/f_n^*(x)\triangleq g_n(x)/f_*^n(x), \tag{11}$$

其中

$$f_n(x)=\frac{1}{n}(x_1,\cdots,x_n\text{中等于}x\text{的个数}), \tag{12}$$

$$f_n^*(x)=\begin{cases}f_r(x), & \text{若 } f_n(x)\geqq n^{-1/3},\\ n^{-1/3}, & \text{若 } f_n(x)<n^{-1/3}.\end{cases} \tag{13}$$

[5]中主要定理（定理2.1）断言：若

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{x\in N}a_1^2(x)f(x)f(x+1)<\infty,\\&\sum_{x\in N}a_1^2(x)f^2(x+1)<\infty,\\&\sum_{x\in N}a_1^2(x)f^2(x+1)/f(x)<\infty,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

且设对任意$\delta_n>0$，$\exists\,0<t\leqq1$及$0<c<\infty$，使

$$p_*(f(X)<\delta_n)\leqq c\delta_n^t, \tag{15}$$

则

$$B_n-B(H)=o(n^{-t/3}). \tag{16}$$

应当指出，如果该命题成立，则在某些场合之下，只要$\int\theta^2dH(\theta)<\infty$，则$\theta$的经验 Bayes 估计将会有$\frac{1}{3}$的收敛速度。但可惜的是，这个命题是不对的，我们将在§3中构造一个反例，并指出其证明中的脱漏之处。

设 $f_n(x)$ 如(12)式所示，令

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)f_n(x+k). \tag{17}$$

由(12)式，当 n 和 x 固定时，上述级数只有有限项不为0，故(17)式有意义。在本文中，记 $[b]_L=b$ 或 0，视 $|b|\leqq L$ 或 $>L$ 而定，且约定 $\frac{0}{0}=0$。在上述约定之下，我们采用的 $\varphi(\theta)$ 的经验 Bayes 估计为

$$d_n(x)=\left[\frac{g_n(x)}{f_n(x)}\right]_{n^\gamma},\quad 0<\gamma<1 \text{ 待定}. \tag{18}$$

在§4中我们将给出 $\{d_n(x)\}$ 的收敛速度的主要定理及其推论。我们将看到，在适当的条件下，其收敛速度可任意接近于1。在§5中我们将举例说明这个定理及其推论的应用。

§2. 几个引理

引理1. 设对 $\delta\geqq 1$,

$$\int|\varphi(\theta)|^\delta dH(\theta)<\infty, \tag{19}$$

则

$$E_*|d_H(X)|^\delta<\infty. \tag{20}$$

证. 由凸函数的 Jensen 不等式，对 $\forall x\in N$,

$$\left|\int\varphi(\theta)\frac{f_\theta(x)}{f(x)}dH(\theta)\right|^\delta\leqq\int|\varphi(\theta)|^\delta\frac{f_\theta(x)}{f(x)}dH(\theta). \tag{21}$$

故由 $d_H(x)$ 的定义，有

$$E_*|d_H(X)|^\delta\leqq\sum_{x\in N}\int|\varphi(\theta)|^\delta f_\theta(x)dH(\theta)$$

$$=\int|\varphi(\theta)|^\delta\sum_{x\in N}f_\theta(x)dH(\theta)=\int|\varphi(\theta)|^\delta dH(\theta)<\infty.$$

证毕.

引理2. 对 $0<\beta\leqq 2$，有

$$E|g_n(x)-g(x)|^\beta\leqq n^{-\beta/2}A^{\beta/2}(x). \tag{22}$$

证. 首先证明(22)式对 $\beta=2$ 成立。为此，记 $p_k=f(x+k)$，且对任意的 $k\neq l$，$j=1,\cdots,n$，令

$$y_j=\begin{cases}1, & \text{若} x_j=x+k,\\ 0, & \text{若} x_j\neq x+k,\end{cases}\qquad z_j=\begin{cases}1, & \text{若 } x_j=x+l,\\ 0, & \text{若 } x_j\neq x+l.\end{cases}$$

则

$$E\{(f_n(x+k)-p_k)(f_n(x+l)-p_l)\}=\frac{1}{n^2}E\left\{\sum_{i=1}^n(y_i-p_k)\sum_{j=1}^n(z_j-p_l)\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n E\{(y_j-p_k)(z_j-p_l)\}=-\frac{1}{n}p_kp_l.$$

