构造二元切触插值公式的方法*

梁学章　　朱功勤

（吉林大学）　（合肥工业大学）

提　要

本文在文章[1]的基础上对切触插值问题给出了迭加插值法。它可容许某些不规则的插值条件，既可保证插值的存在与唯一性，又便于求得具体的插值公式。在本文最后还给出了古典的Lagrange插值法对二元切触插值的推广，它概括了Тополяньский和Ahlin的结果（见[2]、[3]）。

§1. 引　言

设$p_1(x,y)$，$p_2(x,y)$，…，$p_M(x,y)$是M个线性无关的二元多项式。它们所支成的实线性空间记为H。所谓二元切触插值问题，就是求$P(x,y)\in H$，使得

$$D_{ikl}P(x,y)\equiv\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}P(x,y)\Big|_{(x_i,\ y_i)}=f_{ikl}\,,\tag{1}$$

对一切$(k,l)\in I_i$，$i=1,2\cdots,n$成立。其中$f_{ikl}\equiv\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}f(x,y)\Big|_{(x_i,\ y_i)}$是事先任意选定的一组数，$(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$是平面上互不相同的n个点，I_i表示平面上的有限个非负整数点做成的集合，D_{ikl}称为插值泛函，而集合$E=\{D_{ikl}|(k,l)\in I_i,i=1,2,\cdots,n\}$称为插值泛函组。满足条件(1)的多项式$P(x,y)$称为插值多项式。当插值空间$H$和插值泛函组$E$都给定时，$P(x,y)$仅仅依赖于数组$f_{ikl}$。如果对任何的数组$f_{ikl}$，如此的$P(x,y)\in H$总能找到而且唯一，则说$E$是$H$的"适定插值泛函组"，$H$是$E$的"适定插值空间"，而这种插值称为是"适定插值"。这时显然要求E中元素的个数要与H的维数M相等。在实际计算中，由数组f_{ikl}来求得插值多项式$P(x,y)$的最简便的方法是利用切触插值公式。本文就是来讨论构造二元切触插值公式的方法，并且给出一些具体的二元切触插值公式。

熟知，构造这种切触插值公式的最一般的方法是行列式方法。然而这种方法在插值条件较多的情况下用起来比较笨重，而且当条件选得不恰当时可能由于方程组的奇异性而求不出插值公式来。为了克服这个缺点，在§2中，我们将给出二元切触插值的迭加插值法。读者将看到，这种方法不但具有一般性，而且允许插值结点分布具有相当大的任意性。在

* 1980年12月22日收到.

§3中，我们运用这种方法构造了一些插值公式，由此也说明了这种方法的有效性。在最后一节中，我们将探讨二元切触插值的Lagrange插值法。

§2. 迭加插值法

若给定了r个二元多项式空间$H_1,H_2,\cdots,H_r$和r个插值泛函组$E_1,E_2,\cdots,E_r$，满足如下两个条件：

A. H_i是E_i的适定空间；

B. 当$P(x,y)\epsilon H_i$时，对一切$D\in\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}E_k$都有$DP(x,y)=0$；

我们就说给出了一个迭加插值法。若用$P_1,P_2\cdots,P_r$分别表示$H_1,H_2,\cdots,H_r$中的多项式的一般表达式，则实现该插值算法就是利用被插函数在E_1，$E_2,\cdots$，E_r作用下的值来依次地定出表达式

$$P(x,y)=P_1(x,y)+P_2(x,y)+\cdots+P_r(x,y) \tag{2}$$

中的$P_1(x,y)$，$P_2(x,y),\cdots$，$P_r(x,y)$。所得到的$P(x,y)$就是所求的插值多项式。

关于迭加插值法我们有如下的定理：

定理1. 设E是空间H的适定插值泛函组，它被分成了r个彼此互不相交的组E_1，$E_2,\cdots,E_r$。若对$E_1,E_2,\cdots E_i(i<r)$已选出了i个H的子空间$H_1,H_2,\cdots$，H_i满足条件A，B；那么，一定可以继续选出H的子空间H_{i+1}，$H_{i+2}\cdots,H_r$而使E_i、$H_i(i=1、2、\cdots,r)$作成一个迭加插值法。

