算子的旋转度及其在研究算子不动点中的应用*

葛人溥

（西安交通大学）

内容提要

在研究算子不动点的过程中，人们早已注意到算子的相对伸长度在证明其不动点存在唯一性以及寻找不动点中的作用[4]。但是从六十年代末开始，人们注意到这样的事实：决定算子不动点的存在唯一性及寻找方法的不仅仅是伸长度，它还与内积$\langle x-y, f(x)\sim f(y)\rangle$有关。这就导致了对所谓单调算子与伪压缩算子的研究[1;2]。上以f表示实Hilbert空间中的算子，x,y是空间中的元素。本文认为实Hilbert空间中的算子的作用实际上是由两部分组成的：旋转与伸长，并利用旋转度与伸长度的概念研究了一类非膨胀算子以及一类可膨胀算子的不动点的存在唯一性以及寻找它们的一种迭代方法。最后，我们还发现了均匀膨胀算子存在唯一不动点的条件，并给出了寻找这种不动点的反代法。

人们早已注意到压缩映象不动点的存在唯一性，也注意到非胀胀算子可能有不动点（唯一或不唯一）也可能没有不动点[1;2]。本文认为实Hilbert空间中的任何算子对一点来说，实际上是由两部分组成的：旋转与伸长。因此我们定义

定义1　设$f: D\subset H\to H$是实Hilbert空间中的一个算子。定义数

$$\theta(f(x))=\begin{cases}\langle f(x),x\rangle/\|f(x)\|\cdot\|x\|, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 和 } f(x)\neq 0,\\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 或 } f(x)=0\end{cases}\tag{1}$$

为f在x点处的旋转度。定义数

$$l(f(x))=\begin{cases}\|f(x)\|/\|x\|, & \text{当 } x\neq 0,\\ 1, & \text{当 } x=0 \text{和 } f(x)=0\end{cases}\tag{2}$$

为f在x点处的伸长度。若$x=0$而$f(x)\neq 0$，则

$$l(f(x))=+\infty.\tag{2'}$$

1981年5月21日收到。

*推荐者：游兆永（西安交通大学）

x^*为 f 的不动点的特征是

定理 1 设 $f: D\subset H\to H$ 是一个算子，其中 H 是实 Hilbert 空间。那么 $x^*\in D$ 是 f 的一个不动点的充要条件是

$$\theta(f(x^*))=1 \text{ 及 } l(f(x^*))=1. \tag{3}$$

证明 如果 $x^*=0\in D$ 是 f 的不动点，即 $x^*=f(x^*)$，则 $f(x^*)=0$.由定义，$\theta(f(x^*))=1$ 和 $l(f(x^*))=1$。因此我们可以设 $x^*\neq 0$。如果 $x^*\in D$ 是不动点，即 $x^*=f(x^*)$，则 $\|f(x^*)\|=\|x^*\|$，从而 $l(f(x^*))=1$。又 $\langle f(x^*),x^*\rangle=\langle x^*,x^*\rangle=\|x^*\|^2=\|f(x^*)\|^2=\|f(x^*)\|\cdot\|x^*\|$，从而 $\theta(f(x^*))=1$。

反之，如果 $l(f(x^*))=1$，$\theta(f(x^*))=1$，则由定义，或者 $x^*=0$ 及 $f(x^*)=0$，这时 $x^*=f(x^*)$,即 f 有不动点 x^*；或者 $x^*\neq 0$，这时

$$\|f(x^*)\|=\|x^*\| \text{ 及 } \langle f(x^*),x^*\rangle=\|f(x^*)\|\cdot\|x^*\|,$$

从而有

$$\begin{aligned}\|x^*-f(x^*)\|^2&=\|x^*\|^2-2\|f(x^*)\|\cdot\|x^*\|+\|f(x^*)\|^2\\&=(\|x^*\|-\|f(x^*)\|)^2=0,\end{aligned}$$

