关于Γ-半环的Jacobson根*

徐忠明

（杭州大学）

作者在[1]中引进了一个比通常半环更广泛的代数系统Γ-半环，建立了它的Jacobson根与半根以及它们的某些性质．本文的目的是应用环论中的表示论观点来研究Γ-半环的Jacobson根．在§1我们叙述某些预备性的定义及有关命题；在§2通过Γ-半环的半模定义了Γ-半环的根，并证明了相应于(半)环论中的根的某些基本性质[4]；在§3叙述根的内部刻划，同时导出这里所定义的根与[1]中Γ-半环的Jacobson根与半根的一致性(见定理3.2)．

§1. 预备知识

设S是个Γ-半环[1]，又设A，B是S的子集，Θ是Γ的子集时，引用记号

$$A\Theta B\equiv\{\sum_i a_i\delta_i b_i \mid a_i\in A,\ \delta_i\in\Theta,\ b_i\in B\}.^{*)}$$

若$A\equiv\{a\}$，则记$\{a\}\Theta B\equiv a\Theta B$．S的一个子集I称为Γ-半环S的一个右理想，如果它满足：1) $i_1+i_2\in I$，$\forall i_1,\ i_2\in I$，2) S的零元$0\in I$，3) $ias\in I$，$\forall i\in I$，$\alpha\in\Gamma$，$s\in S$．一个右理想I如果又满足4) $x+i_1=i_2(i_1,\ i_2\in I)$蕴含$x\in I$,则称I为$k$-右理想。一个右理想I如果又满足4′) $x+i_1+z=i_2+z(i_1,\ i_2\in I,\ z\in S)$蕴含$x\in I$，则称I为$h$-右理想．显见，在加法可消Γ-半环中，$k$-右理想与$h$-右理想一致；在Γ-环中右理想与$k$-[$h$-]右理想是一致的．

对左[k-、h-]、双边[k-、h-]理想等有关概念，可以与半环中一样作类似的定义[3]．

设I是Γ-半环S的理想，S中的两个元素s_1与s_2说是关于模I的Bourne同余（记为$s_1\equiv s_2(mod\,I)$）当且仅当有$i_1,\ i_2\in I$，使$s_1+i_1=s_2+i_2$成立[3]；S中两个元素s_1与s_2说是关于模S的Iizuka同余（记为$s_1[\equiv]s_2(mod\,I)$）当且仅当有$i_1,\ i_2\in I$，$z\in S$，使$s_1+i_1+z=s_2+i_2+z$成立[3]．这两种同余关系均是等价关系，按惯常的方法，将它们所得的同余类全体分别组成新的Γ-半环，分别记为S/I与$S[/]I$：

$$S/I\equiv\{\bar{x}\mid x\in S\},\quad \bar{x}\equiv\{y\in S\mid y\equiv x(mod\,I)\}\equiv\{y\in S\mid y+i_1=x+i_2,\ \exists i_1,\ i_2\in I\},$$

$$S[/]I\equiv\{\widehat{x}\mid x\in S\},\quad \widehat{x}\equiv\{y\in S\mid y[\equiv]x(mod\,I)\}\equiv\{y\in S\mid y+i_1+z=x+i_2+z,\ \exists i_1,\ i_2\in I,\ z\in S\}.$$

*1981年4月29日收到．

*) 其中“$\sum_i$”是指对i的有限和．下同．

它们的运算分别规定为：$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$，$\bar{x}\alpha\bar{y}=\overline{x\alpha y}$与$\hat{x}+\hat{y}=\widehat{x+y}$，$\hat{x}\alpha\hat{y}=\widehat{x\alpha y}$*．Γ- 半环$S[/]I$是加法可消的．置$\overline{I}\equiv\{x\in S\,|x\equiv 0(mod I)\}$，$\hat{I}\equiv\{x\in S|\,x[\equiv]0(mod\,I)\}$．显见，若 I 是 S 的理想，则$\overline{I}$与$\hat{I}$分别是 S 的$k$-理想与$h$-理想，且 Γ- 半环$S/I$的零元$\overline{0}=\overline{I}$，Γ-半环$S[/]I$的零元$\hat{0}=\hat{I}$．此外，$S/I=S/\overline{I}$，$S[/]I=S[/]\hat{I}$．

定义1.1　S 的一个右理想 I 称为右半正则的，如果任取元素偶$i_1, i_2\in I$，对每个$\alpha\in\Gamma$，存在j_1，$j_2\in I$，使得

$$i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1 \tag{1}$$

成立，S 的一个右理想 I 称为右拟正则的，如果任取元素i_1，$i_2\in I$，对每个$\alpha\in\Gamma$，存在j_1，$j_2\in S$，使得(1)式成立．

类似地，可定义左半正则、左拟正则左理想等有关概念．

定义1.2　S 的 Jacobson 根，记为J(S)，是 S 的所有右[左]半正则右[左]理想之和；S 的半根，记为σ(S)，是 S 中极大的右拟正则右理想．

命题1.1　J(S) 与σ(S) 均是 S 的k- 理想(见[1] 的定理 4.14 与定理 5.8)．

同Γ- 环[2]一样，若S_i是Γ- 半环$i=1，2$，则映射序对 $(\theta，\varphi)$，称为S_1到S_2的一个Γ- 同态，如果它满足：

（1）θ是S_1到S_2的一个半群同态，

（2）φ是Γ到Γ上的一个半群同构，

（3）$\theta(x\alpha y)=(\theta x)(\varphi\alpha)(\theta y)$，$\forall x, y\in S_1$，$\alpha\in\Gamma$．

该Γ- 同态的核为$K\equiv\{x\in S_1\,|\theta x=0\}$，或$K\equiv\theta^{-1}(0)$，显见，$K$是$S_1$的$k$- 理想；当$S_2$是加法可消$\Gamma$- 半环时，则$K$是$S_1$的$h$- 理想．若$\theta S_1=S_2$，则称$(\theta，\varphi)$是$S_1$到$S_2$上的$\Gamma$-(满)同态；若$(\theta，\varphi)$是$S_1$到$S_2$上的$\Gamma$- 同态，且$k=(0)$，则称$(\theta，\varphi)$是$S_1$到$S_2$上的$\Gamma$- 半同构；若$(\theta，\varphi)$是$S_1$到$S_2$上的$\Gamma$- 同态且是$1-1$的，则称$(\theta，\varphi)$是$S_1$到$S_2$上的$\Gamma$- 同构．下文中常用的是：$\varphi$是$\Gamma$的恒等半群同构$\iota$，此时$(\theta，\iota)$简记为$\theta$．

