一类 L-Fuzzy 拓扑空间
1. L-Fuzzy 点的邻近构造*

李中夫

（四川大学数学系）

Fuzzy 拓扑学自提出至今已有十余年了[1]，但直到文[2]问世以前，进展是相当缓慢的. 1977年，蒲保明与刘应明[2]在重新定义了 fuzzy 点之后，首次打破了传统的邻域方法，创造性地提出了"重域"这一重要概念，并以此为基础合理地定义了聚点和收敛等一系列基本概念，建立了一个完整的 Moore-Smith 式收敛理论，克服了只以邻域为基本工具时的种种弊病，取得了丰硕的成果. 此后，fuzzy 拓扑学在此框架下得到迅速的发展[3~11]. 在[2]里，概念重域起着主要的作用，邻域所起的作用相对说来要小得多.显然，在一般的 L-fuzzy 拓扑空间中，不会像在普通拓扑空间中那样概念重域和邻域是重而为一的. 然而，是否能对某一类 L-fuzzy 拓扑空间适当定义 L-fuzzy 点等概念，使其中概念重域和邻域有密切关联甚至作用相当呢？这一问题的解决将有助于进一步弄请重域这一新的重要概念的内在涵义. 本文研究了一类 L-fuzzy 拓扑空间，其中 L 为由存在逆序对合对应的任意一个有最大元的半序集诱导出的格. 本文用与通常不同的方式定义了 L-fuzzy 点，它仍以普通点为特款. 这样的 L-fuzzy 拓扑空间仍以普通拓扑空间为特例，其中重域与邻域概念不重而为一，但具有一种对偶的一一对应关系，因而作用相当. 本文不仅将[2]中§§1—10（相当于[12]第一章）的全部内容推广到了这一类 L-fuzzy 拓扑空间中，同时还给出了一些新的定理. 关于这一类 L-fuzzy 拓扑空间的进一步研究，将在以后的工作中给出.

§1. 基本概念

设 $(L_0,\leqslant)$ 是一个有最大元的半序集，存在一个逆序对合对应 $\lambda\to\lambda'$，$\forall\lambda\in L_0$. 这个对应称为从 L_0 到 L_0 的补映射. 我们常用 $\lambda,\mu,\rho,\nu,\cdots$ 表示 L_0 的元素，用 1 表示 L_0 的最大元.

令 $L=\{a|a\subset L_0$ 且满足条件：若 $\lambda\in a,\mu\leqslant\lambda$ 则 $\mu\in a\}$. 注意，这里记号 $a\subset L_0$ 表示 a 是 L_0 的子集. 容易验证：若 $a_\alpha\in L,\forall\alpha\in J$ 则有 $\cup\{a_\alpha|\alpha\in J\}\in L$ 及 $\cap\{a_\alpha|\alpha\in J\}\in L$. 事实上，显然有 $\cup\{a_\alpha|\alpha\in J\}\subset L_0$，又若 $\lambda\in\cup\{a_\alpha|\alpha\in J\}$ 则有某一 $\alpha\in J$ 使 $\lambda\in a_\alpha$，又如果

* 1981年6月10日收到. 推荐者：刘应明（四川大学数学系）.

$\mu\leqslant\lambda$，因为$a_\alpha\in L$，必有$\mu\in a_\alpha$从而$\mu\in\cup\{a_\alpha|\alpha\in J\}$；又显然有$\cap\{a_\alpha|\alpha\in J\}\subset L_0$，若$\lambda\in\cap\{a_\alpha|\alpha\in J\}$，则$\lambda\in a_\alpha$，$\forall\alpha\in J$。如果$\mu\leqslant\lambda$，因$a_\alpha\in L$，必有$\mu\in a_\alpha$，$\forall\alpha\in J$，即$\mu\subset\cap\{a_\alpha|\alpha\in J\}$。由此可见，$(L,\subset,\cap,\cup)$构成一个完全格。它是由$L_0$的全体子集所成的格的子格，当然也是分配格。其最大元就是L_0，其最小元是空集，记为ϕ。我们把L称作是由半序集L_0诱导出的格。常用$a,b,c,\cdots$表示L的元素。

在L中可建立一个对应关系：$a\to a'=\{\lambda\in L_0|\lambda'\notin a\}$。这一对应是对合的：$(a')'=\{\lambda\in L_0|\lambda'\notin a'\}=\{\lambda\in L_0|\lambda=(\lambda')'\in a\}=a$，且是逆序的，因为若$b\subset a$，则$b'=\{\lambda\in L_0|\lambda'\notin b\}\supset\{\lambda\in L_0|\lambda'\notin a\}=a'$。我们称这个对应为从$L$到$L$上的补映射。显然$\phi'=L_0$。