证明. 由于E是空间H的适定插值泛函组，故对E中每个插值泛函都唯一地对应着一个多项式$l_{ikl}(x,y)$（今后我们称它为基本多项式），使$D_{ikl}(l_{ikl}(x,y))=1$，而用E中其他的泛函作用于$l_{ikl}(x,y)$便转化为零。这时我们只要取E_{i+1}中的所有的插值泛函所对应的基本多项式所支成的线性空间作为H_{i+1}，即可满足条件A,B。用同样的方法可找到H_{i+2}，$\cdots,H_r$。证完

这个定理说明，任何一个适定插值问题原则上都可用迭加插值法来实现。

通常考虑插值问题的插值条件大都具有如下的形式：

$$D_{ikl}P(x,y)=f_{ikl}, \tag{3}$$

$i=1,2,\cdots,n;k=0,1,\cdots,k_i;l=0,1,\cdots,l_k^{(i)}$；而$l_k^{(i)}\geqslant l_{k+1}^{(i)}$。例如Тополяньский（见[2]）和Ahlin（见[3]）所考虑的都是这种插值条件。我们用I_i来表示对固定的i此处所有的(k,l)作成的集合，而与其对应的插值泛函组我们用D_i来记。对于这种插值问题，我们可以用更简单的方式来构造迭加插值算法：

找$r+1$个其元素为二元多项式的线性空间$G_0,G_1,\cdots,G_r$和加在$r+1$个点组Z_0,Z_1，$\cdots$，Z_r上的插值泛函组E_0，$E_1,\cdots$，E_r，以及r个二元多项式$Q_1(x,y)$，$Q_2(x,y),\cdots$，$Q_r(x,y)$，使满足如下的两个条件：

A′. E_i是G_i的适定插值泛函组；

B′. $D_{jkl}Q_i=0$　当$(k,l)\in I_i$，$0\leqslant j<i$；而Z_i中任何点都不在曲线$Q_i(x,y)=0$上．这时我们就说给定了一个迭加插值法．

设$P_0(x,y)$，$P_1(x,y)$，…，$P_r(x,y)$分别是$G_0,G_1,\cdots,G_r$中元素的一般表达式（亦即关于基底线性组合的一般形式）．我们来考虑如下形式的多项式

$$P(x,y)=P_0+Q_1P_1+Q_2P_2+\cdots+Q_rP_r. \tag{4}$$

实现该插值算法就是依次根据被插函数在$E_0,E_1,\cdots,E_r$的作用下的值来分别地定出(4)中$P_0,P_1,\cdots,P_r$的系数，从而得到所求的插值多项式$P(x,y)$．这时我们有如下定理：

定理2． 对于插值问题(3)，当条件A',B'被满足时，形如(4)的插值多项式总可造得出来．

证明　根据迭加插值法实现的过程，我们只需证明：空间$Q_iG_i=\{Q_iR(x,y)|R(x,y)\in G_i\}$也是$E_i$的适定插值空间．设$P_i$具有形式

$$P_i(x,y)=\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{(k,l)\in I_j}a_{jkl}b_{jkl}(x,y),$$

其中n_i是Z_i所含点数，而b_{jkl}是G_i在E_i上当$j\neq j_1$或$k_1\neq k$或$l_1\neq l$时；的插值基本多项式：$D_{j_1k_1l_1}b_{jkl}=0$；而$D_{jkl}b_{jkl}=1$．那末我们只须证明：对任何数组$g_{j_1k_1l_1}$来说，方程组（未知数是a_{jkl}）

$$D_{j_1k_1l_1}(Q_iP_i(x,y))=g_{j_1k_1l_1},\ j_1=1,\cdots n_i;\ (k_1,l_1)\in I_{j_1}$$