显见，若θ是Γ- 半环 S 到Γ- 半环S'上的一个Γ- 同态，其同态核为K，则Γ- 半环S/K与Γ- 半环S'是Γ- 半同构的；又若Γ- 半环S'是加法可消的，则Γ- 半环$S[/]K$与Γ- 半环S'是Γ- 半同构的．

定义1.3　带零元的 Abel 加半群M称Γ- 半环的右半模，如果有$M\times\Gamma\times S$到M的一个合成($(m，\alpha，x)$简记为$m\alpha x$)且满足：

（1）$(m_1+m_2)\alpha x=m_1\alpha+m_2\alpha x$，$m(\alpha+\beta)x=m\alpha x+m\beta x$，$m\alpha(x+y)=m\alpha x+m\alpha y$，

（2）$(m\alpha x)\beta y=m\alpha(x\beta y)$，

（3）m，α，x中有零元，蕴含$m\alpha x=0$，$\forall x, y\in S$，α，$\beta\in\Gamma$，m，m_1，$m_2\in M$．

类似地可定义S的左半模．下文中的半模，除特别说明外，均指右半模．Γ- 半环S的(右)半模简记为$S\Gamma$- 半模．当 M 是加法可消时，则称 M 为 S 的表示半模，简记为$S\Gamma$-表示半模．

*）显然这些运算的规定与$\bar{x}$，$\bar{y}$或$\hat{x}$，$\hat{y}$，的代表元选取无关．

例　若A是S的[右]理想，则A是$S\Gamma$-半模；$\bar{S}\equiv S/A$在定义$\bar{x}\alpha s=x\alpha s$，$\forall x, s\in S$，$\alpha\in\Gamma$下，$\bar{S}$是$S\Gamma$-半模；$\widehat{S}\equiv S[/]A$　在定义$\widehat{x}\alpha s=x\alpha s$，$\forall x, s\in S$，$\alpha\in\Gamma$下，$\widehat{S}$是$S\Gamma$-表示半模，等等。

$S\Gamma$-半模M的一个带零元的子集N，若满足：1）$n_1+n_2\in N$（$n_1, n_2\in N$），2）$n\alpha s\in N$（$n\in N$，$\alpha\in\Gamma$，$s\in S$），则称N为$S\Gamma$-半模M的子半模，简记为$S\Gamma$-子半模。同理想一样，可以定义$S\Gamma$-k子半模，$S\Gamma$-h子半模等有关概念。把S看作$S\Gamma$-半模时，S的非空子集I是右理想的充要条件为：I是$S\Gamma$-半模S的$S\Gamma$-子半模。

若M与M'均是$S\Gamma$-半模，它们之间有一个映射φ：$m\longmapsto m'\in M'$，$\forall m\in M$，且满足：1）$\varphi(m_1+m_2)=\varphi m_1+\varphi m_2$；2）$\varphi 0=0'$（0与$0'$分别表示M与$M'$的零元）；3）$\varphi(m\alpha x)=(\varphi m)\alpha x$，$\forall m\in M$，$\alpha\in\Gamma$，$x\in S$；则称$\varphi$是M到$M'$的$\Gamma$-半模同态（简称$\Gamma$-同态）。同$\Gamma$-半环的同态一样，可以定义$\Gamma$-半同构与$\Gamma$-同构等有关概念：

定义1.4　$S\Gamma$-半模M的一个等价关系ρ说是线性的，如果它对$x, y, u, v\in M$满足：

1）$x\rho y$与$u\rho v$蕴含$(x+u)\rho(y+v)$，

2）$x\rho y$蕴含$(x\alpha s)\rho(y\alpha s)$，$\forall\alpha\in\Gamma$，$s\in S$；

一个线性等价关系ρ说是加法可消的（以下简称为线性可消等价关系），如果它满足

3）$(x+u)\rho(y+v)$与$x\rho y$蕴含$u\rho v$。

一个线性等价关系是加法可消的充要条件是

3′）$(x+z)\rho(y+z)$蕴含$x\rho y$。

设φ是$S\Gamma$-半模M到$S\Gamma$半模M'的一个Γ-同态，显然，关系"$\varphi(x)=\varphi(y)$"就是$S\Gamma$-半模M中的一个线性等价关系；当M'是$S\Gamma$-表示半模时，该关系就是一个线性可消等价关系。

用$\mathscr{E}(M)$记$S\Gamma$-表示半模M的所有线性等价关系的集合。设ρ_α，$\rho_\beta\in\mathscr{E}(M)$，如果$y\rho_\alpha z$蕴含$y\rho_\beta z(y, z\in M)$，则说$\rho_\alpha\leqslant\rho_\beta$。如果$\rho_\alpha\leqslant\rho_\beta$且$\rho_\alpha\neq\rho_\beta$则说$\rho_\alpha<\rho_\beta$。显见，关系

ρ_1：$y\rho_1 z$，$\forall y, z\in M$，

与　ρ_0：$y\rho_0 z$当且仅当$y=z$。

在$\mathscr{E}(M)$中，且ρ_1是线性可消的。这样（$\mathscr{E}(M)$，$\geqslant$）是一个格，其最大元是ρ_1，最小元是ρ_0。$\mathscr{E}(M)$中一个线性可消等价关系$\rho(\neq\rho_1)$说是极大的，如果有线性可消等价关系$\xi>\rho$，则$\xi=\rho_1$。

§2. 既约$S\Gamma$-表示半模与Γ-半环的根

定义2.1　$S\Gamma$-半模M称为半既约的，如果$M\Gamma S\neq(0)$且M没有真的$S\Gamma$-k子半模；$S\Gamma$-半模M称为既约的，如果任取元素偶u_1，$u_2\in M$且$u_1\neq u_2$，对每个$x\in M$，$\exists\alpha_i$，$\beta_j\in\Gamma$，a_i，$b_j\in S$，有等式

$$x+\sum_i u_1\alpha_i a_i+\sum_j u_2\beta_j b_j=\sum_j u_1\beta_j b_j+\sum_i u_2\alpha_i a_i{}^{*}. \tag{2}$$

*）"$\exists\alpha_i, \beta_j\in\Gamma$，$a_i$，$b_j\in S$，有等式$x+\sum_i u_1\alpha_i a_i+\sum_j u_2\beta_j b_j=\sum_j u_1\beta_j b_j+\sum_i u_2\alpha_i a_i$"意指"$\exists\alpha_i$，$\beta_j\in\Gamma$，$a_i$，$b_j\in S$，$i=1, 2\cdots, k$，$j=1, 2, \cdots, l$，有等式$x+\sum_{i=1}^{k}u_1\alpha_i a_i+\sum_{j=1}^{l}u_2\beta_j b_j=\sum_{j=1}^{l}u_1\beta_j b_j+\sum_{i=1}^{k}u_2\alpha_i a_i$，其中$k$，$l$是某两个（有限）正整数。"往后遇到此写法时，均是此意。