例1。若L_0为独点集$\{1\}$，$1'=1$，则$L=\{\phi,L_0\}$，$\phi'=L_0$。

例2。若L_0为区间$[0,1]$，$\lambda'=1-\lambda$，则L为全体形如$[0,\lambda]$和$[0,\lambda)$的区间所成之集合，这里$\lambda\in[0,1]$，$[0,0)$表示“空区间”(空集)ϕ。其补映射为$\{[0,\lambda]\}'=[0,1-\lambda)$，$\{[0,\lambda)\}'=[0,1-\lambda]$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

在本文中用X表示非空（分明）集。

定义 1.1 X至L的函数A称作X上的一个L-fuzzy集。对于$x\in X$，$A(x)$称作A在点x的从属度。X的子集$\{x\in X|A(x)\neq\phi\}$称作A的承集，记作Supp$A$或A_0。若A仅取值ϕ或L_0，A又称作X上的分明集。在X上恒取值L_0的分明集就用X来表示，在X上恒取值ϕ的分明集就用Φ表示。

定义 1.2 令$\underset{\sim}{X}=\{x_\lambda|x\in X,\lambda\in L_0\}$集合$\underset{\sim}{X}$的元素$x_\lambda$称作$X$上的L-fuzzy点。$\lambda$叫做$x_\lambda$对$x$的从属度，$X$上的分明点$x=x_1$称作$x_\lambda$的承点。

定义 1.3 当$\lambda\in A(x)$时，称L-fuzzy点x_λ属于L-fuzzy集A，记作$x_\lambda\in A$。

现在可以看到，我们定义的L-fuzzy集就是L-fuzzy点的所有满足下列条件的集合A：若$x_\lambda\in A$，则对所有的$\mu\leqslant\lambda$有$x_\mu\in A$。显然，L-fuzzy集A可看作是由所有属于A的L-fuzzy点组成的：$A=\{x_\lambda|x_\lambda\in A\}$。为了方便，我们以后用$\{x_\lambda\}$表示包含L-fuzzy点$x_\lambda$的最小L-fuzzy集$\{x_\mu|\mu\leqslant\lambda\}$。即L-fuzzy集$B$：

$$B(y)=\begin{cases}\{\mu\in L_0|\mu\leqslant\lambda\}, & y=x\\ \phi, & y\neq x.\end{cases}$$

如果我们对x_λ和$\{x_\lambda\}$不加区别，也可把L-fuzzy点看作是一个L-fuzzy集。

定义 1.4 设J是指标集，$\mathscr{A}=\{A_\alpha|\alpha\in J\}$为$X$上的L-fuzzy集族，则併$\cup\{A_\alpha|\alpha\in J\}$（又记作$\cup\mathscr{A}$）以及交$\cap\{A_\alpha|\alpha\in J\}$（又记作$\cap\mathscr{A}$）亦为$X$上的L-fuzzy集，分别由下式定义：

$$(\cup\mathscr{A})(x)=\cup\{A_\alpha(x)|\alpha\in J\},\quad x\in X.$$

$$(\cap\mathscr{A})(x)=\cap\{A_\alpha(x)|\alpha\in J\},\quad x\in X.$$

显然，对任意的L-fuzzy集A有：$A=\cup\{\{x_\lambda\}|x_\lambda\in A\}$。

定义 1.5 A的补集，记作A'，定义为$A'(x)=(A(x))'$，$\forall x\in X$。这里$(A(x))'$是$A(x)$在从L到L上的补映射“$'$”下的像。

下列De Morgan定理成立：

定理 1.1 $(\cup\{A_\alpha|\alpha\in J\})'=\cap\{A'_\alpha|\alpha\in J\}$。

证　对任一$x\in X$，$(\cup\{A_\alpha|\alpha\in J\})'(x)=(\cup\{A_\alpha(x)|\alpha\in J\})'=\{\lambda\in L_0|\lambda'\notin\cup\{A_\alpha(x)|\alpha\in J\}\}=\{\lambda\in L_0|\lambda'\notin A_\alpha(x),\ \forall\alpha\in J\}=\{\lambda\in L_0|\lambda\in(A_\alpha(x))',\ \forall\alpha\in J\}=\cap\{A'_\alpha(x)|\alpha\in J\}=(\cap\{A'_\alpha|\alpha\in J\})(x)$。 ▮