于是

$$x^*=f(x^*),$$

即 x^*为 f 的一个不动点。证毕。

我们还需要

定义 2 在实 Hilbert 空间中定义数

$$\theta_y(f(x))=\begin{cases}\dfrac{\langle f(x)-f(y),x-y\rangle}{\|f(x)-f(y)\|\cdot\|x-y\|}, & \text{当} x\neq y \text{ 和 } f(x)\neq f(y),\\ 1, & \text{当 } x=y \text{ 或 } f(x)=f(y)\end{cases} \tag{4}$$

为 f 在点 x 与 y 处的相对旋转度。定义数

$$l_y(f(x))=\begin{cases}\|f(x)=f(y)\|/\|x-y\|, & \text{当 } x\neq y,\\ 1, & \text{当 } x=y \text{ 和 } f(x)=f(y)\end{cases} \tag{5}$$

为 f 在 x 与 y 点处的相对伸长度。若 $x=y$ 而 $f(x)\neq f(y)$，则

$$l_y(f(x))=+\infty. \tag{5'}$$

注 在实 Hilbert 空间中，$f: D\subset H\to H$ 是一个算子，则显然有

1° f 是单调算子当且仅当 $\theta_y(f(x))\geqslant 0$；

2° f 是膨胀算子当且仅当 $l_y(f(x))\leqslant 1$。

以上 $x,y\in D$。

定理 2 设 H 是实 Hilbert 空间，$D\subset H$ 是一个非空闭凸子集，f 是定义于 D 上的算子，$f(D)\subset D$，如果对于 D 中的一切 x,y 有

$$0\leqslant\theta_y(f(x))\leqslant\alpha<1 \tag{6}$$

及

$$l_y(f(x))\leqslant 1 \tag{7}$$

成立，则迭代

$$x^{k+1}=\lambda f(x^k)+(1-\lambda)x^k,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{8}$$

收敛于 f 在 D 中的唯一不动点 x^*，其中 $0<\lambda<1$。

为了证明这个定理，我们先证明两个引理。

引理1 设 H 是实 Hilbert 空间。如果 $x,y\in H$ 且 $\|x\|=\|y\|\neq 0$ 及 $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}\leqslant\alpha<1$，数 λ：$0<\lambda<1$，则存在一个常数 q，$q=q(\lambda,\alpha)$，$0\leqslant q<1$，使得

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant q\|x\|. \tag{9}$$

证明 由假定 $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}\leqslant\alpha<1$ 及 $\|x\|=\|y\|$，且注意 $-1\leqslant\alpha<1$，有

$$\begin{aligned}\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2&=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)\langle x,y\rangle+(1-\lambda)^2\|y\|^2\\&\leqslant[\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)\alpha+(1-\lambda)^2]\|x\|^2\\&=[(\lambda+(1-\lambda)]^2-2(1-\alpha)\lambda(1-\lambda)]\|x\|^2\\&=[1-2(1-\alpha)\lambda(1-\lambda)]\|x\|^2.\end{aligned}$$

因为 $\varphi(\lambda)=\lambda-\lambda^2$ 在 $[0,1]$ 中大于等于0且最大值 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，于是

$$1>1-2(1-\alpha)\lambda(1-\lambda)\geqslant 1-2(1-\alpha)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1+\alpha}{2}\geqslant 0. \tag{10}$$

令

$$q=\sqrt{1-2(1-\alpha)\lambda(1-\lambda)} \tag{11}$$

则得到不等式(9)

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant q\|x\|,$$

其中 $q=q(\lambda,\alpha)$，$\theta\leqslant q<1$。

引理2 在实 Hilbert 空间中，如果 $x,y\in H$ 且 $0\neq\|x\|\leqslant\|y\|$ 及 $\langle x,y\rangle\geqslant 0$，则

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant\left\|\lambda\frac{x}{\|x\|}\cdot\|y\|+(1-\lambda)y\right\|, \tag{12}$$