故由 Fatou 引理，

$$E(g_n(x)-g(x))^2=E\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)(f_n(x+k)-f(x+k))\right\}^2$$

$$\leq\varliminf_{K\to\infty}E\left\{\sum_{k=0}^{K}a_k(x)(f_n(x+k)-p_k)\right\}^2$$

$$=\varliminf_{K\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{K}a_k^2(x)\frac{p_k(1-p_k)}{n}+2\sum_{0\leq k<l\leq K}a_k(x)a_l(x)\left(-\frac{p_kp_l}{n}\right)\right\}$$

$$=\varliminf_{K\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{K}a_k^2(x)p_k-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{K}a_k(x)p_k\right)^2\right\}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2(x)f(x+k).$$

故当 $\beta=2$ 时(22)式成立。若 $0<\beta<2$，则

$$E|g_n(x)-g(x)|^{\beta}\leq\{E(g_n(x)-g(x))^2\}^{\beta/2}\leq n^{-\beta/2}A^{\beta/2}(x).$$

这就证明了(22)式。

引理 3. 设 Y,Y' 为 r. v. y,y' 为实数，$L>0$。则对 $0<r\leq2$，有

$$E\left|\left[\frac{Y'}{Y}-\frac{y'}{y}\right]_L\right|^r\leq2|y|^{-r}\left\{E(|Y'-y'|^r)+\left(\left|\frac{y'}{y}\right|+L\right)^rE(|Y-y|^r)\right\}.\tag{23}$$

证. 由 c_r 不等式，

$$E\left|\left[\frac{Y'}{Y}-\frac{y'}{y}\right]_L\right|^r\leq c_r\left\{E\left(\left|\frac{Y'-y'}{y}\right|^r\right)+|y|^{-r}E\left(\left|\frac{Y'}{Y}\right|^r\cdot|Y-y|^rI_{\left(\left|\frac{Y'}{Y}-\frac{y'}{y}\right|\leq L\right)}\right)\right\}$$

$$\leq c_r|y|^{-r}\left\{E(|Y'-y'|^r)+\left(\left|\frac{y'}{y}\right|+L\right)^rE(|Y-y|^r)\right\}.$$

其中

$$c_r=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<r<1;\\ 2^{r-1}, & \text{当 } r\geq1.\end{cases}$$

由此即得所要的结论。

引理4. 设 r. v. $Y\sim B(n,p)$, $0<p=1-q<1$, $\varepsilon>0$.
则

$$P\left(\left|\frac{y}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2(p\wedge q)+\varepsilon}\right).\tag{24}$$

证. 见[6]。

§3. 一个反例

本节将给出[5]中定理 2.1 的一个反例。为此，令

$$f_\theta(x)=\frac{1}{x!}\theta^xe^{-\theta},\quad x=0,1,\cdots;\quad 0<\theta<\infty.\tag{25}$$

$$H'(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\theta^4}, & \text{当}\theta>1,\\ 0, & \text{当}\theta\leqq 1.\end{cases} \tag{26}$$

则当 $x\to\infty$时，

$$f(x)=\frac{1}{3\cdot x!}\int_1^{\infty}\theta^{x-4}e^{-\theta}d\theta\sim\frac{(x-4)!}{3\cdot x!}\sim\frac{1}{3x^4}. \tag{27}$$

$$d_H(x)=(x+1)f(x+1)/f(x)\triangleq g(x)/f(x)\sim x. \tag{28}$$

符号～表示当 $x\to\infty$时，～左右两边的比值→1。

此时，$a_1(x)=x+1$，容易验证，(14)式中三个条件均满足，且当 $\delta_n>0$ 充分小时，

$$P_*(f(\mathrm{X})<\delta_n)\leqq c\delta_n{}^{3/4}. \tag{29}$$

式中 $c>0$ 为常数。因此，按[5]中定理 2.1，

$$B_n-B(H)=E_*(d_n(\mathrm{X})-d_H(\mathrm{X}))^2=0(n^{-\frac{1}{4}}). \tag{30}$$