定义1.6　X上L-fuzzy集族$\mathscr{T}$称作X上的一个L-fuzzy拓扑，若下列三条件成立：(1) $\Phi,X\in\mathscr{T}$；(2) $A,B\in\mathscr{T}$则$A\cap B\in\mathscr{T}$；(3) 若每个$A_\alpha\in\mathscr{T}(\alpha\in J)$，则$\cup\{A_\alpha|\alpha\in J\}\in\mathscr{T}$。此时称偶对$(X,\mathscr{T})$为L-fuzzy拓扑空间。$\mathscr{T}$中集称作（拓扑$\mathscr{T}$下）开集，开集的补集称作闭集。

定义1.7　设$\mathscr{T}$是X上L-fuzzy拓扑，$\mathscr{T}$的子族$\mathscr{B}$称作$\mathscr{T}$的一个基，若每个开集可表作$\mathscr{B}$中若干个集的併；$\mathscr{T}$的子族$\mathscr{S}$称作$\mathscr{T}$的一个子基，若$\mathscr{S}$中有限个集的交的全体形成$\mathscr{T}$的基；当$\mathscr{T}$有可数基时，称$(X,\mathscr{T})$为满足第二可数公理，或说是C_{II}空间。

为行文简便，我们约定：$(X,\mathscr{T})$总表示一个L-fuzzy拓扑空间。L-fuzzy拓扑，L-fuzzy集，L-fuzzy点常分别简称作拓扑，集，点等等。

容易看出，普通拓扑空间$(X,\mathscr{T})$即L-fuzzy拓扑空间当$L_0=\{1\}$因而$L=\{\phi,L_0\}$的特殊情形。下文中诸定义与结论都是以普通拓扑学中相应定义与结论为特款的。

§2. L-Fuzzy点的邻近构造

定义2.1　在$(X,\mathscr{T})$中，集A称作点x_λ的邻域，若有开集B，使$x_\lambda\in B\subset A$；x_λ的所有邻域组成它的邻域系。

定义2.2　当$\lambda\notin A'(x)$时，称点x_λ重于集A。

定理2.1　点x_λ重于集A当且仅当$x_{\lambda'}\in A$。

证　按从L到L上补映射的定义有$\lambda\in A'(x)\Leftrightarrow\lambda'\notin A(x)$，此即$\lambda\notin A'(x)\Leftrightarrow\lambda'\in A(x)$。由此立得结论。 ▮

注　这个定理在重于与属于之间建立了一种对偶关系。

定义2.3　若$(A\cap B)(x)\neq\phi$，称集A与B相交于点x，或简单地说：A与B相交。

定义2.4　当$A(x)\not\subset B'(x)$时，称集A与B相重于点x，或简单地说：A与B相重。显然下述命题成立：

(1) $A(x)\not\subset B'(x)\Leftrightarrow B(x)\not\subset A'(x)$。

(2) $A\subset B\Leftrightarrow A$与$B'$不相重。

(3) 集A与B相重于点x当且仅当有$x_\lambda\in A$使x_λ重于B。

(4) 当集A与B相重于点x时，$A(x)$与$B(x)$均不为ϕ，从而A与B必相交于点x。

定义2.5　在$(X,\mathscr{T})$中，集A称作点x_λ的重域（或Q一邻域），若有开集$B\subset A$且x_λ重于B关于重域和邻域，有下述对偶原理：

定理2.2　集A是点x_λ的重域当且仅当A是点$x_{\lambda'}$的邻域。

证A是x_λ的重域$\Leftrightarrow$有开集$B\subset A$使$\lambda\notin B'(x)\Leftrightarrow$有开集$B\subset A$使$\lambda'\in B(x)\Leftrightarrow A$是$x_{\lambda'}$的邻域。 ▮

由定理2.2知：凡是关于重域的命题，都可改述为关于邻域的命题，反之亦然.

定理2.3 L-fuzzy点x_λ在$(X,\mathscr{T})$中的邻域系（相应地重域系）记作$\mathscr{U}_{x_\lambda}$，则有

(1) 若$U\in\mathscr{U}_{x_\lambda}$，则$x_\lambda$属于（相应地重于）$U$.

(2) 若$U,V\in\mathscr{U}_{x_\lambda}$，则$U\cap V\in\mathscr{U}_{x_\lambda}$.

