1981年4月 数学研究与评论 创刊

一类广义的复牛顿插值级数*

徐利治（吉林大学）
杨家新（大连工学院）
包雪松（南京大学）

I. 导 言

作者之一[1]曾于1978年引进一类实变量的广义牛顿插值级数。本文主要是研究定义于复域上的广义牛顿插值级数的收敛性问题。文中借助于两条引理证明了一个收敛性定理，而引理1包含着一个代数恒等式，它是构成证明中一个重要步骤的依据。

关于序列 $f(k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 的广义牛顿插值级数由如下的形式级数给出

$$S(f;\ z)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k+1}}{\psi(z,k+1)}\binom{z}{k}\Delta^k(\psi(z,k)f(z))_{z=0},\tag{1}$$

它满足插值条件

$$S(f;\ z)=f(z)\quad(z=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\tag{2}$$

此处 z 为复变量，$c_k=a_k+(k-1)b_k$，其中 $\{a_k\}_1^\infty$ 与 $\{b_k\}_1^\infty$ 为二任意给定的实数或复数序列使得

$$\psi(z,k)=\prod_{i=1}^{k}(a_i+b_iz)\neq 0\quad(z=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

$$\psi(z,\ 0)\equiv 1,$$

Δ是步长为1的普通差分运算，$\binom{z}{k}$是二项系数。

显然，级数 (1) 由三个序列 $\{a_k\}_1^\infty$，$\{b_k\}_1^\infty$ 和 $\{f(k)\}_0^\infty$ 唯一确定。借助于Gould和徐[2]的一个基本反演定理可以直接验证无论怎样给定序列 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 级数 (1) 总满足插值条件 (2)。特别，级数 (1) 的 $n+1$ 项部分和

$$S_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_{k+1}}{\psi(z,k+1)}\binom{z}{k}\Delta^k(\psi(z,\ k)f(z))_{z=0}$$

满足 $n+1$ 个插值条件

$$S_n(f;\ z)=f(z)\quad(z=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

* 1980年12月4日收到.

它们给出一类有理插值公式，其中差分 $G(z,k) \overset{def}{=\!=\!=} \Delta^k(\psi(z,\ k)f(z))$ 可由下述递推公式计算

$$G(z,\ k+1)=(a_{k+1}+b_{k+1}z)[G(z+1,\ k)-G(z,\ k)] + (k+1)b_{k+1}G(z+1,\ k)$$

和
$$G(z,\ 0)=f(z)\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

Ⅱ. 引理和定理

$S_n(f;\ z)$ 的插值性质可用以证明下述

引理 1. 对于每个非负整数 N，成立恒等式

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{c_{k+1}}{\psi(z,k+1)}\binom{z}{k}\Delta^k(\psi(z,\ k)f(z))_{z=0} = \frac{1}{\psi(z,N+1)}\sum_{k=0}^{N}\binom{z}{k}\Delta^k(\psi(z,N+1)f(z))_{z=0}. \qquad (3)$$

考察牛顿级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z-1}{k}\mathrm{F}_k(N), \qquad (4)$$

其中 $F_k(N)=\Delta^k(\psi(z,\ N+1)f(z))_{z=0}$。众所周知，级数(4)的收敛横标 λ_N 可以确定如下：

当 $\lambda_N\geqslant 0$ 时，
$$\lambda_N=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{\ln\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^kF_k(N)\right|}{\ln\ n}\right\};$$

当 $\lambda_N<0$ 时，
$$\lambda_N=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{\ln\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^kF_k(N)\right|}{\ln\ n}\right\}.$$

相应的 Dirichlet 级数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\mathrm{F}_k(N)/k^z. \qquad (5)$$

级数(4)和(5)均含有二变量 z 与 N ($N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)，且有相同的收敛横标 λ_N。

引理 2. 对每个固定的 z 而言，以 N 为变量的函数项级数(4)关于 N 的一致收敛性等价于级数(5)关于 N 的一致收敛性。

这个引理的证明方法类似于不含参变量 N 时级数(4)与(5)同时收敛的证明方法。

定理 1. 对于任意的在非负整数点上有定义的有理函数 $f(z)$，恒存在序列 $\{a_k\}_1^\infty$ 和 $\{b_k\}_1^\infty$ 使得 $S(f;z)=f(z)$。

这个定理可以利用引理 1 和代数学基本定理来证明。

定理 2. 设下述二条件被满足

(i) 给定 $\{a_k\}_1^\infty$ 和 $\{b_k\}_1^\infty$ 使得极限

$$\lim_{k\to\infty}\psi(z,k)=\Psi(z) \tag{6}$$

存在，此处 $\Psi(z)$ 是整函数，且 $\Psi(n)\neq 0$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$.