总有解．为此，根据b_{jkl}的性质，只须证对任何固定的j_1来说，方程组

$$D_{j_1k_1l_1}\Big(Q_i\sum_{(k,l)\in I_{j_1}}a_{j_1kl}b_{j_1kl}(x,y)\Big)=g_{j_1k_1l_1},(k_1,l_1)\in I_{j_1},$$

对任何的数组$g_{j_1k_1l_1}$都有解．而这一点根据Leibnitz微商公式以及插值问题(3)的切触条件的特点是容易看出的．证完．

显然，用后面这种迭加插值法可以去解决Тополяньский和Ahlin所考虑的插值问题，所得的多项式的次数都不会比他们的高．特别当解决Ahlin所研究的推广的二元Hermite插值问题时，将会得到等价的插值多项式．除此之外，这种插值法的一个特殊的效能是用来解决n次不缺项的二元多项式插值问题，其具体提法如下：

在平面上任意划$m+1$条竖直线$x=x_k,k=0,1,\cdots,m$．在$x=x_0$上取$m+1$个点，在$x=x_1$上取m个点，…，在$x=x_m$上取一个点．在每一条直线上所取的点中有而且仅有一个点要求0到r阶微商（即关于x，y的混合微商次数不超过r）的切触条件（共有$\frac{(r+1)(r+2)}{2}$个条件），而在其余的点处要求关于x和关于y都是0到r阶微商的切触条件（共有$(r+1)^2$个条件）．要求作一个$n=(m+1)r+m$次二元多项式$P(x,y)$满足这些插值条件．

显然用Тополяньский的方法是造不出这种多项式的．但用迭加插值法便可完满地解决．根据迭加插值法的定义，我们只须考虑如下形式的多项式

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\prod_{k=0}^{i-1}(x-x_k)^{r+1}\sum_{j=0}^{r}(x-x_i)^j P_{ij}(y),$$

其中 $P_{ij}(y)$是 y 的 $(m+1)r-i(r+1)-j+m$ 次多项式的一般形式。读者不难看出，形如 $\sum_{j=0}^{r}(x-x_i)^j P_{ij}(y)$的多项式所作成的空间是直线 $x=x_i$ 上插值条件的适定插值空间。为定出 $P(x,y)$，我们只须根据 $x=x_0$，$x=x_1$，…，$x=x_m$ 上的插值条件来依次地定出 $P_{0j}(y)$，$P_{1j}(y)$，…，$P_{mj}(y)$的系数。下一节的插值公式(5)就是用这种方法构造出来的。

§3. 用迭加插值法构造的一些二元切触插值公式

在本节中，我们将通过一些例子来说明如何运用迭加插值法来构造二元切触插值公式。并用计算实验表明所造出的插值公式的有效性。

1．直角三角形上的三次插值多项式

设△代表三条直线 $x=0$；$y=0$；$x+y=1$ 所围成的三角形区域。并取三角形的三个顶点作为插值结点，再令 $(x_0,y_0)\equiv(0,0)$；$(x_1,y_0)\equiv(1,0)$；$(x_0,y_1)=(0,1)$。要求一个二元三次多项式 $P(x,y)$，使之满足如下插值条件：

$$\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu\partial y^\nu}P(x_i,y_j)=\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu\partial y^\nu}f(x_i,y_j),\qquad \begin{pmatrix}\text{当}i=j=0\text{ 时，}\mu,\nu=0,1\\ \text{当}i+j=1\text{ 时，}\mu+\nu\leqslant 1\end{pmatrix},$$

根据§2 提出的算法，我们知道一定存在一个不缺项的二元三次插值多项式

$$P(x,y)=a_0+a_1y+a_2y(y-1)+a_3y^2(y-1)+x\{a_4+a_5y+a_6y(y-1)\}+x^2\{a_7+a_8(x-1)+a_9y\}\tag{5}$$