其中 $0<\lambda<1$。

证明 利用 $\frac{\|y\|}{\|x\|}\geqslant 1$ 及 $\langle x,y\rangle\geqslant 0$ 可知

$$\begin{aligned}\left\|\lambda\frac{x}{\|x\|}\cdot\|y\|+(1-\lambda)y\right\|^2&=\lambda^2\|y\|^2+2\lambda(1-\lambda)\frac{\|y\|}{\|x\|}\langle x,y\rangle+(1-\lambda)^2\|y\|^2\\&\geqslant\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)\langle x,y\rangle+(1-\lambda)^2\|y\|^2\\&=\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2,\end{aligned}$$

从而(12)式成立。

定理2的证明 由假定 $\theta_g(f(x))\leqslant\alpha<1$ 可知不可能有 $f(x)=f(y)$ 或 $x=y$，正如定义2所指出的。由假定 $\|f(x)-f(y)\|\leqslant\|x-y\|$ 及 $\langle f(x)-f(y),x-y\rangle\geqslant 0$，利用引理2可知，对任何 $0<\lambda<1$ 有

$$\|\lambda(f(x)-f(y))+(1-\lambda)(x-y)\|\leqslant\left\|\lambda\frac{f(x)-f(y)}{\|f(x)-f(y)\|}\|x-y\|+(1-\lambda)(x-y)\right\|.$$

注意上式右边 λ 及 $(1-\lambda)$ 后面的两元的范数相等且夹角的余弦就是 $\theta_g(f(x))\leqslant\alpha<1$（假定）。于是，由引理1，存在一个常数 q，$q=q(\lambda,\alpha)$，$0\leqslant q<1$，使得

$$\|\lambda(f(x)-f(y))+(1-\lambda)(x-y)\|\leqslant q\|x-y\|. \tag{13}$$

如果令

$$g(x)=(1-\lambda)x+\lambda f(x) \tag{14}$$

则(13)变成对一切 $x,y\in D$ 有

$$\|g(x)-g(y)\|\leqslant q\|x-y\|,\ (0\leqslant q<1, \tag{15}$$

即 g 为压缩映象．又 $f(D)\subset D$及D为闭凸集，从而 $x\in D$ 时，$g(x)=(1-\lambda)x+\lambda f(x)\in D$，即 $g(D)\subset D$．于是，由压缩映象原理 g 在D中有唯一的不动点 x^*，且迭代

$$x^{k+1}=g(x^k),\ k=0,1,2,\cdots$$

即(8)

$$x^{k+1}=\lambda f(x^k)+(1-\lambda)x^k,\ k=0,1,2,\cdots$$

收敛于 x^*．由 $x^*=g(x^*)$与

$$x^*=f(x^*) \tag{16}$$

等价，说明迭代(8)收敛于 f 在D中唯一的不动点 x^*．证毕．

定理3 设H是实 Hilbert 空间，$D\subset H$ 是一个子集．那么若 $\theta_y(f(x))\leqslant\alpha<1$ 对一切 $x,y\in D$ 成立，则 f 在D中不可能有两个不动点．

证明 设 $x^*=f(x^*)$及 $y^*=f(y^*)$．那么若 $x^*\neq y^*$，则

$$\theta_{y^*}(f(x^*))=\frac{\langle f(x^*)-f(y^*),x^*-y^*\rangle}{\|f(x^*)-f(y^*)\|\cdot\|x^*-y^*\|}=1,$$