引理2.1 设B是S的一个理想，M是$S\Gamma$-表示半模，且$M\Gamma B\neq(0)$，

1）若M是半既约的，且$u\in M$，则$u=0$当且仅当$u\Gamma B=(0)$。

2）若M是既约的，且u，$v\in M$，则$u=v$当且仅当$\sum_i u\gamma_i b_i=\sum_i v\gamma_i b_i$，$\forall\gamma_i\in\Gamma$，$b_i\in B$。

证明 1）设M是半既约的，置$M_0\equiv\{y\in M|\ y\Gamma B=(0)\}$。显见$M_0$是$S\Gamma$-$k$子半模。因$M\Gamma B\neq(0)$，故$M_0\neq M$，于是$M_0=(0)$，$u=0$。反之显然。

2）设M是既约的，且$u\neq v$。因$M\Gamma S\neq(0)$，故有$m\in M$，$\alpha\in\Gamma$，$b\in B$，使$m\alpha b\neq0$。对此$m\neq0$。有α_i，$\beta_j\in\Gamma$，x_i,$y_j\in S$，使

$$m+\sum_i u\alpha_i x_i+\sum_j v\beta_j y_j=\sum_j u_1\beta_j y_j+\sum_i u_2\alpha_i x_i$$

成立。两边"右乘αb"，得

$$m\alpha b+\sum_i u\alpha_i(x_i\alpha b)+\sum_j v\beta_j(y_j\alpha b)=\sum_j u_1\beta_j(y_j\alpha b)+\sum_i u_2\alpha_j(x_i\alpha b)$$

因$b_i\equiv x_i\alpha b\in B$与$b'_j\equiv y_j\alpha b\in B$，$m\alpha b\neq0$且M是加法可消的，故至少有一个，比如$b_i\in B$，使$\sum_i u\alpha_i b_i\neq\sum_i v\alpha_i b_i$。于是当$\sum_i u\alpha_i b_i=\sum_i v\alpha_i b_i$，$\forall\alpha_i\in\Gamma$，$b_i\in B$时，有$u=v$。反之显然。

易得

引理2.2 非零$S\Gamma$-表示半模M是半既约的充要条件是对每个非零元$u\in M$，使$\overline{u\Gamma S}=M$，即任给非零元$u\in M$，对每个$m\in M$，$\exists\alpha_i$，$\beta_j\in\Gamma$，a_i，$b_j\in S$，使

$$m+\sum_i u\alpha_i a_i=\sum_j u\beta_j b_j \tag{3}$$

成立。

引理2.2也可叙述为：

引理2.2′ 非零的$S\Gamma$-表示半模M是半既约的充要条件是对每个非零元$u\in M$，$\exists\alpha\in\Gamma$，使$\overline{u\alpha S}=M$即任给非零元$u\in M$，对每个$x\in M$，$\exists\alpha\in\Gamma$，s_1，$s_2\in S$，使

$$x+u\alpha s_1=u\alpha s_2. \tag{3′}$$

成立。

设M是既约的$S\Gamma$-表示半模，若在(2)中取$u_2=0$，$u_1=u\neq0$，则得(3)，故有

推论 若$S\Gamma$-表示半模是既约的，则它也是半既约的。

利用前述，又可得

推论 若M是[半]既约$S\Gamma$-表示半模，则任意非零$S\Gamma$-子半模也是[半]既约的。

关于$S\Gamma$-表示半模M，任取$\alpha_i\in\Gamma$，$a_i\in S$，$i=1, 2, \cdots l$，其中l为任意自然数，显见映射$\varphi(\sum_i\alpha_i a_i)$：

$$m\longmapsto\sum_i m\alpha_i a_i,\quad\forall m\in M，\text{即}\ \varphi(\sum_i\alpha_i a_i)\,m=\sum_i m\alpha_i a_i$$

是M到它自身的一个同态。所有这些同态的集合记为$(S,M)\equiv\varphi$，在规定

$$\varphi(\sum_i\alpha_i a_i)+\varphi(\sum_j\beta_j b_j)=\varphi(\sum_i\alpha_i a_i+\sum_j\beta_j b_j)$$

$$\varphi(\sum_i\alpha_i a_i)\cdot\varphi(\sum_j\beta_j b_j)=\varphi(\sum_{i,j}\alpha_i(a_i\beta_j b_j))$$

下，组成一个半环$(S,M)\equiv\varphi\equiv\{\varphi(\sum_i\alpha_i a_i)\,|\alpha_i\in\Gamma,\ a_i\in S\}$，且是加法可消的。

引理2.3 设B是S的一个理想，

1）若M是[半]既约的$S\Gamma$-表示半模，则或$M\Gamma B=(0)$或M是[半]既约$B\Gamma$-表示半模。

2）若M是既约的$B\Gamma$-表示半模，则存在$S\Gamma$-表示半模M'是既约的。

证明 1）先设M是半既约的$S\Gamma$-表示半模，假定$M\Gamma B\neq(0)$，则在M中有$u\neq0$，使$u\beta b\neq0$ $(\beta\in\Gamma.\ b\in B)$，对任何$x\in M$，$\exists\alpha_i,\gamma_j\in\Gamma$，$a_i$，$c_j\in S$，使$x+\sum_i(u\beta b)\alpha_i a_i=\sum_j(u\beta b)\gamma_j c_j$，即$x+u\beta(\sum_i b\alpha_i a_i)=u\beta(\sum_j b\gamma_j c_j)$，而$\sum_i b\alpha_i a_i\in B$，$\sum_j b\gamma_j c_j\in B$，据引理2.2′，知M是半既约的$B\Gamma$-表示半模。

其次，设M是既约的$S\Gamma$-表示半模，易见M是$B\Gamma$-表示半模，任给u，$v\in M$且$u\neq v$，则由引理2.1，有$\sum_i u\beta_i b_i\neq\sum_i v\beta_i b_i(\beta_i\in\Gamma,\ b_i\in B)$，从而对任何$x\in M$，$\exists\alpha_j$，$\gamma_k\in\Gamma$，$a_j$，$c_k\in S$，使

$$x+\sum_j(\sum_i u\beta_i b_i)\alpha_j a_j+\sum_k(\sum_i v\beta_i b_i)\gamma_k c_k=\sum_k(\sum_i u\beta_i b_i)\gamma_k c_k+\sum_j(\sum_i v\beta_i b_i)\alpha_j a_j,$$

即

$$x+\sum_i u\beta_i(\sum_j b_i\alpha_j a_j)+\sum_i v\beta_i(\sum_k b_i\gamma_k c_k)=\sum_i u\beta_i(\sum_k b_i\gamma_k c_k)+\sum_i v\beta_i(\sum_j b_i\alpha_j a_j)$$