满足我们的要求。而多项式的系数经过简单计算便可求出：

$a_0=f(0,0)$，　　$a_1=[0|10]$，　　$a_2=[0|10]-f'_y(0,0)$，

$a_3=[0|10]_y-2\{[0|10]+f'_y(0,0)\}$，　　$a_4=f'_x(0,0)$

$a_5=[0|10]_x$，　　$a_6=f'_x(0,1)-f(0,0)-f''_{xy}(0,0)$，

$a_7=[10|0]-f'_x(0,0)$，　　$a_8=[10|0]_x-2\{[10|0]-f'_x(0,0)\}$，

$a_9=f'_y(1,0)-[0|10]-[0|10]_x$，

其中　$[x_1x_0|y_0]=\dfrac{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_1-x_0}$，　$[x_0|y_1y_0]=\dfrac{f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)}{y_1-y_0}$，

$[x_1x_0|y_0]_y=\dfrac{f'_x(x_1,y_0)-f'_x(x_0,y_0)}{x_1-x_0}$，　$[x_0|y_1y_0]_x=\dfrac{f'_x(x_0,y_1)-f'_x(x_0,y_0)}{y_1-y_0}$。

显然，这个公式是在§2 中令 $r=1$ 得到的。不难直接验证插值公式(5)具有三次代数精确度(即对于混合次数不超过三的多项式精确成立)。将求得的多项式(5)积分之，我们就得到三角形域△上的求积公式

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{5}f(0,0) + \frac{3}{20}[f(1,0)+f(0,1)] + \frac{1}{30}[f'_x(0,0)+f'_y(0,0) - f'_x(1,0) - f'_y(0,1)] + \frac{1}{60}[f'_x(0,1)+f'_y(1,0)] + \frac{1}{120}f''_{xy}(0,0).$$

显然，它是具有三次代数精确度的边界型求积公式（见[4]）。

计算实验．取 $f(x,y)=e^{x+y}$，要求近似地计算出 $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ 的值．利用插值公式(5)可以求出 $p(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=1.6030$．而 $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=e^{\frac{1}{2}}\approx 1.6453$．其绝对误差为0.0423，相对误差为0.0256．又由积分公式可以求出

$$\iint_{\Delta} e^{x+y}dxdy \approx 0.965\ .$$

而积分真值为1，故其绝对误差为0.035．

2．直角三角形上的二次切触插值公式

我们仍在例1．中所述三角形域△上考虑问题．欲求一个二次多项式 $P(x,y)$，使之满足如下的六个条件：

$$P(0,0)=f(0,0),\quad P(1,0)=f(1,0),\quad P(0,1)=f(0,1),$$
$$P'_x(1,0)=f'_x(1,0),\ P'_y(0,1)=f'_y(0,1),\ P''_{xy}(0,0)=f''_{xy}(0,0).$$

前五个条件可归为一组，它们是形如

$$a_0+b_0x+c_0y+b_1x(x-1)+c_1y(y-1)$$

的多项式所作成的空间的适定插值泛函组（相应的插值显然可用差商算法来实现），形如 a_1xy 的多项式所做成的空间是最后一个插值条件的适定空间．而且这种类型的多项式在前五个插值泛函的作用下转化为零．所以根据§2的讨论，我们可以构造出满足所给插值条件的多项式

$$P(x,y)=a_0+b_0x+b_1x(x-1)+c_0y+c_1y(y-1)+a_1xy. \tag{6}$$

经过计算，求得

$$a_0=f(0,0),\quad b_0=f(1,0)-f(0,0),\quad c_0=f(0,1)-f(0,0),$$
$$a_1=f''_{xy}(0,0),\ b_1=f'_x(1,0)-f(1,0)+f(0,0),\ c_1=f'_y(0,1)-f(0,1)+f(0,0).$$

显然，这个插值公式具有二次代数精确度．

计算实验．取 $f(x,y)=\sin\frac{1+2x+2y}{8}\pi$，要计算 $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ 的值．由公式(6)求得 $P(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=0.7218$，而 $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\sin\frac{\pi}{4}\approx 0.7070$．其绝对误差为0.0219．

在三角形区域△上将(6)积分，便可得到具有二次代数精确度的边界型求积公式

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \frac{1}{4}[f(1,0)-f(0,1)] - \frac{1}{12}[f'_x(1,0)-f'_y(0,1)] + \frac{1}{24}f''_{xy}(0,0).$$

我们可以利用它求得

$$\iint_{\triangle} e^{x+y}dxdy \approx 0.947.$$

该积分的精确值是1．近似求积的绝对误差（或相对误差）是0.053.

