# 关于Opial—华氏不等式的注记*

何天晓　王寿城

（合肥工业大学）

## 1. 历史概述

设 $y(x)$ 是 $[0,a]$ 上的绝对连续函数，$y(0)=0$，那么成立着以下的 Opial[1]不等式：

$$\int_0^a |y(x)y'(x)|\,dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a |y'(x)|^2 dx; \tag{1}$$

并且等号成立的充要条件是 $y=bx$，$b$ 是常数。

华罗庚把（1）式推广了，证得下面的不等式[2]：

$$\int_0^a |y^l(x)y'(x)|\,dx \leqslant \frac{a^l}{l+1}\int_0^a |y'(x)|^{l+1} dx, \tag{2}$$

其中 $l$ 是正整数；并且(2)式等号成立的充要条件是 $y=bx$，$b$ 是常数。

侯明书[3]把（2）式推广为如下的不等式：设 $l$ 是正数，$n=[l]$，$l-n=p$，则

$$\int_0^a |y^l(x)y'(x)|\,dx \leqslant \frac{a^n}{n+1}\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^n\int_0^a |y^p(x)y'^{\,n+1}(x)|\,dx, \tag{3}$$

（3）虽然是（2）的推广，但是形式已发生了变化。

王斯雷[4]和梁肇基[5]不约而同地各自证得(2)式对一切 $l>0$ 都成立；并且式中等号成立的充要条件是 $y=bx$，$b$ 是常数，梁肇基还证得常数 $\frac{a^l}{l+1}$ 是最佳可能者。

## 2. 不等式的进一步推广

本文证得下述结果。

**定理**　设 $y(x)$ 是 $[0,a]$ 上的绝对连续函数，$y(0)=0$，$l$ 是正数，那么对任何 $\alpha_1$，$\alpha_2\in[0,a]$，$\alpha_1<\alpha_2$ 有

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |y(x)|^l|y'(x)|\,dx \leqslant \frac{\alpha_2^l}{l+1}\int_0^{\alpha_2}|y'(x)|^{l+1}dx-\frac{\alpha_1^l}{l+1}\int_0^{\alpha_1}|y'(x)|^{l+1}dx, \tag{4}$$

等号当且仅当 $y=bx$ 时成立，$b$ 为常数，并且不等式中的系数是最佳可能者。

**证明**　考察辅助函数

$$Y(t)=\frac{t^l}{l+1}\int_0^t|y'(x)|^{l+1}dx-\int_0^t|y(x)|^l|y'(x)|\,dx,$$

$Y(t)$ 是 $[0,a]$ 上的绝对连续函数，因而几乎处处存在着有限导数

* 1980年12月6日收到。

推荐者：徐利治（吉林大学数学系）。

$$Y'(t)=\frac{l}{l+1}t^{l-1}\int_0^t|y'(x)|^{l+1}dx+\frac{t^l}{l+1}|y'(t)|^{l+1}-|y(t)|^l|y'(t)|.$$

由Hölder不等式，可得

$$\int_0^t|y'(x)|^{l+1}dx\geqslant\frac{\left|\int_0^t y'(x)dx\right|^{l+1}}{t^l}=\frac{|y(t)|^{l+1}}{t^l}\quad(t>0),$$

所以在〔0,$a$〕上几乎处处有

$$\begin{aligned}Y'(t)&\geqslant\frac{l}{l+1}\frac{1}{t}|y(t)|^{l+1}+\frac{t^l}{l+1}|y'(t)|^{l+1}-|y(t)|^l|y'(t)|\\&=\frac{1}{t(l+1)}[l|y(t)|^{l+1}+t^{l+1}|y'(t)|^{l+1}-t(l+1)|y(t)|^l|y'(t)|]\\&=\frac{1}{t(l+1)}[l|y(t)|^l(|y(t)|-t|y'(t)|)+t|y'(t)|(t^l|y'(t)|^l-|y(t)|^l)]\\&=\begin{cases}\dfrac{l}{t(l+1)}\displaystyle\int_{t|y'(t)|}^{|y(t)|}[|y(t)|^l-t|y'(t)|x^{l-1}]dx\geqslant0 & \text{若}|y(t)|\geqslant t|y'(t)|;\\ \dfrac{l}{t(l+1)}\displaystyle\int_{|y(t)|}^{t|y'(t)|}[t|y'(t)|x^{l-1}-|y(t)|^l]dx\geqslant0 & \text{若}t|y'(t)|\geqslant|y(t)|,\end{cases}\end{aligned}$$

即$Y'(t)\geqslant0$在〔0，$a$〕上几乎处处成立，而$Y(t)$在〔0，$a$〕上又是连续的，故$Y(t)$在〔0，$a$〕上是单调增加的，对任何$a_1<a_2$，$a_1$，$a_2\in$〔0，$a$〕有$Y(a_2)\geqslant Y(a_1)$，整理后得（4）.

当$y=bx$，$b$为常数时，（4）中的等号成立。又由$a_1$，$a_2$的任意性及〔4〕、〔5〕的结果，可知（4）中的等号仅当$y=bx$时成立；并且不等式中的系数是最佳可能者.

## 参考文献

〔1〕Opial, Z., Ann. Polon Math., 8,29—32(1960).
〔2〕华罗庚，科学通报，3，251(1965).
〔3〕侯明书，科学通报，6，247(1979).
〔4〕王斯雷，科学通报，8，383(1980).
〔5〕梁肇基，华中师范学院学报，2，33—37(1980).

# A Note on Opial—Hua's Inequality

*By He Tianxiao*(何天晓)， *and Wang Shoucheng*(王寿城)

## Abstract

The following result has been proved: Let y(x) be absolutely continuous on 〔0, $a$〕 with $y(0)=0$. Then for every real $l>0$ and any numbers $\alpha$, $\beta$ with $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant a$ we have

$$\int_\alpha^\beta|y(x)|^l|y'(x)|dx\leqslant\frac{\beta^l}{l+1}\int_0^\beta|y'(x)|^{l+1}dx-\frac{\alpha^l}{l+1}\int_0^\alpha|y'(x)|^{l+1}dx.$$

This inequality is best possible and includes Opial-Hua's inequality and its generalization due to Wang and Liang as particular cases.