(ii) 实数或复数序列 $\{f(k)\}$ 使得相应的 $F_k(N)$ 满足条件

$$\lambda=\sup_N\{\lambda_N\}<+\infty, \tag{7}$$

其中 λ_N 是级数(4)的收敛横标. 则相应的广义牛顿插值级数(1)对半平面 $Re\,Z>\lambda-1$ 上的每一个使得 $\Psi(z)\neq 0$ 的点 z 都具有定点收敛性，且其和为

$$S(f;\ z)=\frac{1}{\Psi(z)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z}{k}\Delta^k(\Psi(z)f(z))_{z=0}. \tag{8}$$

显然，定理 2 蕴含了普通的牛顿插值级数的收敛条件，因为当 $a_k\equiv 1$ 和 $b_k\equiv 0$ 时级数(1)就约化为这种情形（实际上 $\lambda-1$ 就是该牛顿插值级数的收敛横标）.

Ⅲ. 收敛定理的证明

今略述证明如下. 我们考察级数(4)以替代下述级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z}{k}\Delta^k(\psi(z,N+1)f(z))_{z=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z}{k}F_k(N). \tag{9}$$

根据引理 2，为证明级数(4)关于 N 的一致收敛性只需证明级数(5)的一致收敛性即可. 现在我们把非负整数集合 $\mathbf{N}\equiv\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 分解为不相交的两个子集

$$\mathbf{N}^+\equiv\{N\,|\,\lambda_N\geqslant 0\},\qquad \mathbf{N}^-\equiv\{N\,|\,\lambda_N<0\}.$$

考察 $N\in\mathbf{N}^+$ 的情形. 给定每个 $\varepsilon>0$，利用条件 (ii) 和一点分析技巧可以证明存在一个与 m，n 和 N 无关的正常数 A，使得

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(-1)^kF_k(N)\Big/k^{\lambda+\varepsilon}\right|<A\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

至于 $N\in\mathbf{N}^-$ 的情形，可以类似地证得上述估计式. 由此可以断言级数(5)对所有的 $N\in\mathbf{N}$ 一致收敛，其中 z 是 $Re\,Z>\lambda$ 上任意的固定点. 从而级数(4)对所有的 $N\in\mathbf{N}$ 一致收敛. 因此，级数(9)就平面域 $Re\,Z>\lambda-1$ 上固定点 z 而言，亦对所有的 $N\in\mathbf{N}$ 一致收敛.

最后，设 z 是使得 $Re\,Z>\lambda-1$ 和 $\Psi(z)\neq 0$ 的点. 为完成证明，根据引理 1 和条件(i)，只需证明下列极限的存在性：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\binom{z}{k}F_k(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z}{k}\Delta^k(\Psi(z)f(z))_{z=0}.$$

实际上，这可由级数(9)的一致收敛性和利用熟知的二重极限换序定理证得.

推论. 设 $f(z)$ 是在左半平面 $Re\ Z<0$ 上有 m 个极点 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 的亚纯函数，且函数 $f(z)(t_1-z)\cdots(t_m-z)$ 的牛顿插值级数有有限的收敛横标 λ。则存在序列 $\{a_k\}_1^\infty$ 与 $\{b_k\}_1^\infty$ 使得函数 $f(z)$ 的广义牛顿插值级数在半平面 $Re\ Z>\lambda$ 上的每点 z 收敛.

实际上，只需选取 $a_k=t_k$, $b_k=-1(k=1, 2, \cdots, m)$ 和 $a_k\equiv 1$, $b_k\equiv 0(k>m)$，即可从定理2直接推出.

参考文献

[1] 徐利治，逼近论会议论文集(杭州)，(1978)，57—60.
[2] Gould, H. W., & Hsu, L. C., Duke Math. J. 40 (1973), 885—891.

A Class of Generalized Complex Newton Interpolation Series

By Xu Lizhi (Hsu, L. C. 徐利治), *Yang Jiaxin* (杨家新),
and Bao Xuesong (包雪松)

Abstract

This paper is concerned with the convergence of generalized complex Newton interpolation series of the form

$$S(f; z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k+1}}{\psi(z,k+1)}\binom{z}{k}\Delta^k(\psi(z, k)f(z))_{z=0}$$

where $c_k=a_k+(k-1)b_k$, and $\{a_k\}$ and $\{b_k\}$ are any two given sequences of numbers such that

$$\psi(z, k)=\prod_{i=1}^{k}(a_i+b_iz)\neq 0 \qquad (z=0, 1, 2, \cdots),$$

with $\psi(z, 0)\equiv 1$. That the series satisfies the interpolation condition $S(f; n)=f(n)$, $(n=0, 1, 2, \cdots)$ follows from the inverse series relations found by Gould and Hsu. A convergence theorem has been established by means of comparison with a certain Dirichlet series.