而$\sum_j b_i\alpha_j a_j\in B$，$\sum_k b_i\gamma_k c_k\in B$。故依定义，M是既约的$B\Gamma$-表示半模。

2）设M是既约的$S\Gamma$-表示半模，$N\neq(0)$是M的任意$S\Gamma$-子半模（从而是既约的），记$(S,M)\equiv\{\varphi(\sum_i\alpha_i a_i)\,|\,\alpha_i\in\Gamma,\ a_i\in S\}$ $(S,N)\equiv\{\psi(\sum_j\alpha_j a_j)\,|\,\alpha_j\in\Gamma,a_j\in S\}$，作对应

$$\varphi(\sum_i\alpha_i a_i)\longleftrightarrow\psi(\sum_i\alpha_i a_i) \tag{4}$$

即

$$\sum_i m\alpha_i a_i\longleftrightarrow\sum_i n\alpha_i a_i,$$

其中$m\in M$，$n\in N$，$\alpha_i\in\Gamma$，$a_i\in S$。显见，该对应是(S,M)到(S,N)间的一个同态。下面证它是一个同构，只须证该对应是1—1的。

若有$\psi(\sum_i\alpha_i a_i)=\psi(\sum_j\beta_j b_j)$，即

$$\sum_i n\alpha_i a_i=\sum_j n\beta_j b_j,\quad\forall n\in N. \tag{5}$$

设非零元$v\in N$，对任意的$u\in M$，$\exists\delta_\lambda$，$\gamma_\mu\in\Gamma$，x_λ，$y_\mu\in S$，使得

$$u+\sum_\lambda v\delta_\lambda x_\lambda=\sum_\mu v\gamma_\mu y_\mu.$$

因此，有

$$\sum_i u\alpha_i a_i+\sum_i(\sum_\lambda v\delta_\lambda x_\lambda)\alpha_i a_i=\sum_i(\sum_\mu v\gamma_\mu y_\mu)\alpha_i a_i,$$

与

$$\sum_j(\sum_\mu v\gamma_\mu y_\mu)\beta_j b_j=\sum_j u\beta_j b_j+\sum_j(\sum_\lambda v\delta_\lambda x_\lambda)\beta_j b_j,$$

将上面两式相加得

$$\sum_i u\alpha_i a_i+\sum_i(\sum_\lambda v\delta_\lambda x_\lambda)\alpha_i a_i+\sum_j(\sum_\mu v\gamma_\mu y_\mu)\beta_j b_j$$
$$=\sum_j u\beta_j b_j+\sum_i(\sum_\mu v\gamma_\mu y_\mu)\alpha_i a_i+\sum_j(\sum_\lambda v\delta_\lambda x_\lambda)\beta_j b_j.$$

因 $\sum_i(\sum_\lambda v\delta_\lambda x_\lambda)\alpha_i a_i=\sum_j(\sum_\lambda v\delta_\lambda x_\lambda)\beta_j b_j$，与$\sum_i(\sum_\mu v\gamma_\mu y_\mu)\alpha_i a_i=\sum_j(\sum_\mu v\gamma_\mu y_\mu)\beta_j b_j$. 故$\sum_i u\alpha_i a_i=\sum_j u\beta_j b_j$，由 u 在M中的任意性，知 $\varphi(\sum_i\alpha_i a_i)=\varphi(\sum_j\beta_j b_j)$. 这就表明对应（4）是1—1的同态. 故$(S, M)$与$(S, N)$同构.

设M是既约的$B\Gamma$-表示半模，由引理2.2′的推论，$N\equiv M\Gamma B\neq(0)$是既约的$B\Gamma$-表示半模，从而(B, M)与(B, N)同构.

若对u_i，$u'_j\in M$，α_i，$\alpha'_j\in\Gamma$，b_i，$b'_j\in B$ 有$\sum_i u_i\alpha_i a_i=\sum_j u'_j\alpha'_j b'_j$，则对任意的$\beta_\lambda$，$\gamma_\mu\in\Gamma$，$a_\lambda\in S$，$b''_\mu\in B$，

$$\sum_\mu[\sum_i u_i\alpha_i(\sum_\lambda b_i\beta_\lambda a_\lambda)]\gamma_\mu b''_\mu=\sum_\lambda(\sum_i u_i\alpha_i b_i)\beta_\lambda(\sum_\mu a_\lambda\gamma_\mu b''_\mu)$$
$$=\sum_\mu[\sum_j u'_j\alpha'_j(\sum_\lambda b'_j\beta_\lambda a_\lambda)]\gamma_\mu b''_\mu.$$

因$\sum_\lambda b_i\beta_\lambda a_\lambda\in B$，$\sum_\lambda b'_j\beta_\lambda a_\lambda\in B$且利用引理2.1的2)，得

$$\sum_i u_i\alpha_i(\sum_\lambda b_i\beta_\lambda a_\lambda)=\sum_j u'_j\alpha'_j(\sum_\lambda b'_j\beta_\lambda a_\lambda)$$

即
$$\sum_\lambda(\sum_i u_i\alpha_i b_i)\beta_\lambda a_\lambda=\sum_\lambda(\sum_j u'_j\alpha'_j b'_j)\beta_\lambda a_\lambda$$

在规定$\sum_\lambda(\sum_i u_i\alpha_i b_i)\beta_\lambda a_\lambda\equiv\sum_i u_i\alpha_i(\sum_\lambda b_i\beta_\lambda a_\lambda)$(其中$u_i\in M$，$b_i\in B$，$a_\lambda\in S$，$\alpha_i$，$\beta_\lambda\in\Gamma$)下，我们就能定义$N\times\Gamma\times S$到N内的合成. 易见，N关于此合成组成了$S\Gamma$-表示半模$M'$. 把$M'$作为$B\Gamma$-表示半模是同构于$B\Gamma$-表示半模N的，显然，$M'$作为$S\Gamma$-表示半模是既约的.

同Γ-环一样，设$S\Gamma$-表示半模M，集合$A(M)\equiv\{y\in S|M\Gamma y=(0)\}$称为$S\Gamma$-表示半模M的零化子. 显然它是S的$k$-理想与$h$-理想.

引理4.2 设非零的M是$S\Gamma$-表示半模，S的理想$I\subseteq A(M)$，则M是[半]既约的$S\Gamma$-表示半模当且仅当M是[半]既约的$\bar{S}\Gamma$-表示半模，其中$\bar{S}\equiv S/I$.