但事实上，通过一系列的论证和计算，我们将看到，有常数 $c>0$，使当 n 充分大时，

$$B_n-B(H)\geqq cn^{-\frac{1}{12}}. \tag{31}$$

为此，对 $\forall h(\mathrm{X})=h(\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n;\mathrm{X})$，记 $\|h(\mathrm{X})\|=(E_*h^2(\mathrm{X}))^{\frac{1}{2}}$。易见，

$$d_n(\mathrm{X})-d_H(\mathrm{X})=\frac{g_n(\mathrm{X})-g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})}+\frac{g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})f(\mathrm{X})}(f(\mathrm{X})-f_n^*(\mathrm{X}))$$

$$=\frac{g_n(\mathrm{X})-g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})}+\frac{g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})f(\mathrm{X})}(f(\mathrm{X})-f_n(\mathrm{X}))+\frac{g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})f(\mathrm{X})}(f_n(\mathrm{X})-f_n^*(\mathrm{X}))$$

$$=\frac{g_n(\mathrm{X})-g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})}+\frac{g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})f(\mathrm{X})}(f(\mathrm{X})-f_n(\mathrm{X}))+\frac{g(\mathrm{X})}{n^{-\frac{1}{3}}f(\mathrm{X})}\left(f_n(\mathrm{X})-n^{-\frac{1}{3}}\right)I_{(f_n(X)<n^{-\frac{1}{3}})}$$

$$=\frac{g_n(\mathrm{X})-g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})}+\frac{g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})f(\mathrm{X})}(f(\mathrm{X})-f_n(\mathrm{X}))$$

$$+\frac{g(\mathrm{X})}{n^{-\frac{1}{3}}f(\mathrm{X})}\left(f_n(\mathrm{X})-n^{-\frac{1}{3}}\right)I_{(f_n(X)<n^{-\frac{1}{3}},\,f(X)\geqq 2n^{-3/1})}$$

$$+\frac{g(\mathrm{X})}{n^{-1/3}f(\mathrm{X})}\left(f_n(\mathrm{X})-n^{-1/3}\right)I_{(f_n(X)<n^{-\frac{1}{3}},\,f(X)<2n^{-1/3})}$$

$$\triangleq J_{1,n}+J_{2,n}+J_{3,n}+J_{4,n}. \tag{32}$$

由三角不等式，

$$\|d_n(\mathrm{X})-d_H(\mathrm{X})\|\geqq\|J_{4,n}\|-\|J_{1,n}\|-\|J_{2,n}\|-\|J_{3,n}\|. \tag{33}$$

由引理 2，

$$\|J_{1,n}\|^2=E_*\left(\frac{g_n(\mathrm{X})-g(\mathrm{X})}{f_n^*(\mathrm{X})}\right)^2\leqq n^{\frac{2}{3}}\sum_{x=0}^{\infty}f(x)E(g_n(x)-g(x))^2$$

$$\leqq n^{\frac{2}{3}}\sum_{x=0}^{\infty}f(x)\frac{(x+1)^2f(x+1)}{n}=O\left(n^{-\frac{1}{3}}\right). \tag{34}$$

由引理 2 及引理 1，注意到 $\int\theta^2 dH(\theta)<\infty$，有

$$\|J_{2,n}\|^2=E_*\left\{\frac{g(X)}{f_n^*(X)f(X)}(f_n(X)-f(X))\right\}^2\leqq n^{2/3}\sum_{x=0}^{\infty}f(x)d_H^2(x)E(f_n(x)-f(x))^2$$

$$\leqq n^{2/3}\sum_{x=0}^{\infty}f(x)d_H^2(x)\cdot\frac{1}{n}=O\left(n^{-1/3}\right). \tag{35}$$

由引理 4 及引理 1，

$$\|J_{3,n}\|^2=E_*\left\{d_H^2(X)(1-n^{\frac{1}{3}}f_n(X))^2I_{(f_n(X)<n^{-\frac{1}{3}},\ f(X)\geq 2n^{-\frac{1}{3}})}\right\}$$

$$\leqq\sum_{f(x)\geq 2n^{-\frac{1}{3}}}f(x)d_H^2(x)EI_{(f_n(x)<n^{-\frac{1}{3}})}$$

$$\leqq\sum_{f(x)\geq 2n^{-\frac{1}{3}}}f(x)d_H^2(x)P\left(f_n(x)-f(x)<-n^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\leqq\sum_{f(x)\geq 2n^{-\frac{1}{3}}}f(x)d_H^2(x)\cdot 2\exp\left(-\frac{n^{1-\frac{2}{3}}}{1+n^{-\frac{1}{3}}}\right)=0\left(n^{-\frac{1}{3}}\right). \tag{36}$$