3．单位园域上的三次切触插值公式

我们考虑以原点为心的单位园域$\mathscr{D}$．取园心和园周与两坐标轴的四个交点作为插值结点，可以构造满足插值条件

$$P(0,0)=f(0,0),\quad P(\pm1,0)=f(\pm1,0),\ P(0,\pm1)=f(0,\pm1),$$

$$P'_x(1,0)=f'_x(1,0),\ P'_y(0,1)=f'_y(0,1),\quad P''_{xy}(-1,0)=f''_{xy}(-1,0),$$

$$P''_{xy}(0,-1)=f''_{xy}(0,-1),\qquad P''_{xy}(0,0)=f''_{xy}(0,0)$$

的多项式．这时前七个条件可归为一组，它是形如

$$a_0+a_1x+a_2y+a_3x(x-1)+a_4y(y-1)+a_5x(x^2-1)+a_6y(y^2-1)$$

的多项式所做成的空间的适定插值泛函组（相应的插值多项式可用差商算法来实现）．形如 $a_7xy+a_8xy(y-1)+a_9xy(x-1)$ 的多项式所做成的空间是最后三个插值条件的适定空间，而这种类型的多项式在前七个插值泛函的作用下转化为零．所以根据§2的讨论，我们可以构造出满足所有给定插值条件的插值多项式

$$P(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3x(x-1)+a_4y(y-1)+a_5x(x^2-1)+a_6y(y_2-1)$$
$$+a_7xy+a_8xy(y-1)+a_9xy(x-1), \tag{7}$$

其中

$$a_0=f(0,0),\qquad a_1=f(1,0)-f(0,0),\qquad a_2=f(0,1)-f(0,0),$$

$$a_3=\frac{1}{2}[f(-1,0)+f(1,0)-2f(0,0)],\qquad a_4=\frac{1}{2}[f(0,-1)+f(0,1)-2f(0,0)]$$

$$a_5=\frac{1}{4}[2f'_x(1,0)+4f(0,0)-3f(1,0)-f(-1,0)],$$

$$a_6=\frac{1}{4}[2f'_y(0,1)+4f(0,0)-3f(0,1)-f(0,-1)],$$

$$a_7=\frac{1}{2}[3f''_{xy}(0,0)-f''_{xy}(-1,0)-f''_{xy}(0,-1)+f(0,0)]$$

$$a_8=\frac{1}{2}[f''_{xy}(0,0)-f''_{xy}(0,-1)],\qquad a_9=\frac{1}{2}[f''_{xy}(0,0)-f''_{xy}(-1,0)].$$

不难直接验证(7)具有三次代数精确度．

由以上三个简单例子我们看出，运用§2中给出的原则，可以构造出各种各样的二元切触插值公式．在这里我们不再一一列举了．读者可根据自己的需要按照§2中的方法去构造合用的切触插值公式．

§4. Lagrange 插值法

构造切触插值公式的另一个一般方法就是推广的 Lagrange 方法。对于插值问题(1)而言，运用这个方法就是去找一串“基本多项式” $b_{ikl}(x,y)$ 使得

$$D_{ikl}b_{ikl}(x,y)=1,$$

而在 E 中其他的插值泛函作用下 $b_{ikl}(x,y)$ 均转化为零。这时 Lagrange 插值公式为

$$P(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{(k,l)\in I_i}\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}f(x_i,y_i)\right)b_{ikl}(x,y).$$

