分数阶连续模与 Fourier 级数的绝对收敛*

谢庭藩

（杭州大学）

一、前　　言

设 $f(x)$ 是周期 2π 的周期可积函数，

$$\mathfrak{S}[f]=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x} \tag{1}$$

为其 Fourier 级数，根据函数 f 的光滑程度来判定（1）之绝对收敛，有不少著名的定理。例如，Бернштейн[1]指出，若 $f\in C_{2\pi}$，$\omega(f,\delta)$为其连续模，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

收敛时，级数(1)绝对收敛；Zygmund[2]指出，若 $f\in C_{2\pi}$ 为有界变差函数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)}$$

收敛时，级数（1）绝对收敛。不久前，Neugebauer[3] 证明，若 $\sigma\geqslant 0$，$1<p\leqslant 2$　$0<\beta\leqslant p'$ $\left(=\frac{p}{p-1}\right)$，而且积分

$$\int_0^1\frac{\omega^{\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{2+\sigma-\beta/p'}}d\delta$$

存在，则级数

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|c_\nu|^{\beta}|\nu|^{\sigma} \tag{2}$$

收敛，其中 $\omega(f,\delta)_{L^p}$ 为 f 在空间 $L^p_{2\pi}$ 中的连续模。

不难看出，Neugebauer 的结论包括了 Бернштейн 与Zygmund的定理，但是 Neugebauer 的结论并不是新的。早在 1965 年，Leindler[4]就已证明了更强的定理：若$\sigma\geqslant 0$，$1<p\leqslant 2$，$0<\beta\leqslant p'$，而且

$$\int_0^1\frac{\omega^{\beta}_{\underset{2}{*}}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{2+\sigma-\beta/p'}}d\delta<+\infty, \tag{3}$$

* 1980 年 12 月 13 日收到。

则级数(2)收敛，其中

$$\omega_2^*(f,\delta)_{L^p}=\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+2t)-2f(x+t)+f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

本文二首先证明(3)与

$$\int_0^1\frac{\omega_2^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{?+\alpha-\beta/p'}}d\delta<+\infty \tag{4}$$

是等价的，式中

$$\omega_2(f,\delta)_{L^p}=\sup_{0<h\leq\delta}\omega_2^*(f,\delta)_{L^p}.$$

因此，Leindler 的定理也不是新的，而是我们的一条定理的推论（见[5]定理1）.

其次，我们将引进一种较弱的分数阶连续模. 设γ是个正数，记

$$\Delta_h^\gamma f(x)=\sum_{j=i}^{\infty}(-1)^j\binom{\gamma}{j}f(x+jh).$$

由于

$$\binom{\gamma}{j}=\frac{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-j+1)}{j!}=O(j^{-\gamma-1}),$$

所以当$f\in L^p$ $(1\leq p\leq\infty)$时，$\Delta_h^\gamma f$也属于L^p. 这里约定$L_{2\pi}^\infty\equiv C_{2\pi}$，称(参见[6])

$$\omega_\gamma(f,\delta)_{L^p}=\sup_{0<h\leq\delta}\omega_\gamma^*(f,h)_{L^p}$$

为f的γ阶连续模，其中

$$\omega_\gamma^*(f,\delta)=\left\{\int_0^{2\pi}|\Delta_\delta^\gamma f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

当$\gamma=1$或$p=1$时，记号中之γ或p都将省去. 现在定义弱性连续模如下：

$$\underline{\omega_\gamma}(f,\delta)_{L^p}=\inf_{\frac{1}{2}\delta\leq h\leq\delta}\omega_\gamma^*(f,h)_{L^p}.$$

直接看到

$$\underline{\omega}_\gamma(f,\delta)_{L^p}\leq\omega_\gamma^*(f,\delta)_{L^p}\leq\omega_\gamma(f,\delta)_{L^p}. \tag{5}$$

因此，在Fourier级数的绝对收敛的条件中，我们要问能否用$\underline{\omega}_\gamma(f,\delta)_{L^p}$来代替$\omega_\gamma^*(f,\delta)_{L^p}$或$\omega_\gamma(f,\delta)_{L^p}$？本文三将用$\omega_\gamma(f,\delta)$的性态来判定级数(2)的收敛，从而建立更广泛的定理. 本文四将给出两个推论并提出一个问题.