又，

$$\|J_{4,n}\|^2=E_*\left\{d_H^2(X)\left(1-n^{\frac{1}{3}}f_n(X)\right)^2I_{(f_n(X)<n^{-\frac{1}{3}},\ f(X)<2n^{-\frac{1}{3}})}\right\}$$

$$=\sum_{f(x)<2n^{-1/3}}f(x)d_H^2(x)E\left\{\left(1-n^{\frac{1}{3}}f_n(x)\right)^2I_{(f_n(x)<n^{-1/3})}\right\}$$

$$\geqq\sum_{f(x)<\frac{1}{2}n^{-1/3}}f(x)d_H^2(x)\left\{E\left(1-n^{\frac{1}{3}}f_n(x)\right)I_{(f_n(x)<n^{-1/3})}\right\}^2. \tag{37}$$

对 $i=1,\cdots,n$，令

$$y_i(x)=\begin{cases}1, & 若 X_i=x,\\ 0, & 若 X_i\neq x.\end{cases}$$

则当 $f(x)<\frac{1}{2}n^{-1/3}$ 时，

$$E\left\{\left(1+n^{\frac{1}{3}}f_n(x)\right)I_{(f_n(x)<n^{-1/3})}\right\}=E\left\{\left(1-n^{-2/3}\sum_{i=1}^{n}y_i(x)\right)I_{(\sum_1^n y_i(x)<n^{2/3})}\right\}$$

$$=P\left(\sum_1^n y_i(x)<n^{2/3}\right)-n^{-3/2}\sum_{k<n^{2/3}}k\binom{n}{k}f^k(x)(1-f(x))^{n-k}$$

$$=P\left(\sum_1^n y_i(x)<n^{2/3}\right)-n^{\frac{1}{3}}f(x)\sum_{k<n^{2/3}-1}\binom{n-1}{k}f^k(x)(1-f(x))^{n-1-k}$$

$$=P\left(\sum_{1}^{n}y_i(x)<n^{2/3}\right)-n^{\frac{1}{3}}f(x)P\left(\sum_{1}^{n-1}y_i(x)<n^{\frac{2}{3}}-1\right)$$

$$\geqq\left(1-n^{\frac{1}{3}}f(x)\right)P\left(\sum_{1}^{n}y_i(x)<n^{2/3}\right)\geqq\frac{1}{2}P\left(\sum_{1}^{n}y_i(x)<n^{2/3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}P\left(f_n(x)-f(x)<n^{-\frac{1}{3}}-f(x)\right)\geqq\frac{1}{2}P\left(f_n(x)-f(x)<\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{3}}\right). \tag{38}$$

由 Chebyshev 不等式，

$$P\left(f_n(x)-f(x)\geqq\frac{1}{2}n^{-1/3}\right)\leqq 4n^{2/3}E(f_n(x)-f(x))^2\leqq 4n^{2/3}\cdot\frac{1}{n}=4n^{-1/3}. \tag{39}$$

故由以上二式，当 n 充分大且 $f(x)<\frac{1}{2}n^{-1/3}$ 时，

$$E\left\{\left(1-n^{\frac{1}{3}}f_n(x)\right)I_{(f_n(x)<n^{-1/3})}\right\}\geqq\frac{1}{2}\{1-P(f_n(x)-f(x)\geqq\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{3}})\}$$

$$\geqq\frac{1}{2}(1-4n^{-1/3})\geqq\frac{1}{4}. \tag{40}$$

故由(37)式，当 n 充分大时，

$$\|J_{4,n}\|^2\geqq\frac{1}{16}\sum_{f(x)<\frac{1}{2}n^{-1/3}}f(x)d_H^2(x). \tag{41}$$