显然构造这种插值公式的关键是求得这些基本多项式。

求这种基本多项式的最一般的方法是待定系数法。当要构造 $b_{ikl}(x,y)$ 时，我们先找一个多项式 $Q(x,y)$，它在 E 中一部分泛函（这些泛函用 E_1 表示）的作用下转化为零。在另一部分泛函（$E_2=E/E_1$）的作用下不为零，而 $D_{ikl}\in E_2$。然后我们选 E_2 的适定插值空间 H_2（设其元素的一般表示式为 $P(x,y)$）。所谓待定系数法，就是根据插值条件

$$D_{ikl}(QP)=\delta_{ik}\cdot\delta_{il},\qquad D_{ikl}\in E_2$$

来具体地定出多项式 P。这时 QP 既为所求的 b_{ikl}。用这种方法往往一下子就可把 E_2 中插值泛函所对应的基本多项式全部求出来。特别当取 E_1 是空集时，一次就可把全部的基本多项式求出来。其实这就是行列式方法。

在利用这种待定系数法时，必须注意解的存在与唯一性问题。不过我们可以证明，当 E_2 是§2(3)式所给出的那种插值条件时，待定系数法的解总是存在而且唯一的。此外，在 E_2 是某个结点 $(x,y)=(x_{i_0},y_{i_0})$ 上的所有插值条件 $E_2=\{D_{i_0kl}\mid(k,l)\in I_{i_0}\}$ 时，显然有如下的定理

定理3. 当对一切 $(k,l)\in I_{i_0}$，$D_{i_0kl}Q\neq 0$ 时，E_2 是形如

$$R(x,y)=Q(x,y)\sum_{(k,l)\in I_{i_0}}C_{kl}(x-x_{i_0})^k(y-y_{i_0})^l$$

的多项式所作成空间的适定泛函组。

这个定理告诉我们，可以从形如 $R(x,y)$ 的多项式中找到 $b_{i_0kl}(x,y)$，$(k,l)\in I_{i_0}$。进一步，当这里的 E_2 还是§2(3)式所给出的那种插值条件时，我们还可以用 Taylor 展开方法求得 b_{i_0kl}：

$$b_{i_0kl}(x,y)=Q(x,y)\cdot\frac{1}{k!l!}(x-x_{i_0})^k(y-y_{i_0})^l\times$$

$$\sum_{(\mu+k,\,l+\nu)\in I_{i_0}}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu\partial y^\nu}\left(\frac{1}{Q(x,y)}\right)\Bigg|_{x_{i_0},\,y_{i_0}}\cdot(x-x_{i_0})^\mu(y-y_{i_0})^\nu$$

$$=\frac{1}{k!l!}(x-x_{i_0})^k(y-y_{i_0})^lQ(x,y)\times$$

$$\sum_{(\mu+k,\ \nu+l)\in I_{i_0}} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left(\frac{1}{Q(x_{i_0}, y_{i_0})}\right)(x-x_{i_0})^\mu (y-y_{i_0})^\nu.$$

$$= Q(x, y) T_{i_0 kl}\left(\frac{1}{Q}\right). \tag{8}$$

若已知平面上某点组 S 上的 Lagrange 插值公式为

$$L(f) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i) b_i(x, y),$$

则在 S 中的每点上均满足 m 阶的切触条件(即前 $m-1$ 阶混合偏微商在 S 上保持不变)的插值公式可由下式给出：

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k+l\leqslant m} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x_i, y_i) b_i^m T_{ikl}\left(\frac{1}{l_i^m}\right) \tag{9}$$

利用公式(8)或(9)，我们不难以分布在平面上一组直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$ 上的一些点作为结点组，来构造其上的切触插值公式．例如，在平面上取三点 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$，其上的 Lagrange 插值公式为

$$L(f) = f(0,0)(1-x-y) + f(0,1)y + f(1,0)x\ . \tag{10}$$

若在每点上都要求关于 1，$\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$ 的切触插值条件，则根据公式(9)算出切触插值公式为

$$\begin{aligned} P(x,y) = {} & (1-x-y)^2[f(0,0)(1+2x+2y) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y] + y^2[f(0,1) \\ & \cdot(3-2y) + f'_x(0,1)x + f'_y(0,1)(y-1)] + x^2[f(1,0)(3-2x) + f'_x(1,0)(x-1) \\ & + f'_y(1,0)y]. \end{aligned} \tag{11}$$

