关于U统计量的一点注记*

苏淳　白志东　徐达明

（中国科技大学）

设$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_m)$是一个m元实值 Borel 可测的对称函数，即对$(1,2,\cdots,m)$的任一排列$(i_1,i_2,\cdots,i_m)$都有

$$\phi(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})=\phi(x_1,x_2,\cdots,x_m); \tag{1}$$

又设$x_1,x_2,\cdots$为独立同分布随机变数，对$n\geqslant m$，定义

$$U_n=U_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}\phi(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}),$$

我们称U_n为以ϕ为核的U统计量。

U统计量具有许多与独立随机变数和相类似的性质。但也有一些在 iid 情况下弄清楚了的问题，对U统计量并未弄清。我们下面获得的一个结果就属于这类情况。

众所周知，如果$x_1,x_2,\cdots$,iid，如果对某个n，$E|x_1+\cdots+x_n|<\infty$，则$E|x_1|<\infty$，反之亦然。我们获得的结果则表明U统计量具有类似的性质。

定理　$E|\phi|<\infty$的充分必要条件是：存在一个$n\geqslant m$，使得$E|U_n|<\infty$。

证明：必要性显然。只需证明充分性，设对某个$n\geqslant m$，有$E|U_n|<\infty$，那么，不难看出：对一切$k>0$，我们有：

$$U_{n+k}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,x_{n+k})=\frac{1}{\binom{n+k}{n}}\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant n+k}U_n(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n}).$$

由$x_1,x_2,\cdots$,iid，以及$E|U_n|=E|U_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)|<\infty$，知道$E|U_n(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n})|<\infty$。从而对一切$k>0$，均有$E|U_{n+k}|<\infty$。

为方便起见，下设$m=2$。我们有

$$\begin{aligned}U_{n+1}&=\frac{1}{\binom{n+1}{2}}\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\phi(x_{i_1},x_{i_2})+\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i,x_{n+1})\right)\\&=\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{2}}U_n+\frac{1}{\binom{n+1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i,\phi_{n+1})\end{aligned}$$

* 1980年12月2日收到。

推荐者：陈希孺（中国科技大学数学系）。

故由$E|U_n|<\infty$，$E|U_{n+1}|<\infty$，知

$$E\left|\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i,x_{n+1})\right|<\infty. \tag{2}$$

再由$E|U_{n+1}|<\infty$，$E|U_{n+2}|<\infty$，可同样推得

$$E\left|\sum_{i=1}^{n+1}\phi(x_i,x_{n+2})\right|<\infty. \tag{3}$$

注意到$x_1,x_2,\cdots$,iid及ϕ的对称性，知道：若在(3)式中以x_{n+1}代替x_{n+2}，并用x_{n+2}代替x_{n+1}，其值不变，因此有

$$E\left|\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i,x_{n+1})+\phi(x_{n+2},x_{n+1})\right|<\infty. \tag{4}$$

综合(2)、(4)式立知$E|\phi(x_{n+2},x_{n+1})|<\infty$，即$E|\phi|<\infty$.

不难看出，对$m>2$，可以类似证明.

A Note on U Statistics

By Su Chun(苏 淳), *Bai Zhidong*(白志东), *and Xu Daming*(徐达明)

Abstract

Let $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ be a real Borel measurable symmetrical function of the m variables, and let U_n denote the U-statistic with kernel ϕ. In this note it is proved that the necessary and sufficient condition for $E|\phi|<+\infty$ is that there exists an $n\geqslant m$ such that $E|U_n|<+\infty$.