证明 先设$S\Gamma$-表示半模M是既约的，理想$I\subseteq A(M)$，$\bar{S}\equiv\{\bar{a}\mid a\in S\}$，$\bar{a}\equiv\{x\in S|x\equiv a(modI)\}$，则若规定$m\alpha\bar{a}=m\alpha a$，$\forall m\in M$，$\alpha\in\Gamma$，$a\in S$. 易见，此运算与同余类$\bar{a}$的代表元选取无关，且使M成为$\bar{S}\Gamma$-表示半模. 显然，$\bar{S}\Gamma$-表示半模M是既约的.

反之，设I是S的理想，M是既约的$\bar{S}\Gamma$-表示半模，若规定$m\alpha a=m\alpha\bar{a}$，$\forall m\in M$，$\alpha\in\Gamma$，$a\in\Gamma$，$a\in S$. 则关于此运算，M成为$S\Gamma$-表示半模，I含在$S\Gamma$-表示半模M的零化子$A(M)$里且$S\Gamma$-表示半模是既约的. 事实上，因M作为$\bar{S}\Gamma$-表示半模是既约的，即对任意的u_1，$u_2\in M(u_1\neq u_2)$及每个$x\in M$，$\exists\alpha_i$，$\beta_j\in\Gamma$，a_i，$b_j\in S$，使

$$x+\sum_i u_1\alpha_i\bar{a}_i+\sum_j u_2\beta_j\bar{b}_j=\sum_j u_1\beta_j\bar{b}_j+\sum_i u_2\alpha_i\bar{a}_i$$

成立。若 $\overline{a'_i}=\overline{a_i}$ 与 $\overline{b'_j}=\overline{b_j}$，即

$$a'_i+l_{1i}=a_i+l_{2i} \text{ 与 } b'_j+k_{1j}=b_j+k_{2j}$$

$$(l_{\lambda i},\ k_{\lambda j}\in I\subseteq A(M),\ \lambda=1,\ 2.)$$

注意到，$\sum_i u_\lambda\alpha_i a'_i=\sum_i u_\lambda\alpha_i a_i$ 与 $\sum_j u_\lambda\beta_j b'_j=\sum_j u_\lambda\beta_j b_j$，$\lambda=1,\ 2$，则有 $x+\sum_i u_1\alpha_i a_i+\sum_j u_2\beta_j b_j=\sum_j u_1\beta_j b_j+\sum_i u_2\alpha_i a_i$。即 $S\Gamma$- 表示半模M是既约的。

类似可证半既约性的命题。

上面引理中，$\bar{S}\equiv S/I$ 代之以 $\hat{S}\equiv S[/]I\equiv\{\hat{a}\ |a\in S\}$（$\hat{a}\equiv\{x\in S\ |x[\equiv]a(\bmod I)\}$），引理也成立。

定义2.2　$S\Gamma$- 表示半模 M 称为是忠实的，如果 S 的广零 $Z(S)\equiv\{x\in S|\ \exists z\in S$，使 $x+z=z\}=A(M)$；Γ-半环 S 称为本原的，如果它有忠实既约的 $S\Gamma$-表示半模；S 的理想 B 称为本原的，如果 S/B 是本原的 Γ- 半环。

显见，B 是 S 里的本原理想当且仅当 $\hat{B}$ 也是。

引理2.5　设M是 $S\Gamma$- 表示半模，则M是忠实的 $\bar{S}\Gamma$- 表示半模，其中 $\bar{S}\equiv S/A(M)$。

证明　在规定 $m\alpha\bar{x}=m\alpha x$，$\forall m\in M$，$\alpha\in\Gamma$，$x\in S$ 下，M成为 $\bar{S}\Gamma$- 表示半模。由 $m\alpha\bar{x}=0$，$\forall m\in M$，$\alpha\in\Gamma$，得 $m\alpha x=0$，$\forall m\in M$，$\alpha\in\Gamma$。故 x 在 $S\Gamma$- 表示半模 M 的零化子 $A(M)$ 中，即只有 $\bar{S}$ 的零元 $\bar{0}=A(M)$ 零化 $\bar{S}\Gamma$-表示半模 M。

引理2.6　设M是既约$S\Gamma$-表示半模，则 B 是 S 的h-本原理想的充要条件是 $B=A(M)$。

证明　设 B 是 S 的h- 本原理想，则 $\bar{S}\equiv S/B$ 是本原 Γ- 半环，即 $\bar{S}$ 有忠实既约的 $\bar{S}\Gamma$- 表示半模 M。由引理 2.4 知 M 是既约的 $S\Gamma$- 表示半模。设 $a\in A(M)$，则 $M\Gamma\bar{a}=(0)$（$\bar{a}\in\bar{S}$）。因M对 Γ- 半环 $\bar{S}$ 是忠实的，故 $\bar{a}=\bar{0}$，即 $a\in B$ 或 $A(M)\subseteq B$。另一方面，显见 $B\subseteq A(M)$。于是 $B=A(M)$。

反之，设M是既约的 $S\Gamma$- 表示半模且 $B=A(M)$ 由引理 2.4 与引理 2.5，知M是忠实既约的 $\bar{S}\Gamma$- 表示半模。于是 B 是 S 的 h- 本原理想。

定义2.3　设$\mathscr{C}$是Γ-半环 S 的所有既约的$S\Gamma$- 表示半模的集合，$\bigcap_{M\in\mathscr{C}}A(M)$称为 S 的根，记为 $R(S)$或简记为R；若$\mathscr{C}=\phi$（空集），则 $R=S$，此时称 S 为根半环；若 $R=(0)$，则称S 为半单的。

显然 S 的广零 $Z(S)\subseteq R$。

由引理 2.6 得

定理2.1　当 Γ- 半环 S 不是根半环时，其根 $R=\bigcap_{B\in\mathscr{C}'}B$，$\mathscr{C}'$是 S 的所有 h- 本原理想的集合。

定理2.2　R 是 S 的 [h-] k-理想，即 $\bar{R}=R$ [$\hat{R}=R$]。

证明　显见R是S的理想。任取$M\in\mathscr{C}$，则对 $r\in\hat{R}$，$\exists r_1$，$r_2\in R$，$s\in S$，使 $r+r_1+s=r_2+s$。于是

$$m\alpha r+m\alpha r_1+m\alpha s=m\alpha r_2+m\alpha s,\quad \forall m\in M,\ \alpha\in\Gamma.$$

因 $R\subseteq A(M)$ 且M是加法可消，故 $m\alpha r=0$，$\forall m\in M$，$\alpha\in\Gamma$，即 $r\in A(M)$。因M的任意性，故 $r\in\bigcap_{M\in\mathscr{P}}A(M)\equiv R$，即 $\widehat{R}=R$。同样可证 $\overline{R}=R$。