二、条件(3)与(4)的等价性

定理1. 设$p\geq1$，$\beta>0$，$\alpha\geq0$，则

$$\int_0^1\frac{\omega_2^{*\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta<+\infty$$

与

$$\int_0^1\frac{\omega_2^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta<+\infty$$

等价。

证明 显然，我们只需证明有正数C使得

$$\int_0^1 \frac{\omega_2^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta \leqslant C\int_0^1 \frac{\omega_2^{*\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta.$$

对于$\delta>0$，考虑$t\in[0,\delta]$，直接计算得到

$$\Delta_\delta^2 f(x)=\Delta_t^2 f(x+2\delta-2t)+2\Delta_{\delta-t}^2 f(x+t), \\ -\Delta_{\delta-2t}^2 f(x+2t)+\Delta_t^2 f(x). \tag{6}$$

于是，

$$\omega_2^*(f,\delta)_{L^p}\leqslant 2\omega_2^*(f,t)_{L^p}+2\omega_2^*(f,\delta-t)_{L^p}+\omega_2^*(f,|\delta-2t|)_{L^p}.$$

从而，对任何$\beta>0$有

$$\omega_2^{*\beta}(f,\delta)_{L^p}\leqslant 6^\beta(\omega_2^{*\beta}(f,t)_{L^p}+\omega_2^{*\beta}(f,\delta-t)_{L^p}+\omega_2^{*\beta}(f,|\delta-2t|)_{L^p}).$$

由此不难算出

$$\omega_2^{*\beta}(f,\delta)_{L^p}\leqslant\frac{3\cdot 6^\beta}{\delta}\int_0^\delta \omega_2^{*\beta}(f,t)_{L^p}dt. \tag{7}$$

此外，由(6)得到

$$2\Delta_{\delta-t}^2 f(x+t)=\Delta_\delta^2 f(x)-\Delta_t^2 f(x+2\delta-2t)+\Delta_{\delta-2t}^2 f(x+2t)-\Delta_t^2 f(x).$$

故有

$$2\omega_2^*(f,\delta-t)_{L^p}\leqslant 2\omega_2^*(f,t)_{L^p}+\omega_2^*(f,\delta)_{L^p}+\omega_2^*(f,|\delta-2t|)_{L^p}.$$

于此，考 察 $t\in\left[\frac{3\delta}{4},\delta\right]$，并记$u=\delta-t$。则$u\in\left[0,\frac{\delta}{4}\right]$，而且

$$2\omega_2^*(f,u)_{L^p}\leqslant 2\omega_2^*(f,\delta-u)_{L^p}+\omega_2^*(f,\delta)_{L^p}+\omega_2^*(f,\delta-2u)_{L^p}.$$

于是

$$\omega_2^{*\beta}(f,u)_{L^p}\leqslant 3^\beta[\omega_2^{*\beta}(f,\delta-u)_{L^p}+\omega_2^{*\beta}(f,\delta)_{L^p}+\omega_2^{*\beta}(f,\delta-2u)_{L^p}].$$

将不等式(7)代入上式之右，则有

$$\omega_2^{*\beta}(f,u)_{L^p}\leqslant 3^\beta\Big(\frac{3\cdot 6^\beta}{\delta-u}\int_0^{\delta-u}\omega_2^{*\beta}(f,t)_{L^p}dt \\ +\frac{3\cdot 6^\beta}{\delta}\int_0^\delta \omega_2^{*\beta}(f,t)_{L^p}dt+\frac{3\cdot 6^\beta}{\delta-2u}\int_0^{\delta-2u}\omega_2^{*\beta}(f,t)_{L^p}dt,$$

由此即得

$$\omega_2^{*\beta}(f,u)_{L^p}\leqslant\frac{2^{\beta+1}3^{2\beta+2}}{\delta}\int_0^\delta \omega_2^{*\beta}(f,t)_{L^p}dt \quad (0\leqslant u\leqslant\frac{\delta}{4}).$$

因此，从

$$\omega_2^\beta(f,\frac{\delta}{4})_{L^p}=\sup_{0<u\leqslant\delta/4}\omega_2^{*\beta}(f,u)_{L^p}$$

得到
$$\omega_2^\beta(f,\frac{\delta}{4})_{L^p}\leqslant\frac{2^{\beta+1}3^{2\beta+2}}{\delta}\int_0^\delta \omega_2^{*\beta}(f,t)_{L^p}dt.$$

利用熟知的不等式

$$\omega_2(f,4\delta)_{L^p}\leqslant 2^4\omega_2(f,\delta)_{L^p}\quad(\delta>0),$$

即有

$$\omega_2^\beta(f,\delta)_{L^p}\leqslant\frac{2^{5\beta+1}3^{2\beta+2}}{\delta}\int_0^\delta\omega_{\frac{*}{2}}^\beta(f,t)_{L^p}\,dt.$$

