评《最优控制问题的计算方法》*

俞玉森

（华中工学院）

该书作者宫锡芳，1979年7月由科学出版社出版。

全书共八章，着重介绍了最优控制问题的计算方法，也阐明了有关的基本理论。在论述基本原理时，以古典的变分方法为基础，使读者比较容易理解；在叙述数值解法时又与多元函数极小值点的计算方法相对照，并注意到两者的有机联系，这种讲法很好。最后还讨论了收敛性和两点边值问题，使得计算方法在理论上和方法上都更加完善。这些都是本书的优点。但也有些美中不足之处，除了因排版出现的错误之外，还有几处是由于作者的疏忽而带来的问题，特此提出来供读者参考。

第三章§2.1(p33)标题是"固定终端时间 t_f 和固定终端状态 $X(t_f)$ 的情形"，从这一节正文中所讨论的情形来看，终端状态是自由的，而不是固定的(即 $\Delta X(t_f)\neq 0$)。因此应该把标题中"固定"二字改为"自由"。否则，就是文不对题了。

在pp37～38得到 $J(U^*(t))$ 的变分为

$$\delta J(U^*)=\left(\frac{\partial\varphi(X^*(t_f),t_f)}{\partial X(t_f)}-\lambda(t_f)\right)^T\delta X(t_f)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial H(t,X^*(t),U^*(t),\lambda(t))}{\partial X}+\dot{\lambda}(t)\right)^T\delta X(t)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial H(t,X^*(t),U^*(t),\lambda(t))}{\partial U}\right)^T\delta U(t)\right\}dt.$$

根据§1的变分原理，$U^*(t)$ 是最优控制的必要条件是指标泛函 $J(U^*)$ 的变分恒为零，即

$$\delta J(U^*)\equiv 0.$$

由于 $\delta X(t)$，$\delta U(t)$，$\delta X(t_f)$ 是任意变分，因此 $X^*(t)$，$U^*(t)$ 是最优控制问题(3.27)～(3.29)的最优解的必要条件是

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H(t,X^*(t),U^*(t),\lambda(t))}{\partial X}; \tag{3.48}$$

* 1981年1月8日收到。

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi(X^*(t_f),t_f)}{\partial X(t_f)};\tag{3.49}$$

$$\frac{\partial H(t,X^*(t),U^*(t),\lambda(t))}{\partial U}\equiv 0;\tag{3.50}$$

…….

这里说“$\delta X(t)$，$\delta U(t)$，$\delta X(t_f)$是任意变分”可就不对了．事实上，只有$\delta U(t)$是任意的，而$\delta X(t)$，$\delta X(t_f)$是与$\delta U(t)$有关的．(3.48)，(3.49)两式之所以能成立是因为$\lambda(t)$是待定的，我们可以选取$\lambda(t)$使它满足(3.48)与(3.49)．

同样，在§2.2(p42)(3.61)式下面也出现过类似的错误．

第三章§2.3(pp43～47)关于横截条件的推导．整个这一节的论述都有点显得零乱．本来应该先提终端约束条件

$$\Psi(X^*(t_f),t_f)=0,$$

然后研究在这一条件下的泛函

$$J(U^*)=\varphi(X^*(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}f_0(t,X^*(t),U^*(t))dt$$

的极小．为此可以先研究泛函

$$\hat{J}(U^*)=\phi(X^*(t_f),t_f)+\nu^T\Psi(X^*(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}f_0(t,X^*(t),U^*(t))dt$$

的极小，其中ν是待定的常向量．这个新的泛函可以写成如下的形式

$$\hat{J}(U^*)=\hat{\varphi}(X^*(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}f_0(t,X^*(t),U^*(t))dt,$$

它与泛函$J(U^*)$有着类似的形式，只要把$J(U^*)$中的$\varphi(X^*(t_f),t_f)$改写成$\hat{\varphi}(X^*(t_f),t_f)$就是了．因此，它们的变分也有类似的形式．所以，极值必要条件也是相类似的．差别就在于$\varphi(X^*(t_f),t_f)$换成了$\hat{\varphi}(X^*(t_f),t_f)$，而这只影响到$\lambda(t)$所应满足的终端条件，其余都不变．

原文先不提终端约束条件，而是突然提出用$\lambda(t)$乘$\delta X(t)$与$\delta U(t)$所应满足的微分方程，这就使读者感到莫明其妙了．

同样，在第四章§1也出现类似的问题．

第三章§2.4(p48)在总结中提到$\lambda(t)$应满足的终端条件

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi(X^*(t_f),t_f)}{\partial X(t_f)}+\left(\frac{\partial\Psi(X^*(t_f),t_f)}{\partial X}\right)^T\nu.$$

这是当$X^*(t_f)$受到约束$\Psi(X^*(t_f),t_f)=0$时的情形，而不是像书中所说的那样，当$X^*(t_f)$为固定时的情形．还有下面一个条件应该是

$$H(t,X^*(t),U^*(t),\lambda(t))=\begin{cases}\text{常数}, & \text{当}H\text{不显含}t\text{时},\\ 0, & \text{当}H,\varphi\text{都不显含}t\text{时},\end{cases}$$

而不是像书中所说的那样，由 t_f 固定或不固定来确定。

该书第三章所考虑的问题是当控制不受约束时的情形，可是§4例 3 却要求控制满足约束条件 $|u(t)|\leqslant 0.3$。与此相反，第四章所讨论的问题是当控制受到约束时的情形，而 §4 例 1 与例 2 都是控制不受约束的，应该把它们颠倒过来。

第四章 §4 例 3 的解法中有一个明显的错误。原文得到的共轭方程为

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1 = 0;\\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1,\end{cases}$$

取边界条件为

$$\lambda_1(t_f) = 0, \qquad \lambda_2(t_f) = 0.$$

如果这样的话，那末，很明显有

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_f,$$

这样一来，

$$u^*(t) = -\operatorname{sign}\lambda_2(t)$$

就无法确定了。

这个问题实际上是一个终端受约束的快速最优控制问题。终端约束条件为 $x_1(t_f) = 0$，因而终端约束函数为 $\Psi(X^*(t_f), t_f) = x_1(t_f)$，所以 $\lambda(t)$ 的终端条件应为

$$\lambda_1(t_f) = \nu, \qquad \lambda_2(t_f) = 0.$$

在这一条件下可得共轭方程的解为

$$\lambda_1(t_f) = \nu, \qquad \lambda_2(t_f) = \nu(t_f - t).$$

根据极小值原理，选取 $u^*(t)$ 使 H 达到极小值，因此得

$$u^*(t) = -\operatorname{sign}\lambda_2(t) = -\operatorname{sign}\nu(t_f - t) = \begin{cases}-1 & \nu > 0;\\ 1 & \nu < 0.\end{cases}$$

进一步还可求出最优轨线的方程如下：

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + \frac{3}{2}.$$

第四章 §1 推导极小值原理时，曾假定所有的控制 $U(t) \in U$，$t \in [t_0, t_f]$ 都是连续的（见 p. 64 第一行），这是不可能的。在这里至多只能假定它们是分段连续的。

该书由于排版所造成的错误较多，这里就不列举了。

以上意见供参考，请读者批评指正。