(3) 若$U\in\mathscr{U}_{x_\lambda}$，$U\subset V$，则$V\in\mathscr{U}_{x_\lambda}$.

(4) 若$U\in\mathscr{U}_{x_\lambda}$，则有$V\in\mathscr{U}_{y_\lambda}$使$V\subset U$且对每个属于（相应地重于）$V$的L-fuzzy点$y_\mu$，有$V\in\mathscr{U}_{y_\mu}$.

反之，对X上的L-fuzzy点x_λ，$\mathscr{U}_{x_\lambda}$为一个L-fuzzy集族且满足上述条件(1)—(3)，那么下列集U组成X上一个L-fuzzy拓扑$\mathscr{T}$：当任一个L-fuzzy点x_λ属于（相应地重于）U时，必有$U\in\mathscr{U}_{x_\lambda}$；此外，若$\mathscr{U}_{x_\lambda}$还满足条件(4)，则$\mathscr{U}_{x_\lambda}$就是$x_\lambda$在拓扑$\mathscr{T}$下的邻域系（相应地重域系）.

证明是直接的，参阅[12]问题I,B.

定理2.4 设$\mathscr{A}=\{A_\alpha\}$为X上L-fuzzy集族，则L-fuzzy点x_λ属于（重于）$\bigcup\mathscr{A}$当且仅当有某$A_\alpha\in\mathscr{A}$使x_λ属于（重于）A_α.

根据定义，结论是显然的.

定理2.5 在$(X,\mathscr{T})$中开集族$\mathscr{B}$是拓扑基的充要条件是对$\mathscr{T}$中任一开集A及任一属于（重于）A的点x_λ，有$B\in\mathscr{B}$使x_λ属于（重于）B且$B\subset A$.

证 由定理2.2，只须证“属于”部分. 必要性由拓扑基的定义及定理2.4即得. 充分性亦不难得出，因为按题设条件，显然有$A=\bigcup\{B\in\mathscr{B}\mid B\subset A\}$. ▮

定义2.6 在$(X,\mathscr{T})$中，L-fuzzy点x_λ的若干邻域（重域）形成一集族$\mathscr{B}$，若对x_λ的每个邻域（重域）A，有$B\in\mathscr{B}$使$B\subset A$，则称$\mathscr{B}$为x_λ的一个邻域基（重域基）. 若$(X,\mathscr{T})$中每个L-fuzzy点处都有可数的邻域基，则空间$(X,\mathscr{T})$称作满足第一可数公理，或称之为C_{I}空间.

由定理2.2，显然有

定理2.6 $(X,\mathscr{T})$为C_{I}空间当且仅当$(X,\mathscr{T})$中每个L-fuzzy点处都有可数的重域基.

注 我们这里把文[2]中的C_{I}和Q—C_{I}空间统一起来了.

定理2.7 若$(X,\mathscr{T})$为C_{II}空间，则也必是C_{I}空间.

证 设$\mathscr{B}$为$\mathscr{T}$的可数基，对任一点x_λ，记$\widetilde{\mathscr{B}}=\{B\in\mathscr{B}\mid x_\lambda\in B\}$. 由定理2.5易证$\widetilde{\mathscr{B}}$形成$x_\lambda$的可数邻域基.

注 在[2]中C_{II}空间不一定是C_{I}的. 定理2.7说明我们这里不再出现这种情况.

§3. 闭包、聚点及其有关定理

定义3.1 $(X,\mathscr{T})$中所有被包含于集A的开集的并称作A的内集，记作A°或$Int_{\mathscr{T}}A$. 显然，A°是含于A中的最大开集且$(A^\circ)^\circ=A^\circ$.

定义3.2 $(X,\mathscr{T})$中所有含集A的闭集的交称作A的闭包，记作$\bar{A}$或$Cl_{\mathscr{T}}A$.

显然，$\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集且 $(\overline{\overline{A}})=\overline{A}$.

定理 3.1 L-fuzzy 点 x_λ 属于 A° 的充要条件是 x_λ 有一邻域包含于 A.

证明是直接的，从略.

定理 3.2 L-fuzzy 点 x_λ 属于 $\overline{A}$ 的充要条件是 x_λ 的每一个重域都与 A 相重.

