BMO函数的富里埃级数*

王斯雷

（杭州大学）

设 $f(x)$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中局部可积的函数，Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中各边平行于坐标轴的立方体，$|Q|$ 表示它的Lebesgue测度。记

$$f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx. \tag{1}$$

这是 f 在立方体 Q 上的平均值。假如

$$\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\,dx<\infty, \tag{2}$$

那么称 f 是有界平均振动函数(Bounded mean oscillation)，简记BMO；(2) 式中的sup是关于 $\mathbf{R}^n$ 中所有的边平行于坐标轴的立方体取的（本文以后简称为立方体）。函数类BMO首先由John—Nirenberg[1]所讨论，他们是为了研究偏微分方程的需要而引进的。近年来，BMO函数类在分析数学的各分支中找到了很广泛的应用[2]。最近，Коляда[3]对 $\mathbf{R}^1$ 中的BMO类，研究了它的某些性质。

设 f 是区间 (a,b) $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$ 上的局部可积函数。置

$$\mu(f;h)=\sup_{|I|=h}\frac{1}{|I|}\int_I|f(x)-f_I|\,dx\quad(h>0), \tag{3}$$

$$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(t)dt, \tag{4}$$

(3) 式中的sup是对 (a,b) 内一切长为 h 的闭区间 $I\subset(a,b)$ 取的。Коляда建立了：

定理A　设 f 是具有 2π 周期的可积函数，满足条件

$$\int_0^{2\pi}\mu(f;t)\frac{dt}{t}<\infty, \tag{5}$$

那么，f 的富里埃级数

$$\mathfrak{S}[f;x]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{6}$$

* 1980年12月16日收到。

均匀收敛。

本文第一个目的是，研究当$f\in C(0,2\pi)$（即f是具有2π周期的连续函数）时，如何用$\mu(f;h)$来保证f的富里埃级数均匀收敛。

定理 1 设$f\in C(0,2\pi)$，假如

$$\mu(f;t)=o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\qquad(t\to+0),\tag{7}$$

那么f的富里埃级数$\mathfrak{S}[f;x]$均匀收敛。

粗略地说，定理1的条件(7)似乎比定理A的相应条件(5)宽了一些；但定理1要求f为连续，这比定理A的相应条件要紧。那么能否把定理1的条件再放宽呢？我们有

定理 2 存在着$f_0\in L(0,2\pi)$（即f是具有2π周期的可积函数），满足条件

$$\mu(f_0;t)=o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\qquad(t\to+0),\tag{7'}$$

但f_0的富里埃级数$\mathfrak{S}[f_0;x]$并不均匀收敛。

定理 3 存在着$f_1\in C(0,2\pi)$，满足条件

$$\mu(f_1;t)=O\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\qquad(t\to+0),\tag{8}$$

但f_1的富里埃级数$\mathfrak{S}[f_1;x]$并不均匀收敛。

综合定理2及定理3，我们可以认为，定理1的条件在某种意义下是比较“接近”于充要条件了。

定理1还可以和经典的所谓Dini-Lipschitz条件相比较。我们知道[4]，当$f\in C(0,2\pi)$时，假如

$$\omega(f;\delta)=\max_{|x'-x''|<\delta}|f(x')-f(x'')|=o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\delta}}\right)\qquad(\delta\to+0),\tag{9}$$

那么f的富里埃级数$\mathfrak{S}[f;x]$均匀收敛。我们自然要问，Dini-Lipschitz条件(9)与定理1中的条件(7)有何关系？显然，对任意区间I，$|I|=\delta$，则

$$\frac{1}{|I|}\int_I|f(x)-f_I|\,dx\leqslant\frac{1}{|I|^2}\int_I\int_I|f(x)-f(y)|\,dxdy\leqslant\omega(f;\delta),\tag{10}$$

故

$$\mu(f;\delta)=\sup_{|I|=\delta}\frac{1}{|I|}\int_I|f(x)-f_I|\,dx\leqslant\omega(f;\delta).\tag{11}$$

另一方面，却成立着

定理4　存在着 $f\in C(0,1)$，满足条件(7)，但是不满足 Dini-Lipschitz 条件(9)，即

$$\omega(f_2;\delta)\neq o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\delta}}\right)\qquad(\delta\to 0).$$

本文第二个目的是，研究怎样从 $\mu(f;\delta)$ 的大小来估计 f 的富里埃系数

$$\begin{matrix}a_n(f)\\b_n(f)\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\begin{matrix}\cos nt\\\sin nt\end{matrix}dt. \tag{12}$$

我们证得如下结果。

定理5　设 $f\in L(0,2\pi)$，f 的积分连续模

$$\omega(f;\delta)_{L_1}=\sup_{|t|\leq\delta}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx, \tag{13}$$

那么

$$\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_1}=O\left(\mu\left(f;\frac{2\pi}{n}\right)\right)\qquad(n\to\infty). \tag{14}$$

定理6　设 $f\in L(0,2\pi)$，那么 f 的富里埃系数

$$\begin{matrix}a_n(f)\\b_n(f)\end{matrix}=O\left(\mu\left(f;\frac{1}{n}\right)\right)\qquad(n\to\infty). \tag{15}$$

参　考　文　献

〔1〕John F., & Nirenberg L., On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure and Appl. Math., 14(1961), 415—426.

〔2〕Fefferman C., & Stein E., H^p spaces of several variables, Acta Math., 129(1972), 137—193.

〔3〕Коляда В. И., О сушественной непрерывности суммируемых Функиий, Матем. сб., 108(1979), 326—349.

〔4〕Zygmund A., Trigonometric series, (1959), Cambridge.

Fourier Series for the Class of BMO Functions

By Wang Silei (王斯雷)

This note announces several theorems concerning the uniform convergence of Fourier series of BMO functions and the Fourier coefficients.