不动点定理*

颜心力

（西安冶金建筑学院）

我们将求算子T的不动点的问题，转化为寻找一个算子F，若乘积TF可换且有唯一不动点，则T必有不动点．

对所有具有唯一性的不动点定理，均可利用本文定理1而得到推广．文中定理2至定理8即属此情形（也有一些对定理本身作了改进）．

定理1　设T，F均为映距离空间X到自身的算子．若方程组

$$Tx=x \tag{1}$$

$$Fx=x \tag{2}$$

有解x^*，则x^*也是方程

$$(TF)x=x \tag{3}$$

的解．若F,T中之一为非扩张算子，另一为压缩算子，且方程(1)，(2)有公共解，则(3)有唯一解．

反之，若$TF=FT$，(3)有唯一解y^*，则(1)、(2)也有唯一的公共解y^*．

证　第一部分．因$Tx^*=x^*$，$Fx^*=x^*$，所以

$$(TF)x^*=T(Fx^*)=Tx^*=x^*.$$

即x^*是(3)的解．

我们不妨假设T为压缩算子，F为非扩张算子，从而积算子TF是压缩的．若有不动点，则显然是一意的．

再证第二部分，设y^*为方程(3)的解，依可换性知

$$TFy^*=y^* \tag{4}$$

$$FTy^*=y^* \tag{5}$$

将T作用于(5)：

$$TFTy^*=Ty^*$$

* 1981年3月20日收到．

此式说明Ty^*亦为(3)的解，但依假设(3)仅有唯一解y^*. 所以

$$Ty^*=y^*.$$

同理有

$$Fy^*=y^*.$$

从而证明了(1)、(2)有公共解y^*.

再证公共解的唯一性. 设(1)、(2)另有公共解y_1^*，依本定理的第一部分知y_1^*必为(3)的解. 从而与(3)只有唯一解相矛盾. 于是证明了(1)、(2)的公共解唯一. 证毕.

推论 1 若X为完备距离空间，T，F中的一个为非扩张映象，另一个为压缩映象，且积TF可换，则(1)、(2)有唯一公共解.

推论 2 令$F=T^{m-1}$即得[1]的引理的第二部分结论.

推论 3 若$TF=FT$，且T的不动点必为F的不动点. 当TF有唯一不动点x^*时，T必有唯一不动点x^*.

定理 2 设X为完备距离空间；T，F为映象：$X\to X$，且积TF可换. 设R^+为一切正实数所成的集. 若存在$\alpha\in\{\alpha: R^+\to[0,1)$，当$t_n$在$R^+$上单调降和$\alpha(t_n)\to 1$时有$t_n\to 0\}$使对任意的$x,y\in X$，恒有

$$\rho(TFx,\ TFy)\leqslant\alpha(\rho(x,y))\rho(x,y) \tag{6}$$

成立，则T在X中有不动点. 若T的不动点必为F的不动点，则T在X中的不动点唯一.

证 依[2]知FT在X中有唯一不动点，从而依本文定理1知T，F有唯一的公共不动点. 故T在X中至少有一不动点. 至于定理的后一部分，则由定理1的推论3可得. 证毕.

注 本定理中关于唯一性的论断，对后续定理均成立，为避免累赘，故从略.

据[3]，度量空间X中到自身的连续映象ψ叫弱压缩的，如果对任意的$x,y\in X$，$x\neq y$，恒存在自然数$n=n(x,y)$，使得不等式

$$\rho(\psi^n x,\psi^n y)<\rho(x,y) \tag{7}$$

成立.

依[3]，类似本文定理2的证明有

定理 3 设X为列紧度量空间，映象T：$X\to X$. 若存在映象F：$X\to X$，使得积TF可换且为弱压缩. 则T在X中有不动点.

设X是Banach空间，E是X中的集合，T：$E\to E$. 若T满足条件

$$\|Tx-Ty\|\leqslant a\|x-y\|+b(\|x-Tx\|+\|y-Ty\|)+c(\|x-Ty\|+\|y-Tx\|), \tag{8}$$

其中$x,y\in E$，$a,b,c\geqslant 0$且$a+2b+2c\leqslant 1$，则称T是平均非扩张映象. 若$a+2b+2c<1$，则称T是平均压缩映象.

利用[4]的定理8与3，类似本文定理2的证明，可分别获得

定理4　设X是Banach空间，E为X中的非空闭集，T：$E\to E$，若存在F：$E\to E$，使得积TF连续可换且满足平均压缩条件。则T在E中存在不动点。

定理5　设X为自反Banach空间，E是X中非空有界凸闭集，映象T：$E\to E$，若存在映象F：$E\to E$，使得积TF可换连续且满足平均非扩张条件(8)。并设

i) 条件(8)中的$b>0$；

ii) 对E中每一包含不只一点的非空有界闭凸集E^*，有

$$\sup_{x\in E^*}\|x-TFx\|<\delta(E^*)\text{（表 }E^*\text{ 的直径）}.$$

则T在E中有不动点。

根据[5]的定理1与定理2，3可得：

定理6　设X是Banach空间，E是X中非空闭子集，映象T：$E\to E$。若存在映象F：$E\to E$，使得FT可换且满足平均非扩张条件(8)，则当(8)中的系数$b>0$，$c>0$时，T在E中存在不动点。

定理7　设X是Banach空间，E是X中非空闭凸集，T,F：$E\to E$，且$TF=FT$为平均非扩张映象，(8)中的$b>0$，并对$x,y\in E$，恒有

$$\|(TF)x-(TF)y\|\leqslant A\|x-y\|,$$

其中A是正常数，则T在E中存在不动点。

定理8　设X是自反的Banach空间，E是X中非空闭凸集，T：$E\to E$，若存在F：$E\to E$，使TF可换且为平均非扩张映象，当(8)中的系数$b>0$，而且满足下列条件之一：

i) TF是E上的连续映象。

ii) $2b<1$。

iii) 对于集E中多于一点的相对于TF的不变的闭凸子集K有

$$\inf_{x\in K}\|x-TFx\|<\delta(K)$$

iv) 集E具有亚正规结构（亚正规结构的定义见[5]）。

则映象T在E中存在不动点。

参 考 文 献

[1] 颜心力，弱平均非扩张映象原理，西北大学学报（自然科学版），(1978) No.3, 92-94.

[2] Geraghty, M. A., An improved criterion for fixed points of contraction mappings, J. Math. Anal. & Appl. V. 48 (1974), 811-817.

[3] Bailey, D. F., Some theorems on contractive mappings, J. London. Math. Soc. V; 41 (1966), 101-106.

[4] 张石生、黄发伦，关于 Banach 空间平均非扩张映象的不动点理论，四川大学学报（自然科学版），(1975) No.2, 67-78.

[5] 赵汉宾，Banach 空间中的平均非扩张映象；不动点的存在定理，数学学报，V; 22, (1979) No. 4, 459-469.

On Fixed Point Theorems

By Yan Xinli（颜心力）

Abstract

In this paper the author transposes the problem of finding the fixed point of an operator T to the same problem of another operator F, provided that the product T• F(=F•T) has an unique fixed point y*, then y* is also the fixed point of T.

Using the above result we extend all fixed point theorems with uniqueness.