由(27)及(28)式，当 $x\to\infty$时，$f(x)\sim\frac{1}{3x^4}$，$f(x)\,d_H^2(x)\sim\frac{1}{3x^2}$，由此不难验证，∃常数 $c_1>0$，当 n 充分大时，

$$\|J_{4,n}\|^2\geqq c_1^2n^{-\frac{1}{12}}. \tag{42}$$

由(33)—(36)式及(42)式，∃常数 $c_2>0$，$c_3>0$，当 n 充分大时，有

$$\|d_n(X)-d_H(X)\|\geqq c_1n^{-\frac{1}{24}}-c_2n^{-\frac{1}{6}}\geqq c_3n^{-\frac{1}{24}},$$

即

$$B_n-B(H)\geqq c_3^2n^{-\frac{1}{12}}. \tag{43}$$

这就证明了(31)式，因而[5]中定理 2.1 不真.

仔细审查一下[5]中定理 2.1 的证明，就不难发现有一个漏洞. 按照我们的记号，其(2.17)式所以能得出，是因为把 P_* 与 P 弄混了. 正是这个疏忽，使作者用一种极简单的推理得出一个表面看来很好的结果.

§4. 收敛速度的定理

本节将给出关于经验 Bayes 估计收敛速度的下述定理：

定理 1. 设

$$\int|\varphi(\theta)|^{\delta}dH(\theta)<\infty,\ (\delta>2), \tag{44}$$

$$\sum_{x\in N}\left(1+\frac{A^{\lambda}(x)}{f^{\lambda}(x)}\right)f^{1-\lambda}(x)<\infty,\ (0<\lambda<1), \tag{45}$$

则对由(18)式定义的 $d_n(x)$，可适当选取 $0<\gamma<1$，使

$$B_n-B(H)=O(n^{-(\delta-2)\lambda/\delta}). \tag{46}$$

若对 $\forall\delta>2$ 及任意接近于 1 的 λ，(44)式及(45)式均成立，则 $\varphi(\theta)$ 的经验 Bayes 估计 $\{d_n(x)\}$ 的收敛速度可任意接近于 1。

证. 令 $A_n=\{x\in N:\ |d_H(x)|=\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leqq\frac{1}{2}n^{\nu}\}$，$B_n=N-A_n$. 则当 $x\in A_n$ 时，$|d_n(x)-d_H(x)|\leqq\frac{3}{2}n^{\nu}$，此时，

$$E(d_n(x)-d_H(x))^2\leqq\left(\frac{3}{2}n^{\nu}\right)^{2-2\lambda}E\left|[d_n(x)-d_H(x)]_{\frac{3}{2}n^{\nu}}\right|^{2\lambda}$$

$$=\left(\frac{3}{2}n^{\nu}\right)^{2-2\lambda}E\left|\left[\frac{g_n(x)}{f_n(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right]_{\frac{3}{2}n^{\nu}}\right|^{2\lambda}$$

$$\leqq\left(\frac{3}{2}n^{\nu}\right)^{2-2\lambda}\cdot 2f^{-2\lambda}(x)\left\{E|g_n(x)-g(x)|^{2\lambda}+\left(\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|+\frac{3}{2}n^{\nu}\right)^{2\lambda}\right.$$

$$\left.\times E|f_n(x)-f(x)|^{2\lambda}\right\}$$

$$\leqq 5(n^{\nu})^{2-2\lambda}f^{-2\lambda}(x)\{n^{-\lambda}A^{\lambda}(x)+\left(\frac{1}{2}n^{\nu}+\frac{3}{2}n^{\nu}\right)^{2\lambda}n^{-\lambda}f^{\lambda}(x)\}$$

$$\leqq 20n^{-\lambda+2\nu}f^{-\lambda}(x)\{(n^{\nu})^{-2\lambda}A^{\lambda}(x)/f^{\lambda}(x)+1\}. \tag{47}$$

此处，第 3 个不等式用到引理 3，第 4 个不等式用到引理 2. 故由条件(45)，

$$\sum_{x\in A_n}f(x)E(d_n(x)-d_H(x))^2=O(n^{-(\lambda-2\nu)}). \tag{48}$$

当 $x\in B_n$ 时，

$$(d_n(x)-d_H(x))^2\leqq 2d_H^2(x)+2d_n^2(x)\leqq 2d_H^2(x)+2n^{2\nu}$$
$$\leqq 2d_H^2(x)+8d_H^2(x)=10d_H^2(x). \tag{49}$$