由引理2.3易得

定理2.3 若B是S的理想，则Γ-半环B的根 $R(B)=B\cap R(S)$。

推论 S的根R是一个根半环。

定理2.4 设R是S的根，则 S/R与 $S[/]R$ 均为半单的 Γ-半环。

证明 令$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$是S的所有既约$S\Gamma$-表示半模，$R(S)\equiv\bigcap_{\lambda\in\Omega}A(M_\lambda)$，于是$R(S)\subseteq A(M_\lambda)$，$\forall\lambda\in\Omega$。记 $\bar{S}\equiv S/R(S)$，则依定理2.4，M_λ 均是 $\bar{S}$ 的既约 $\bar{S}\Gamma$-表示半模，且 $\bar{S}\Gamma$-表示半模 M_λ 的零化子为 $A(M_\lambda)/R(S)$。现令$\{M_\mu\}_{\mu\in\Delta}$是 $\bar{S}$ 的所有既约 $\bar{S}\Gamma$-表示半模，则

$$R(\bar{S})\equiv\bigcap_{\mu\in\Delta}A(M_\mu)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Omega}(A(M_\lambda)/R(S))=R(S)/R(S)=(0).$$

故 $\bar{S}\equiv S/R(S)$是半单的。同样可证 $S[/]R$ 是半单的。

设I是S的一个右理想，若存在某自然数n，使$(I\Gamma)^nI\subseteq Z(S)$，则称I是幂零的。

定理2.5 若I是S任何幂零右理想，则 $I\subseteq R$，其中R为S的根。

证明 假定 $R\not\supseteq I$，则有既约的 $S\Gamma$-表半模M，使 $M\Gamma I\neq(0)$。于是有非零元 $u\in M$及非负整数 l，使

$$u\Gamma(I\Gamma)^lI\neq(0)\quad 且\quad u\Gamma(I\Gamma)^{l+1}I=(0).$$

因M是既约的 $S\Gamma$-表示半模，故对非零元 $v\in u\Gamma(I\Gamma)^lI$，存在 $\alpha_i,\beta_j\in\Gamma$ 与 $a_i,b_j\in S$，使

$$u+\sum_i v\alpha_i a_i=\sum_j v\beta_j b_j$$

因 $(\sum_i v\alpha_i a_i)\gamma c=0$，$(\sum_j v\beta_j b_j)\gamma c=0$，$\forall\gamma\in\Gamma$，$c\in I$，因此，$u\gamma c=0$，$\forall\gamma\in\Gamma$，$c\in I$，即 $u\Gamma I=(0)$。矛盾，表明 $R\supseteq I$。

推论 若S是半单的，则它没有非零的幂零右理想。

引理2.6 设R是S的根且 $r\in S$，若 $S\Gamma r\Gamma S\subseteq R$，则 $r\in R$。

证明 设M是既约的 $S\Gamma$-表示半模，$S\Gamma r\Gamma S\subseteq R$，假定 $r\overline{\in}R$，则 $M\Gamma r\neq(0)$，$M\Gamma S(\neq(0))$是既约 $S\Gamma$-表示半模，因此 $M\Gamma S\Gamma r\neq(0)$。由引理2.1，得

$$M\Gamma S\Gamma r\Gamma S\neq(0).$$

这与 $S\Gamma r\Gamma S\subseteq R$ 矛盾。故 $r\in R$。

实际上，$S\Gamma$-表示半模的既约性、半既约性也可通过等价关系来刻划，从而得到Γ-半环的根可通过半既约的 $S\Gamma$-表示半模的零化子来刻划。下面就来讨论这个问题。

引理2.7 $S\Gamma$-表示半模M是既约的当且仅当 i) $M\Gamma S\neq(0)$及 ii) $\mathscr{E}(M)=\{\rho_0,\ \rho_1\}$，即$\mathscr{E}(M)$仅由 ρ_0 与 ρ_1 组成。

证明 设M是既约的 $S\Gamma$-表示半模，则 i)自然成立。下面证 ii)也成立。

任取 $\rho_\alpha\in\mathscr{E}(M)$且 $\rho_\alpha\neq\rho_0$(即 $\rho_\alpha>\rho_0$)，则存在不同的元素 u_1，$u_2\in M$，使$u_1\rho_\alpha u_2$，于是

$$(\sum_i u_1\alpha_i a_i)\rho_\alpha(\sum_i u_2\alpha_i a_i),\quad\forall\alpha_i\in\Gamma,\ a_i\in S.\tag{6}$$

因M是既约的 $S\Gamma$- 表示半模，对任何 $x\in M$，$\exists\alpha_i,\ \beta_j\in\Gamma,\ a_i,\ b_j\in S$，使

$$x+\sum_i u_1\alpha_i a_i+\sum_j u_2\beta_j b_j=\sum_j u_1\beta_j b_j+\sum_i u_2\alpha_i a_i,$$

即
$$(x+\sum_i u_1\alpha_i a_i+\sum_j u_2\beta_j b_j)\rho_a(\sum_j u_1\beta_j b_j+\sum_i u_2\alpha_i a_i).$$

因 ρ_a 是线性可消的，且利用(6)，导致 $x\rho_a 0$，$\forall x\in M$.
即 $\rho_a=\rho_1$. 因之，$\mathscr{C}(M)=\{\rho_0,\ \rho_1\}$.

反之，假定 i) $M\Gamma S\neq(0)$ 且 ii) $\mathscr{C}(M)=\{\rho_0,\ \rho_1\}$，需证 $S\Gamma$- 表示半模M是既约的.

首先证明，对 $y,\ z\in M$，$y=z$ 当且仅当 $\sum_i y\alpha_i a_i=\sum_i z\alpha_i a_i$，$\forall\alpha_i\in\Gamma,\ a_i\in S$. 为此，我们在M中定义一个二元关系 ρ_a. $y\rho_a z$ 当且仅当 $\sum_i y\alpha_i a_i=\sum_i z\alpha_i a_i$，$\forall\alpha_i\in\Gamma,\ a_i\in S$. 显见 $\rho_a\in\mathscr{C}(M)$. 又因 $M\Gamma S\neq(0)$，故 $\exists\ y\in M,\ \beta\in\Gamma,\ b\in S$，使 $y\beta b\neq 0\beta b$. 于是 $\rho_a\neq\rho_1$ 且 $\rho_a=\rho_0$. 因此，$y=z$ 当且仅当 $\sum_i y\alpha_i a_i=\sum_i z\alpha_i a_i$，$\forall\alpha_i\in\Gamma,\ a_i\in S$.