用这种方法求出的插值多项式，显然比用 Тополянський [2]中公式的次数来得低．

计算实验．取 $f(x,y) = e^{xy}$，要求计算 $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$的值．由公式(10)计算得 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$，而用公式(11)计算得 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1.25$．真值 $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}} \approx 1.284$．绝对误差前者是 0.284，后者是 0,034．这说明公式(11)比公式(10)更精确些．

我们指出，插值公式(11)对于计算函数在三条边附近的值是非常有效的，而计算其内部函数值可能差些．为了克服这一缺点，我们可以利用迭加插值法将它加以精确化．例如，除了原来给定的插值条件外，我们再加上一个插值条件 $P''_{xy}(0,0) = f''_{xy}(0,0)$．显然形如 $cxy(1-x-y)$ 的多项式所做成的空间是新加的插值条件的适定空间，而且这种类型的多项式在前面九个插值泛函的作用下转化为零．于是根据§2中的讨论，我们可以构造出满足十个插值条件的插值多项式：

$$P(x,y)=(1-x-y)\{[(1+2x+2y)(1-x-y)+6xy]f(0,0)+x(1-x+y)f'_x(0,0)$$
$$+y(1+x-y)f'_y(0,0)+xyf''_{xy}(0,0)\}+y^2[f(0,1)(3-2y)+f'_x(0,1)x$$
$$+f'_y(0,1)(y-1)]+x^2[f(1,0)(3-2x)+f'_x(1,0)(x-1)+f'_y(1,0)y]. \quad (12)$$

显然，它具有三次代数精确度．根据插值的唯一性，它与公式（5）只是形式上的不同，而实质上是等价的．当然，在运用迭加插值时，还可选其他类型的插值条件．例如，我们用条件 $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$来代替条件 $P''_{xy}(0,0)=f''_{xy}(0,0)$，我们得到新的插值公式：

$$P(x,y)=(1-x-y)^2[f(0,0)(1+2x+2y)+f'_x(0,0)x+f'_y)0,0)y]+y^2[f(0,1)(3$$
$$-2y)+f'_x(0,1)x+f'_y(0,1)(y-1)]+x^2[f(1,0)(3-2x)+f'_x(1,0)(x-1)$$
$$+f'_y(1,0)y]+Cxy(1-x-y),$$

其中

$$C=27f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)-[5f(0,0)+f'_x(0,0)+f'_y(0,0)+7f(0,1)+f'_x(0,1)-2f'_y(0,1)$$
$$+7f(1,0)-2f'_x(1,0)+f'_y(1,0)].$$

这个公式只是在公式(11)中添加一项．显然这样的插值多项式能更好地逼近区域内部的函数值．

参 考 文 献

〔1〕梁学章，二元插值的适定结点组与迭加插值法，吉林大学自然科学学报，№1(1979)，27—32.

〔2〕Тополяньский, Д. Ъ., Квазиэрмитовые Интерполяционные Многочлены Относителъно Двух Переменных, *ДАН ЎРСР*, 1(1964), 30—34.

〔3〕Ahlin, A. C., A bivariate generalization of Hermites interpolation formula, *Math. Comput.*, V. 18, N. 86(1964), 264—273.

〔4〕徐利治、王仁宏、周蕴时，边界型求积公式的构造方法及应用，计算数学，№3，(1978)，54—76.

The Method of Constructing Bivariate Osculatory Interpolation Formula

By Liang Xuezhang(梁学章) *and Zhu Gonggin*(朱功勤)

Abstract

In this paper, the method of superposed interpolation for the problem of osculatory interpolation on the basis of our paper [1] is given. It allows of some irregular interpolation conditions. Not only the existence and the uniqueness of the interpolation may be assured, but some concrete interpolation formula can be obtained. In the close of this paper a generalization of the classical Lagrange interpolation method to bivariate osculatory interpolation is given. It also generalizes the results of Тополянбский and Ahlin([2]、[3]).