然后，借助于Fubini定理，由上式推出

$$\int_0^1\frac{\omega_2^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}\leqslant 2^{5\beta+1}3^{2\beta+2}\int_0^1\frac{1}{\delta^{2+\alpha}}\int_0^\delta\omega_{\frac{*}{2}}^\beta(f,t)_{L^p}dt\,d\delta$$

$$\leqslant 2^{5\beta+1}3^{2\beta+2}\int_0^1\frac{\omega_{\frac{*}{2}}^\beta(f,t)_{L^p}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

此即所求。定理1证毕。

从我们在论文[5]中所建立的定理1看出，若级数

$$\sum_{n=1}^\infty 2^{n(\sigma+1-\frac{\beta}{p'})}\omega_2^\beta\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_{L^p}$$

收敛，则级数(2)也收敛。显然，这个级数的收敛等价于积分

$$\int_0^1\frac{\omega_2^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{2+\sigma-\beta/p'}}d\delta$$

具有限值。因此，定理说明Leindler的定理是[5]中定理1的推论。

三、新 的 结 果

定理2. 设 $\gamma>0$，$\sigma\geqslant 0$，$1<p\leqslant 2$以及 $0<\beta\leqslant p'$。如果级数

$$\sum_{\nu=1}^\infty\nu^{\sigma-\frac{\beta}{p'}}\omega_\gamma^\beta\left(f,\frac{1}{\nu}\right)_{L^p}\tag{8}$$

收敛，则级数(2)也收敛

证明　不难验证

$$\Delta_h^\gamma f(x)\sim\sum_{\nu=-\infty}^\infty(1-e^{i\nu h})^\gamma c_\nu e^{i\nu x}.$$

故由 Hausdorff－young 不等式得到

$$\left\{\sum_{\nu=1}^\infty|c_\nu|^{p'}|1-e^{i\nu h}|^{\gamma p'}\right\}^{\frac{1}{p'}}\leqslant C\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_{L^p}.^*$$

显然，

$$|1-e^{i\nu h}|\geqslant|\sin\nu h|$$

* 以下C表示仅与γ,σ,β有关的正的常数。但不同的式子中，其值可能不同。

所以，当 $h\in[2^{-n-2},2^{-n}]$ 时，

$$\left\{\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^{p'}\right\}^{\frac{1}{p'}}\leqslant C\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_{L^p}. \tag{9}$$

因此，对于 $\beta\in[0,p']$，可以使用 Hölder 不等式求得

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C2^{n(\sigma+1-\frac{\beta}{p'})}\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_{L^p}^\beta.$$

h 在区间 $[2^{-n-2},2^{-n}]$ 中的任意性含有

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C2^{n(\sigma+1-\frac{\beta}{p'})}\inf_{2^{-(n+2)}\leqslant h\leqslant 2^{-n}}\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_{L^p}^\beta. \tag{10}$$

显然

$$\inf_{2^{-(n+2)}\leqslant h\leqslant 2^{-n}}\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_{L^p}\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\inf_{(2\nu)^{-1}\leqslant h\leqslant\nu^{-1}}\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_{L^p}^\beta$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\omega_\gamma^\beta(f,\nu^{-1})_{L^p}.$$

将此式代入不等式(10)，我们有

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C2^{n(\sigma-\frac{\beta}{p'})}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\omega_\gamma^\beta(f,\nu^{-1})_{L^p}$$

或者说

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\nu^{(\sigma-\beta/p')}\omega_\gamma^\beta(f,\nu^{-1})_{L^p}.$$

从而看到，级数(8)收敛时，级数(2)也收敛．定理 2 证毕．

由(10)式还可看出

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C2^{n(\sigma+1-\beta/p')}\inf_{2^{-(n+1)}\leqslant h\leqslant 2^{-n}}\omega_\gamma^\beta(f,h)_{L^p}.$$

因此，我们有

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C2^{n(\sigma+2-\beta/p')}\int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}}\omega_\gamma^\beta(f,h)_{L^p}dh.$$

$$\leqslant C\int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}}\frac{\omega_\gamma^\beta(f,h)_{L^p}}{h^{\sigma+2-\beta/p'}}dh.$$

于是，类似于定理 2 有如下的

定理2′. 设 $\gamma>0$，$\sigma\geqslant0$，$1<p\leqslant2$ 以及 $0<\beta\leqslant p'$. 如果

$$\int_0^1 \frac{\omega_\gamma^\beta(f,\delta)}{\delta^{\sigma+2-\beta/p'}}d\delta<+\infty,$$

则级数(2)收敛.