其次，设 $u_1,\ u_2\in M$，且 $u_1\neq u_2$ 时，在M里定义一个二元关系 ρ_β：$y\rho_\beta z$ 当且仅当 $\exists\alpha_i,\ \beta_j\in\Gamma,\ a_i, b_j\in S$，使

$$y+\sum_i u_1\alpha_i a_i+\sum_j u_2\beta_j b_j=z+\sum_j u_1\beta_j b_j+\sum_i u_2\alpha_i a_i \tag{7}$$

显见，$\rho_\beta\in\mathscr{C}(M)$. 因而或 $\rho_\beta=\rho_0$ 或 $\rho_\beta=\rho_1$. 对任何 $\alpha\in\Gamma,\ a\in S$,

$$u_1\alpha a+u_1\alpha 0+u_2\alpha a=u_2\alpha a+u_2\alpha 0+u_1\alpha a.$$

故 $(u_1\alpha a)\rho_\beta(u_2\alpha a)$，$\forall\alpha\in\Gamma,\ a\in S$. 但 $(u_1\alpha a)\rho_0(u_2\alpha a)$ 不能对所有的 $\alpha\in\Gamma,\ a\in S$ 成立. 因此 $\rho_\beta=\rho_1$. 于是 $x\rho_\beta 0$，$\forall x\in M$. 即对任何 $x\in M$，$\exists\alpha_i,\ \beta_j\in\Gamma,\ a_i,\ b_j\in S$，使

$$x+\sum_i u_1\alpha_i a_i+\sum_j u_2\beta_j b_j=\sum_j u_1\beta_j b_j+\sum_i u_1\alpha_i a_i.$$

成立. 即M是既约的 $S\Gamma$- 表示半模.

引理2.8 $S\Gamma$- 表示半模M是半既约的当且仅当 i) $M\Gamma S\neq(0)$ 且 ii) 每个异于 ρ_1 的 $\rho\in\mathscr{C}(M)$，$x\bar{\rho}0$，$\forall x\in M\backslash(0)$*.

证明 假定 $S\Gamma$- 表示半模M是半既约的，则 i) 自然成立. 下证 ii) 成立. 不妨设 $\rho\in\mathscr{C}(M)$ 且 $\rho\neq\rho_0$（即 $\rho>\rho_0$）. 如果 $\exists u\in M\backslash(0)$，使 $u\rho 0$. 因M是半既约的，故 $\exists\alpha_i,\ \beta_j\in\Gamma,\ a_i,\ b_j\in S$，使

$$x+\sum_i u\alpha_i a_i=\sum_j u\beta_j b_j,$$

即
$$(x+\sum_i u\alpha_i a_i)\rho(\sum_j u\beta_j b_j).$$

因 $\rho\in\mathscr{C}(M)$，于是 $x\rho 0$，$\forall x\in M$，这与 $\rho\neq\rho_1$ 矛盾. 故 ii) 成立.

反之，设 i) 与 ii) 成立，需证 $S\Gamma$- 表示半模M是半既约的. 若M有真的 $S\Gamma$-k 子模 $N\neq(0)$. 不妨取 $N=\overline{n\alpha S}\neq(0)$（$n\in M$ 且 $n\neq 0$）. 定义一个二元关系 ρ_a：$x\rho_a y$ 当且仅当

*) 记号 $x\bar{\rho}0$ 是表示 $x\rho 0$ 的否定. $M\backslash(0)$ 表示在M中除去零元0.

$x+n\alpha s_1=y+n\alpha s_2(s_1,\ s_2\in S)$。显见，$\rho_a\in\mathscr{E}(M)$。因 $\overline{n\alpha S}\neq(0)$，故$\exists s\in S$，使 $n\alpha s\neq 0$。而

$$n\alpha s+n\alpha s_1=0+n\alpha(s+s_1)$$

即$(n\alpha s)\rho_a 0$，这与题设ii)矛盾。表示M无真的$S\Gamma$-k子半模。即M是半既约的。

现假定$S\Gamma$-表示半模M是半既约的，则$\mathscr{E}(M)\backslash(\rho_1)$是一个归纳序集，由Zorn引理在$\mathscr{E}(M)\backslash(\rho_1)$中有极大元，比如$\rho$，显然，对M按$\rho$的等价类全体用通常方法组成一个既约的$S\Gamma$-表示半模$M'$。沿映射$\varphi$：每个$x\in M$映射到$x$所在的等价类，则$\varphi$是M到$M'$的一个$\Gamma$-同态。由引理2.8知，$\varphi^{-1}(0)=(0)$，因此$A(M)=A(M')$。于是得

定理2.7 设$\mathscr{C}'$是Γ-半环S的所有半既约的$S\Gamma$-表示半模的集合，则Γ-半环S的根

$$\mathscr{R}(S)=\bigcap_{M\in\mathscr{C}'}A(M).$$

§3. Γ-半环的根的内刻划

上节中Γ-半环S的根是通过h-本原理想或[半]既约的$S\Gamma$-表示半模来刻划的，这些刻划需借助于Γ-半环S以外的$S\Gamma$-表示半模的语言。现在的问题，能不能用Γ-半环的内部语言来刻划它的根呢?

设$E(S)$是Γ-半环S中所有线性可消等价关系的集合。对任意给定的元素对i_1，$i_2\in S$，我们在S中定义一个二元关系$\rho(i_1,\ i_2)$：$s\rho(i_1,\ i_2)t$当且仅当对每个$\alpha\in\Gamma$，$\exists j_1$，$j_2\in S$，使

$$s+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2=t+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1\quad(s,t\in S)\tag{8}$$

成立。

引理3.1 1)$\rho(i_1,\ i_2)\in E(S)$且对任何a_1，$a_2\in S$，$\alpha\in\Gamma$，有等式

$$(a_1+i_1\alpha a_1+i_2\alpha a_2)\rho(i_1,\ i_2)(a_2+i_1\alpha a_2+i_2\alpha a_1)\tag{9}$$

2) 若$i_1\rho(i_1,\ i_2)i_2$，则$\rho(i_1,\ i_2)=\rho_1$。

证明 1)对$\rho(i_1,\ i_2)\in E(S)$，只要逐条验证，易得，故略。因对任何$\alpha\in\Gamma$，a_1，$a_2\in S$有

$$(a_1+i_1\alpha a_1+i_2\alpha a_2)+a_2+i_1\alpha a_2+i_2\alpha a_1=(a_2+i_1\alpha a_2+i_2\alpha a_1)+a_1+i_1\alpha a_1+i_2\alpha a_2.$$

故(9)成立。

2) 设$i_1\rho(i_1,\ i_2)i_2$，因$\rho(i_1,\ i_2)\in E(S)$，故

$$(i_1\alpha a_1+i_2\alpha a_2)\rho(i_1,\ i_2)(i_1\alpha a_2+i_2\alpha a_1),\quad\forall\alpha\in\Gamma,\ a_1,\ a_2\in S.$$