故由 Hölder 不等式，Chebyshev 不等式及引理 1，

$$\sum_{x\in B_n}f(x)E(d_n(x)-d_H(x))^2\leqq 10\sum_{x\in B_n}f(x)d_n^2(x)$$

$$=10E_*\{d_H^2(X)I_{(|d_H(x)|>\frac{1}{2}n^{\nu})}\}\leqq 10(E_*|d_H(X)|^{\delta})^{\frac{2}{\delta}}\cdot(E_*I_{(|d_H(x)|>\frac{1}{2}n^{\nu})})^{\frac{\delta-2}{\delta}}$$

$$\leqq 10(E_*|d_H(X)|^{\delta})^{\frac{2}{\delta}}\cdot(2^{\delta}n^{-\nu\delta}E_*|d_H(X)|^{\delta})^{\frac{\delta-2}{\delta}}=O(n^{-\nu(\delta-2)}). \tag{50}$$

取 ν，使 $\lambda-2\nu=\nu(\delta-2)$，得 $\nu=\frac{\lambda}{\delta}$，此时由(48)及(50)式，有

$$B_n-B(H)=\sum_{x\in N}f(x)E(d_n(x)-d_H(x))^2=O(n^{-(\delta-2)\lambda/\delta}). \tag{51}$$

定理1证毕。

特别当

$$d_H(x)=a_1(x)f(x+1)/f(x) \tag{52}$$

时，我们有

推论1. 设(44)式及

$$\sum_{x\in N}(1+|a_1(x)|^\lambda)f^{1-\lambda}(x)<\infty,\ (0<\lambda<1) \tag{53}$$

成立，则定理1的结论为真。

证. 当 $g(x)=a_1(x)f(x+1)$ 时，$A(x)=a_1^2(x)f(x+1)$，故由(47)式，当 $x\in A_n$ 时，

$$\begin{aligned}E(d_n(x)-d_H(x))^2&\leqq 20n^{-\lambda+2\nu}f^{-\lambda}(x)\{(n^\nu)^{-2\lambda}|d_H(x)|^\lambda|a_1(x)|^\lambda+1\}\\&\leqq 20n^{-\lambda+2\nu}f^{-\lambda}(x)\{(n^\nu)^{-2\lambda}\left(\frac{1}{2}n^\nu\right)^\lambda|a_1(x)|^\lambda+1\}\\&\leqq 20n^{-\lambda+2\nu}f^{-\lambda}(x)(|a_1(x)|^\lambda+1).\end{aligned} \tag{54}$$

由此即得所要的结论。

§5. 几个例子

在本节，我们将举几个例子说明上述定理的应用。

例1). Poisson分布族：估计参数 θ.

$$f_\theta(x)=\frac{1}{x!}\theta^x e^{-\theta},\ x=0,1,2,\cdots;0<\theta<\infty. \tag{55}$$

双参数的Gamma分布族为其共轭先验分布族。取$\mathscr{H}$为这样的分布族。设 $H\in\mathscr{H}$，

$$dH(\theta)=\begin{cases}\dfrac{a^b}{\Gamma(b)}\theta^{b-1}e^{-a\theta}d\theta, & 若\ \theta>0,\\ 0\quad, & 若\ \theta\leqq 0.\end{cases} \tag{56}$$

其中 $0<a<\infty$，$0<b<\infty$，则

$$f(x)=\frac{\Gamma(x+b)a^b}{x!\Gamma(b)(1+a)^{x+b}}>0 \tag{57}$$

$$d_H(x)=(x+1)f(x+1)/f(x), \tag{58}$$

即$a_1(x)=x+1$。由Stirling公式，当 $x\to\infty$时，有常数 $c>0$，使

$$f(x)\sim\frac{cx^{b-1}}{(1+a)^x}. \tag{59}$$

故对任何 $0<\lambda<1$，

$$\sum_{x\in N}(1+a_1^\lambda(x))f^{1-\lambda}(x)<\infty. \tag{60}$$

又，对任何 $\delta>2$，

$$\int_0^\infty\theta^\delta dH(\theta)<\infty. \tag{61}$$

故若适当选取ν，由(18)式定义的θ的经验 Bayes 估计$\{d_n(x)\}$的收敛速度可任意接近于1.