这与假设 $\theta_{y^*}(f(x^*))\leqslant\alpha<1$ 矛盾．从而一定有 $x^*=y^*$．证毕．

这个定理给出了一个很广泛的唯一性定理．

利用相对伸长度与相对旋转度的概念还可以研究所谓可膨胀算子有唯一不动点存在的条件及寻找它的迭代法．

定义 3 设 f 是从实 Hilbert 空间H到H上的算子．如果对一切 $x,y\in H$ 有两个常数 L_1 与 L_2，$0<L_1\leqslant L_2$，允许 $L_1\geqslant 1$，使得

$$L_1\|x-y\|\leqslant\|f(x)-f(y)\|\leqslant L_2\|x-y\| \tag{17}$$

则称 f 为可膨胀算子．

引理 3 设H是实 Hilbert 空间，$x,y\in H,\|x\|^2\neq\langle x,y\rangle$即$\langle x,x-y\rangle\neq 0$．那么存在一个数 λ_{min} 使得

$$\|\lambda_{min}x+(1-\lambda_{min})y\|=\min_{-\infty<\lambda<+\infty}\|\lambda x+(1-\lambda)y\|. \tag{18}$$

并且存在一个数 $0\leqslant q<1$，$q=q(x,y)$，使得

$$\|\lambda_{min}x+(1-\lambda_{min})y\|\leqslant q\|x\|. \tag{19}$$

证明 对固定的 $x,y\in H$，定义 λ 的实函数

$$\varphi(\lambda)=\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2.$$

令其一阶导数等于 0 并注意 $x\neq y$，则得到

$$\lambda_{min}=\frac{\|y\|^2-\langle x,y\rangle}{\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2}=\frac{\|y\|^2-\langle x,y\rangle}{\|x-y\|^2}. \tag{20}$$

易知 $\varphi''(\lambda)=2\|x-y\|^2>0$，所以确有

$$\varphi(\lambda_{min})=\min_{-\infty<\lambda<+\infty}\varphi(\lambda)$$

即(18)式成立。

由假设$\|x\|^2 \neq \langle x,y\rangle$故

$$\lambda_{min}=\frac{\|y\|^2-\langle x,y\rangle}{\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2}\neq 1;$$

否则从$\|y\|^2-\langle x,y\rangle=\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$可知$\|x\|^2=\langle x,y\rangle$。

在(18)式中考虑$\lambda=1$的情况，就得到

$$\|\lambda_{min}x+(1-\lambda_{min})y\|<\|x\|.$$

令q满足

$$0\leqslant\frac{\|\lambda_{min}x+(1-\lambda_{min})y\|}{\|x\|}\leqslant q<1,$$

则
$$\|\lambda_{min}x+(1-\lambda_{min})y\|\leqslant q\|x\|,$$

其中$q=q(x,y)$，$0\leqslant q<1$。证毕。

下面的引理给出了引理3的几何解释。

引理4　在引理3的条件下有等式

$$\langle\lambda_{min}x+(1-\lambda_{min})y,x-y\rangle=0. \tag{21}$$

证明　只要展开(21)左边并将(20)式中的λ_{min}代入即得(21)式。

引理5　在引理3的条件下，记

$$l=\frac{\|y\|}{\|x\|}\text{及}\ \theta=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}. \tag{22}$$

那么如果当$\theta l<1$时$\lambda\in\left(\frac{l^2-1}{l^2-2\theta l+1},1\right)$，或当$\theta l>1$时，$\lambda\in\left(1,\frac{l^2-1}{l^2-2\theta l+1}\right)$，则存在一个$q=q(\lambda,\theta,l)$，$0\leqslant q<1$，使得

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant q\|x\|. \tag{23}$$

证明　由不等式

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2<\|x\|^2$$

并使用记号(22)，则有不等式

$$(l^2-2\theta l+1)\lambda^2+2(\theta l-l^2)\lambda+l^2-1<0.$$

这个不等式有解

$$\begin{cases}\dfrac{l^2-1}{l^2-2\theta l+1}<\lambda<1, & \text{当 }\theta l<1\text{时},\\[2ex] 1<\lambda<\dfrac{l^2-1}{l^2-2\theta l+1}, & \text{当}\theta l<1\text{时}.\end{cases}$$

对于以上λ，我们有

$$0\leqslant\frac{\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2}{\|x\|^2}=\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)\theta l+(1-\lambda)^2l^2<1.$$