利用(9)，立得$a_1\rho(i_1,\ i_2)a_2\quad\forall a_1,\ a_2\in S$，于是$\rho(i_1,\ i_2)=\rho_1$。

引理3.2 若$i_1\overline{\rho(i_1,\ i_2)}i_2$，则有S的一个既约$S\Gamma$-表示半模M，使$i_1$与$i_2$中至少有一个不属于$A(M)$。

证明　设$E(i_1,\ i_2)$是所有$\rho_\beta\in E(S)$且满足 i)$i_1\overline{\rho}_\beta i_2$及 ii)$\rho_\beta\geqslant\rho(i_1,\ i_2)$的集合。易见，$E(i_1,\ i_2)$是一个归纳序集，故由Zorn引理，$E(i_1,\ i_2)$有极大元，比如$\rho$，从引理3.1的2）知道$\rho$在$E(S)/(\rho_1)$里极大的。据（9）及上述条件 i），$\exists\alpha\in\Gamma$，使

$$(i_1\alpha i_1+i_2\alpha i_2)\overline{\rho}(i_1\alpha i_2+i_2\alpha i_1). \tag{10}$$

令M是S关于ρ的所有等价类所组成的$S\Gamma$-半模。因$\rho\in E(S)$且ρ是$E(S)\backslash(\rho_1)$的极大元，故M是$S\Gamma$-表示半模且$\mathscr{E}(M)=\{\rho_0,\ \rho_1\}$；并且由（10）知$M\Gamma S\neq(0)$。于是由引理2.7，知M是既约的$S\Gamma$-表示半模。结合（10），易知$i_1$与$i_2$中至少有一个不属于$A(M)$。

定理3.1　1）S的根$\mathscr{R}$在S里既是右半正则又是左半正则的；

2）S的根$\mathscr{R}$包含S的每个右拟正则右理想。

证明　1）因$\mathscr{R}$是根半环，它没有既约的$S\Gamma$-表示半模。由引理3.2知$\mathscr{R}$是右半正则的。

因$\mathscr{R}$是S的理想，可用[1]中预理4.9同样的方法得到$\mathscr{R}$是右半正则的。

2）设I是S的右拟正则理想，假定$\mathscr{R}\not\supseteq I$，则有既约的$S\Gamma$-表示半模M，使得$M\Gamma I\neq(0)$，$\exists r\in I$，$\alpha\in\Gamma$，$u\in M$，使$u\alpha r\neq 0$。由引理2.2′，有

$$u+(u\alpha r)\beta a=(u\alpha r)\beta b\quad(\alpha,\ \beta\in\Gamma,\ a,\ b\in S),$$

即

$$u+u\alpha(r\beta a)=u\alpha(r\beta b). \tag{11}$$

其中$r\beta a\in I$，$r\beta b\in I$，故对每个$\alpha\in\Gamma$，$\exists j_1,\ j_2\in S$，使

$$(r\beta a)+j_1+(r\beta a)\alpha j_1+(r\beta b)\alpha j_2=(r\beta b)+j_2+(r\beta a)\alpha j_2+(r\beta b)\alpha j_1. \tag{12}$$

由（11）得

$$u\alpha j_1+u\alpha(r\beta a)\alpha j_1=u\alpha(r\beta b)\alpha j_1 \tag{13}$$

与

$$u\alpha(r\beta b)\alpha j_2=u\alpha j_2+u\alpha(r\beta a)\alpha j_2 \tag{14}$$

由（11），（13），（14）两端分别相加，经整理得

$$u+u\alpha(r\beta a+j_1+r\beta a\alpha j_1+r\beta b\alpha j_2)=u\alpha(r\beta b+j_2+r\beta a\alpha j_2+r\beta b\alpha j_1).$$

利用（12）及M中加法可消律成立，得$u=0$与$u\alpha r\neq 0$矛盾。故$I\subseteq\mathscr{R}$。

此定理表明$\sigma(S)\subseteq\mathscr{R}\subseteq J(S)$，结合[1]中推论5.5：$J(S)\subseteq\sigma(S)$，得

定理3.2　$\mathscr{R}=J(S)=\sigma(S)$。

该定理表明这里所定义的根与[1]中的Jacobson根$J(S)$及半根$\sigma(S)$是一致的。

定理3.3　S的根与左根*一致。

定理3.4　若S是根半环，$r\in S$，则对每个正整数k与每个$\alpha\in\Gamma$或$(r\alpha)^{k-1}S\supset(r\alpha)^kS$或$(r\alpha)^{k-1}r\in Z(S)$。

证明　显见$(r\alpha)^{k-1}S\supseteq(r\alpha)^kS$。

假定$(r\alpha)^{k-1}S=(r\alpha)^kS$，则$\exists s\in S$，使

*）Γ-半环S的左根是指定义2.3中的右表示半模改为左表示半模而得。

$$(ra)^{k-1}r=(ra)^k s=(ra)^{k-1}(ras) \tag{15}$$

因S是根半环，故元素偶0与s，对每个$\alpha\in\Gamma$，有j_1，$j_2\in S$，使$j_1+s\alpha j_2=s+j_2+s\alpha j_1$。于是

$$(r\alpha)^k j_1+(r\alpha)^k s\alpha j_2=(r\alpha)^k s+(rs)^k j_2+(r\alpha)^k s\alpha j_1.$$

利用(15)，有$(r\alpha)^{k-1}r\alpha(j_1+j_2)=(r\alpha)^{k-1}r+(r\alpha)^{k-1}r\alpha(j_1+j_2)$。表明$(r\alpha)^{k-1}r\in Z(S)$。

参考文献

[1] 徐忠明，关于Γ-半环，数学研究与评论，第二期（1981年7月）.

[2] Barnes, W. E., On the Γ-rings of Nobusawa, *Pacific J. Math.*,18(1966), 411—422.

[3] LaTorre, D. R., On h-ideals and k-ideal in hemirings, *Publ. Math. Debrecen*, 12(1965), 219—226.

[4] Jacobson, N., The radical and semi—simplicity for arbitrary rings, *Amar. J. Math.*, 67 (1945)300—320

On the Jacobson Radical of a Γ-hemiring

By Xu Zhongming (徐忠明)

Absfract

The purpose of this paper is to consider the Jacobson radical of a Γ-hemiring[1] from the point of view of the representation theory in the ring theory. We will define the irreducible representation semimodule and the radical of a Γ-hemiring, and prove some fundamental properties of the radical which correspond to those in the ring theory. The external notion of the radical will be related to internal one, at the same time, we shall see that the radical defined in this paper coincides with the Jacobson radical and with the semiradical of the Γ-hemiring;