证 $x_\lambda\in\overline{A}$ 的充要条件为对每个闭集 $F\supset A$，恒有 $x_\lambda\in F$，即 $\lambda\in F(x)$. 这个条件又可述为：对每个开集 $B=F'\subset A'$，恒有 $\lambda\in B'(x)=F(x)$. 或者说，对满足条件 $\lambda\notin B'(x)$ 的每个开集 B，恒有 $B\not\subset A'$. 按定义，这就是说 x_λ 的每个开重域 B 恒与 A 相重. 这与题给的充要条件显然是等价的.

定义 3.3 若点 x_λ 的每个重域都与集 A 相重，则称 x_λ 为 A 的一个附着点.

系 $\overline{A}$ 是由 A 的所有附着点组成的.

下列定理 3.3—3.6 的证明，可搬用[2]中相应定理的，故从略.

定理 3.3 $A^\circ=((\overline{A'}))'$，$\overline{A}=((A')^\circ)'$，$(\overline{A})'=(A')^\circ$，$(\overline{A'})=(A^\circ)'$.

定理 3.4 （十四集定理）. 在 $(X,\mathscr{T})$ 中，从一个集 A 出发，用取内集、闭包及补集这三种运算，可能得到的集至多为十四个，而且确有拓扑空间，其中有集 A 经过上述三种运算给出十四个两两不同的集.

定义 3.4 X 上每个 L-fuzzy 集 A 对应于 L-fuzzy 集 $f(A)$，这个对应称作 X 上的 L-fuzzy 闭包算子，若 f 满足下列 Kuratowski 四条公理：(1) $f(\Phi)=\Phi$，(2) $A\subset f(A)$，(3) $f(f(A))=f(A)$，(4) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

易见，在 L-futzy 拓扑空间中，有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，从而由 A 对应于 $\overline{A}$ 给出一闭包算子. 反之，由任一闭包算子，也可决定相应的拓扑，我们有

定理 3.5 设 f 为 X 上的 L-fuzzy 闭包算子. 记 X 上满足 $f(A)=A$ 的L-fuzzy L-fuzzy 集 A 的全体为 $\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$ 中各集的补集全体记作 $\mathscr{T}$，则 $\mathscr{T}$ 是 X 上一个 L-fuzzy 拓扑，而且对集 B，恒有 $Cl_{\mathscr{T}}B=f(B)$. 以后称 $\mathscr{T}$ 为由闭包算子 f 决定的 L-fuzzy 拓扑.

定义 3.5 点 x_λ 称作集 A 的聚点，若 x_λ 是 A 的附着点并且当 $x_\lambda\in B$ 时还要求 x_λ 的每个重域与 A 在异于 x 的某点相重. 併 $\cup\{\{x_\lambda\}|x_\lambda$ 是 A 的聚点$\}$ 称作 A 的导集，记作 A^d.

定理 3.6 $\overline{A}=A\cup A^d$.

系 集 A 为闭的当且仅当 A 包含 A 的每个聚点.

若 $(L_0,\leqslant)$ 是全序的，因而格 $(L,\subset,\cap,\cup)$ 也是全序的，我们有下述二定理：

定理 3.7 设 $(L_0,\leqslant)$ 是全序的，在 L-fuzzy 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中，若对某一 $x\in X$，$\{x\}$ 的导集为闭集，则 $\{x_\lambda\}$，$\lambda\in L_0$ 的导集也为闭集.

定理 3.8 设 $(L_0,\leqslant)$ 是全序的，则在 L-fuzzy 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中每个 L-fuzzy 集的导集都是闭集的充要条件是：对每个 $x\in X$，$\{x\}$ 的导集都是闭集.

以上二定理的证明可几乎逐字逐句地重复[13]中定理 3 和定理 4 的，这里就从略了.

§4. 分 离 性

定义 4.1 $(X,\mathscr{T})$ 称作 L-fuzzy T_0 空间，若对 X 中任意两个 L-fuzzy 点 x_λ 与 y_μ，$x_\lambda\neq y_\mu$ 有 $x_\lambda\notin\overline{\{y_\mu\}}$ 或 $y_\mu\notin\overline{\{x_\lambda\}}$.

由定理2.2，显然有

定理4.1 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_0 空间，当且仅当对 X 中任意两个L-fuzzy点 x_λ 与 y_μ，$x_\lambda\neq y_\mu$ 有 x_λ 的邻域 B 使 $y_\mu\notin B$ 或有 y_μ 的邻域 A 使 $x_\lambda\notin A$.