如果选取q满足

$$0\leqslant\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)\theta l+(1-\lambda)^2l^2\leqslant q^2<1$$

则有
$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant q\|x\|,$$

其中$q=q(\lambda,\theta,l))$，$0\leqslant q<1$。证毕。

我们有以下的关于可膨胀算子的主要定理。

定理4　设H是实Hilbert空间，f是从H到H的算子．如果对一切$x,y\in H$有

i)　$\|x-y\|^2\neq\langle x-y,f(x)-(y)\rangle$即

$\langle x-y,(x-y)-(f(x)-f(y))\rangle\neq 0$；当$x\neq y$时，

ii)　$0<L_1\leqslant l_y(f(x))\leqslant L_2$；

iii)　$\theta_y(f(x))\leqslant 0$。

那么可以取

$$0\leqslant q=\sqrt{\lambda_0^2+(1-\lambda_0)^2L_2}>1 \tag{24}$$

其中

$$\lambda_0=\frac{L_2^2}{L_2^2+1}. \tag{25}$$

这时有

$$\|\lambda_0(x-y)+(1-\lambda_0)(f(x)-f(y))\|\leqslant q\|x-y\|. \tag{26}$$

证明　为了方便，我们记$l_y(f(x))$为l，记$\theta_y(f(x))$为θ。首先我们说明函数

$$\varphi(\theta,l)=\frac{l^2-1}{l^2-2\theta l+1} \tag{27}$$

是随l增大的，如果$\theta\leqslant 0$。事实上。由$\theta\leqslant 0$可知

$$\varphi_l'(\theta,l)=\frac{2(2l-\theta(l^2+1))}{(l^2-2\theta l+1)^2}>0$$

从而$\varphi(\theta.l)$随l增大。

注意$-2\theta L_2\geqslant 0$，则有

$$\frac{l^2-1}{l^2-2\theta l+1}\leqslant\frac{L_2^2-1}{L_2^2-2\theta L_2+1}\leqslant\frac{L_2^2-1}{L_2^2+1}<1.$$

又注意这里总有$\theta l\leqslant 0<1$，上式说明关系

$$\left(\frac{L_2^2-1}{L_2^2+1},1\right)\subset\left(\frac{l^2-1}{l^2-2\theta l+1},1\right)$$

对满足条件ii)与iii)的每一对(θ,l)成立。由引理5当取

$$\lambda_0=\frac{L_2^2}{L_2^2+1}\in\left(\frac{L_2^2-1}{L_2^2+1},1\right) \tag{25}$$

时，注意$\theta l\leqslant 0$则有

$$1>\lambda_0^2+(1-\lambda_0)^2L_2^2\geqslant\lambda_0^2+2\lambda_0(1-\lambda_0)\theta l+(1-\lambda_0)^2l^2\geqslant 0,$$

因为由(25)式，

$$\left(\frac{L_2^2}{L_2^2+1}\right)^2+\frac{L_2^2}{(L_2^2+1)^2}=\frac{L_2^4+L_2^2}{L_2^4+2L_2^2+1}<1.$$

于是可取 q 满足

$$0 \leqslant q = \sqrt{\lambda_0^2 + (1-\lambda_0)^2 L_2^2} < 1. \tag{24}$$

这时

$$\frac{\|\lambda_0(x-y) + (1-\lambda_0)(f(x)-f(y))\|^2}{\|x-y\|^2} = \lambda_0^2 + 2\lambda_0(1-\lambda_0)\theta l + (1-\lambda_0)^2 l^2$$

$$\leqslant q < 1,$$

即对一切 $x, y \in H$ 有不等式

$$\|\lambda_0(x-y) + (1-\lambda_0)(f(x)-f(y))\| \leqslant q\|x-y\|. \tag{26}$$

证毕.