下面讨论 $\beta>p'$ 的情形. 相应于定理2及定理2′，我们有如下的

定理3. 设 $\gamma>0$，$\sigma\geqslant0$，$1<p\leqslant2$ 以及 $\beta>p'$. 如果

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\omega_\gamma^\beta\left(f,\frac{1}{\nu}\right)_{L^p}<+\infty \tag{11}$$

或

$$\int_0^1 \frac{\omega_\gamma^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{\sigma+1}}d\delta<+\infty, \tag{12}$$

则级数(2)收敛.

证明 熟知，$\beta>p'$ 时，

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\leqslant\left\{\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^{p'}\right\}^{\frac{\beta}{p'}}.$$

因此，由定理2证明中的不等式(9)，我们得到

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\leqslant C\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_{L^p},$$

其中 $h\in[2^{-(n+2)},\ 2^{-n}]$. 于是，类似于定理2的证明，我们有

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\nu^{\sigma-1}\omega_\gamma^\beta\left(f,\frac{1}{\nu}\right)_{L^p}$$

以及

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|c_\nu|^\beta\nu^\sigma\leqslant C\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}}\frac{\omega_\gamma^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{\sigma+1}}d\delta.$$

这样一来，不等式(11)或(12)都含有级数(2)的收敛. 定理3证毕.

四、推论与问题

显然，Leindler的定理可从定理2′推出. 特别在 $\beta=1,\sigma=0$ 时，由定理2及2′得到

推论1. 设有 $\gamma>0$，$1<p\leqslant2$，则级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-\frac{1}{p'}}\omega_\gamma(f,\nu^{-1})_{L^p}$$

或积分

$$\int_{\nu}^{1}\frac{\underline{\omega}_{\gamma}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\frac{1}{p}}}d\delta$$

收敛时，f 的 Fourier 级数绝对收敛。

显然，
$$\underline{\omega}_{1}(f,\delta)_{L^p}\leqslant\omega_{1}^{*}(f,\delta)_{L^p}\quad(\delta>0)。$$

所以推论1包含着Garsia于1976年证明的结论[7]：设 $1<p\leqslant 2$，如果积分

$$\int_{\nu}^{1}\frac{\omega_{1}^{*}(f,\delta)}{\delta^{1+\frac{1}{p}}}d\delta \tag{13}$$

收敛，则 f 的 Fourier 级数绝对收敛。

Neugebauer 曾经指出[3]，Garsia 的条件(13)与

$$\int_{\nu}^{1}\frac{\omega(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\frac{1}{p}}}d\delta<\infty$$

是等价的。将上述事实与定理1相结合，我们提出这样一个问题：关于积分

$$\int_{\nu}^{1}\frac{\underline{\omega}_{\gamma}^{\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta$$

与

$$\int_{\nu}^{1}\frac{\omega_{\gamma}^{\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta$$

之间还有些什么可说的？

下面考虑有界变差函数。对于 $\gamma>0$，由于

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\binom{\gamma}{j}=0,$$

故
$$\Delta_{h}^{\gamma}f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\binom{\gamma}{j}[f(x+jh)-f(x)]。$$

于是对于 $h>0$，有

$$\|\Delta_{h}^{\gamma}f(x)\|_{L}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\left|\binom{\gamma}{j}\right|\omega(f,jh)_{L}。$$

因为 f 是有界变差函数，所以由 Hardy—Littlewood 定理，我们得到

$$\|\Delta_{h}^{\gamma}f(x)\|_{L}\leqslant C\sum_{j=0}^{[\frac{1}{h}]}\left|\binom{\gamma}{j}\right|jh+2\sum_{j>\frac{1}{h}}\left|\binom{\gamma}{j}\right|\|f\|_{L}。$$

因此，利用不等式(4)，容易得到，在 $r\geqslant 1$ 时

$$\|\Delta_h^\gamma f(x)\|_L \leqslant C(1+\|f\|_L)h.$$

这样一来，如果 f 为连续的有界变差函数，则有

$$\underline{\omega}_\gamma(f,\delta)_{L^2} \leqslant C\{\underline{\omega}_\gamma(f,\delta)\ (1+\|f\|_L)\delta\}^{\frac{1}{2}}.$$

推论2. 设 $\gamma\geqslant 1$，$\sigma\geqslant 0$ 以及 $0<\beta\leqslant 2$. 如果 f 为连续的有界变差函数，而且级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\sigma-\beta}\underline{\omega}_\gamma^{\frac{\beta}{2}}(f,\ \frac{1}{\nu})$$

收敛，则级数(3)收敛.