例 2). log 分布族：估计参数函数$-\log(1-\theta)$.

$$f_\theta(x)=a\frac{\theta^x}{x},\quad x=1,2,\cdots;\quad 0<\theta<1. \tag{62}$$

式中，$a=-[\log(1-\theta)]^{-1}$.

β分布族为 log 分布族的共轭先验分布族．取$\mathscr{H}$为这样的分布族．设$H\in\mathscr{H}$,

$$dH(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta, & 0<\theta<1.\\ 0, & \text{其它}\ \theta.\end{cases} \tag{63}$$

式中，$0<a<\infty$，$0<b<\infty$.

$$d_H(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x+k}{xk}f(x+k)/f(x). \tag{64}$$

$$A(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{k}\right)^2 f(x+k). \tag{65}$$

$$f(x)=\frac{a\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(a+x)}{x\Gamma(a+b+x)} \tag{66}$$

在以下的推导中出现的$c_1,c_2,\cdots$均表示正的常数．由 Stirling 公式，当$x\to\infty$时，

$$f(x)\sim\frac{c_1}{x^{1+b}}. \tag{67}$$

$$\begin{aligned}A(x)&\leqq 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}f(x+k)+2\cdot\frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{\infty}f(x+k)\\ &\leqq c_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(x+k)^{1+b}}+\frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{1+b}}\right)\\ &\leqq c_2\left(\frac{1}{x^{1+b}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{x^2}\int_x^{\infty}\frac{du}{u^{1+b}}\right)\leqq\frac{c_3}{x^{1+b}}.\end{aligned} \tag{68}$$

取λ，使$0<\lambda<\dfrac{b}{1+b}$，则$(1+b)(1-\lambda)>1$，故

$$\sum_{x\in N}\left(1+\frac{A^\lambda(x)}{f^\lambda(x)}\right)f^{1-\lambda}(x)\leqq c_4\sum_{x\in N}\frac{1}{x^{(1+b)(1-\lambda)}}<\infty. \tag{69}$$

又，对任何$\delta>2$,

$$\int_0^1\left|\log(1-\theta)\right|^\delta dH(\theta)<\infty. \tag{70}$$

由(18)式定义$-\log(1-\theta)$的经验 Bayes 估计$\{d_n(x)\}$，其中$a_k(x)=\dfrac{x+k}{xk}$，则由定理1，可适当选取ν，使$\{d_n(x)\}$的收敛速度任意接近于$\dfrac{b}{1+b}$．特别，当b充分大时，这个收敛速度可任意接近于1.

致谢：在本文写作过程中，作者得到了陈希孺教授和成平教授的指导，谨致深切的谢意.

参 考 文 献

[1] Robbins, H., An empirical Bayes approach to statistics, Proc. Third Symp. Math. Statis'. Probability, 1(1955), 157—163. Univ. California Press.

[2] Lin, P. E., Rates of convergence in empirical Bayes estimation problems: Continuous case, Ann. Statist., 3(1975). 155—164.

[3] Singh, R. S., Empirical Bayes estimation with convergence rates in noncontinuous Lebesgue exponential families. Ann. Statist, 4(1976), 431—439.

[4] Singh. R. S., Empirical Bayes estimation in Lebesgue-exponential families with rates near the best possible rate. Ann. Statist., 7(1979), 890—902.

[5] Lin, P.E., Rates of convergence in empirical Bayes estimation problems; Discrete case. Ann. Inst. Statist. Math., 24(1972), 319—325.

[6] Hoeffding. W. J. Amer. Statist. Assoc., 58(1963), 13.

Empirical Bayes Estimation with Convergence Rates about a Class of Discrete Distribution Families

By Zhao Lincheng (赵林城)

Abstract

In this paper we consider a family of discrete distributions $f_\theta(x)d\mu(x)$, and suppose that the Bayes estimate of $\varphi(\theta)$ with respect to the priori distribution $H\in\mathcal{H}$ has a form $dH(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)f(x+k)/f(x)$. where $f(x)=\int f_\theta(x)dH(\theta)$. we construct a sequence of empirical Bayes estimates and establish its rate of convergence, and prove that under suitable conditions this rate of convergence can arbitrarily close to 1. we also give a counter-example to the main Theorem 2.1 of [5], and then declare that the "Theorem" does not hold.