定理 5　在定理 4 的条件下，f 在 H 中有唯一不动点 x^*，且迭代

$$x^{k+1} = \lambda_0 x^k + (1-\lambda_0) f(x^k),\ \ k = 0, 1, 2, \cdots \tag{28}$$

收敛于 x^*，收敛比 q 由(24)决定，λ_0 由(25)式决定.

证明　因为 $x^k \in H$ 及 $f(x^k) \in H$，从而 $\lambda_0 x^k + (1-\lambda_0) f(x^k) \in H$. 令

$$g(x) = \lambda_0 x + (1-\lambda_0) f(x),$$

则 g 是从 H 到 H 中的压缩映象，这由(26)式可知. 于是由压缩映象原理，迭代

$$x^{k+1} = g(x^k),\ \ k = 0, 1, 2\cdots$$

即

$$x^{k+1} = \lambda_0 x^k + (1-\lambda_0) f(x^k),\ \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

收敛于 g 在 H 中的唯一不动点 x^*，即 $x^* = g(x^*)$. 这时

$$x^* = \lambda_0 x^* + (1-\lambda_0) f(x^*),$$

从而

$$x^* = f(x^*).$$

这说明$\{x^k\}$收敛于 f 在 H 中的唯一动点.收敛比 q 由(24)式决定，λ_0 由(25)式决定. 证毕.

当我们验证定理 2 与定理 5 的条件是否成立时会遇到很大的困难. 以下的定理给出了对部分条件检验的方法.

定理6　设 $f: H \to H$（或闭凸集 $D \subset H \to H$）在 H（或 D）中处处有 F_-导数存在. 若对所有的 $x \in H$（或 D）有不等式

$$\|f'(x)\| \leqslant L_2 \tag{29}$$

则有

$$l_v(f(x)) \leqslant L_2, \tag{30}$$

若$f'(x)$对所有的 H（或 D）中的 x 是半负（或正）定的，则有

$$\theta_v(f(x)) \leqslant 0 \text{（或} \geqslant 0\text{）}. \tag{31}$$

证明　利用中值定理并注意$\|f'(x)\| \leqslant L_2$对一切 $x \in H$（或 D）成立，就有

$$l_v(f(x)) = \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|} = \frac{\|\int_0^1 f'(y+t(x-y))(x-y)dt\|}{\|x-y\|}$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f'(y+t(x-y))\| \leqslant L_2.$$

同样由中值定理并注意$f'(x)$对所有的x是半负（或正）定的，就有

$$\theta_y(f(x)=\frac{\langle f(x)-f(y),x-y\rangle}{\|f(x)-f(y)\|\|x-y\|}=\frac{\int_0^1(x-y)^T f'(y+t(x-y))(x-y)dt}{\|f(x)-f(y)\|\|x-y\|}\leqslant 0(\text{或}\geqslant 0).$$

证毕。

参 考 文 献

[1] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, 1970.

[2] Srinvasn Swaminathan, Fixed Point Theory and Its Applications, Academic Press: 1976.

[3] 游兆永，一类非线性代数方程组迭代解法，西安交通大学学报，1980年第二期，研究通讯.

The Rotation Degree of an Operator and its Applications to the Research of Finding Fixed Points of Operators

By Ge Renpu (葛人溥)

Abstract

In the research on the existence and uniqueness of fixed points of operators as well as the method for finding them, the action of the relative lengthened degree was noticed about seventy years ago. From the end of the sixties on, it is noticed that the determination of the existence and uniqueness of fixed points of operators as well as the method for finding them is related for not only the lengthened degree but also the inner product$\langle x-y, f(x)-f(y)\rangle$. The latter caused the research on monotonic operators and pseudo-constract operators. Here f expresses an operator in a real Hilbert space; and x, y are elements of this space. In this article we find out that the action of an operator in areal Hilbert space in fact cohsists of two parts: rotating and lengthening. We use the concepts of the 1otation degree and lengthened degree to research the existence and uniqueness of fixed point of points operator, which belongs to a class of nonexpansive operators and of a class of exPansible operators and to give the iterative methods for finding it.