类似地可以写出 $\beta>2$ 时的结论. 特别有：

设 $\gamma\geqslant 1$，f 为连续的有界变差函数，则

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\underline{\omega}_\gamma^{\frac{1}{2}}(f,\frac{1}{\nu})}{\nu} < +\infty$$

含有 f 的 Fourier 级数绝对收敛. 它自然是 Zygmund 定理的一个推广.

参考文献

〔1〕Бернштейн, С. Н., Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, Сочинения Т. II, 166—169.

〔2〕Zygmund, A., Sur la converyence absolue des series de Fourier, JLMS 3(1928), 194—196.

〔3〕Neugebauer, C. J., The L^p modulus of continuity and Fourier series of Lipschitz functions, PAMS, Vol. 64, №1(1977), 71—76.

〔4〕Leindler, L., über strukturbedingungen für Fonriereihen. Math. Zeitschr. 88,(1965), 418—431.

〔5〕谢庭藩，富里埃级数的绝对收敛，数学学报，Vol.9, №2(1959), 199—212.

〔6〕Neugebauer, C. J., Smoothness of Bessel potentials and Lipschitz functions, Indiana University Math. J. Vol.26, №3(1977), 585—591.

〔7〕Garsia, A. M., A remarkable inequality and the uniform convergence of Fourier series, Indiana University Math. J. 25(1976), 85—101.

Continuity Modulus of Fractional Order and Absolute Convergence of Fourier Series

By *Xie Tingfan* (谢庭蕃)

Abstract

Let $f\in L_{2\pi}$ and let

$$\mathfrak{S}[f]=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu e^{i\nu x}$$

be its Fourier series. For any $\gamma>0$, the continuity modulus of fractional order γ of $f\in L^p_{2\pi}(p\geqslant1)$ is defined by

$$\omega_\gamma(f,\delta)_{L^p}=\sup_{|h|\leqslant\delta}\omega^*_\gamma(f,h)_{L^p}$$

where

$$\omega^*_\gamma(f,h)_{L^p}=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\gamma}{j}f(x+jh)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Let $1<p\leqslant2,0<\beta<p'\left(=\frac{p}{p-1}\right)$ and $\sigma\geqslant0$. On the absolute convergence of the Fouier series of function $f\in L^p_{2\pi}$, in 1977, Neugebauer proved: if

$$\int_0^1\frac{\omega_1^\beta(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{2+\sigma-\beta/p'}}d\delta<\infty, \tag{1}$$

then

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|c_\nu|^\beta|\nu|^\sigma<\infty. \tag{2}$$

But, this is not a new result; the fact is that, in 1965, Leindler had proved the following assertion:

$$\int_0^1\frac{\omega^{*\beta}_{2}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{2+\sigma-\beta/p'}}d\delta<\infty$$

implies (2).

In the present paper, we shall replace the continuity modulus $\omega_1(f,\delta)_{L^p}$ and the integral $\omega^*_2(f,\delta)_{L^p}$ by the weak-modulus of fractional order

$$\omega_\gamma(f,\delta)_{L^p}=\inf_{\frac{\delta}{2}\leqslant h\leqslant\delta}\omega^*_\gamma(f,h)$$

and establish a general theorem. The main results of this paper are the following theorems.

THEOREM 1. If $p\geqslant 1$, $\beta>0$ and $\alpha\geqslant 0$, then

$$\int_{\nu}^{1}\frac{\omega_{\ast 2}^{\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta<\infty$$

is equivalent to

$$\int_{\nu}^{1}\frac{\omega_{2}^{\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{1+\alpha}}d\delta<\infty.$$

THEOREM 2. *Let* $\gamma>0$, $\sigma\geqslant 0$, $1<p\leqslant 2$ and $0<\beta\leqslant p'$.

If
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\sigma-\beta/p'}\underline{\omega}_{\gamma}^{\beta}(f,\frac{1}{\nu})_{L^p}<\infty$$

or
$$\int_{\nu}^{1}\frac{\underline{\omega}_{\gamma}^{\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{\sigma+2-\beta/p'}}d\delta<\infty$$

then (2) holds.

THEOREM 3. Let $\gamma>0$, $\sigma\geqslant 0$ $1<p\leqslant 2$ and $\beta>p'$. If

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\underline{\omega}_{\gamma}^{\beta}(f,\frac{1}{\nu})_{L^p},$$

or
$$\int_{\nu}^{1}\frac{\underline{\omega}_{\gamma}^{\beta}(f,\delta)_{L^p}}{\delta^{\sigma+1}}d\delta<\infty$$

then (2) holds.