定义4.2 $(X,\mathscr{T})$ 称作L-fuzzy准 T_1 空间，若对每一 $x\in X$ 及 $\lambda\leqslant\mu$，有 $x_\lambda\notin\overline{\{x_\mu\}}$.

定理4.2 $(X,\mathscr{T})$ 是L-fuzzy拓扑空间，则下列条件两两等价：

(1) $(X,\mathscr{T})$ 为L-fuzzy准 T_1 空间；

(2) 对每一 $x\in X$ 及 $\mu\not\geqslant\lambda$，有 x_μ 的邻域 B 使 $x_\lambda\notin B$；

(3) 对每一 $x\in X$ 及 $\lambda\in L_0$，有开集 B 使 $B(x)=\{\mu\in L_0|\mu\not\geqslant\lambda\}$；

(4) 对每一 $x\in X$ 及 $\nu\in L_0$，有闭集 A 使 $A(x)=\{\mu\in L_0|\mu\leqslant\nu\}$.

证 由定理2.2显然有 (1)$\Leftrightarrow$(2)，又若令 $A=B'$ $\nu=\lambda'$ 立得 (3)$\Leftrightarrow$(4)，下面只须证明 (2)$\Leftrightarrow$(3).

(2)$\Rightarrow$(3). 对每一 $\mu\not\geqslant\lambda$，由 (2)，点 x_μ 有一邻域，因而有一开邻域 B_μ，使 $x_\lambda\notin B_\mu$. 取 $B=\cup\{B_\mu|\mu\in L_0,\mu\not\geqslant\lambda\}$，显然 B 为开集且 $B(x)=\{\mu\in L_0|\mu\not\geqslant\lambda\}$.

(3)$\Rightarrow$(2) 对每一 $x\in X$ 及 $\mu\not\geqslant\lambda$，由 (3)，有开集 B 使 $B(x)=\{\rho\in L_0|\rho\not\geqslant\lambda\}$，显然 B 是 x_μ 的邻域且 $x_\lambda\notin B$. ▌

定义4.3 $(X,\mathscr{T})$ 称作L-fuzzy T_1 空间，若对每个L-fuzzy点 x_λ，$\{x_\lambda\}$ 是闭集.

定理4.3 $(X,\mathscr{T})$ 为L-fuzzy拓扑空间，则下列条件两两等价：

(1) $(X,\mathscr{T})$ 为 T_1 空间；

(2) 对 X 中任意两个L-fuzzy点 x_λ，y_μ，若 $x_\lambda\notin\{y_\mu\}$，则有 $\overline{\{y_\mu\}}$；

(3) 对 X 中任意两个L-fuzzy点 x_λ，y_μ，若 $x_\lambda\notin\{y_\mu\}$，则有 y_μ 的邻域 A，使 $x_\lambda\notin A$；

(4) 对每一 $x\in X$ 及 $\lambda\in L_0$，有开集 B 使 $B(x)=\{\mu\in L_0|\mu\not\geqslant\lambda\}$ 且 B 在其他点处取值 L_0；

(5) $(X,\mathscr{T})$ 为准 T_1 空间，且对每一 $x\in X$，$\{x\}$ 为闭集.

证 (1)$\Leftrightarrow$(2) 是显然的. 由定理2.2，(2)$\Leftrightarrow$(3) 也是显然的. 欲证 (1)$\Leftrightarrow$(4)，只要注意 (4) 中的 B 和 $\{x_\lambda\}$ 互补即可. 又 (1)$\Rightarrow$(5) 亦属显然，故下面只须证明 (5)$\Rightarrow$(1). 设 $(X,\mathscr{T})$ 为准 T_1 空间，由定理4.2，对每一 $x\in X$ 及 $\lambda\in L_0$，有闭集 A 使 $A(x)=\{\mu\in L_0|\mu\leqslant\lambda\}$. 又题设 $\{x\}$ 为闭集，故 $\{x_\lambda\}=A\cap\{x\}$ 亦为闭集. 因此 $(X,\mathscr{T})$ 为 T_1 空间. ▌

定义4.4 $(X,\mathscr{T})$ 称作L-fuzzy T_2 空间 (Hausdorff空间)，若对任意两个L-fuzzy点 x_λ 与 $y_\mu(x\neq y)$，存在各自的邻域 B 与 C 使 $B\cap C=\Phi$.

注意到定理2.2，上面定义中的“邻域”二字亦可改为“重域”.

定理4.4 设 $(X,\mathscr{T})$ 为 T_2 空间，则对每一 $x\in X$，$\{x\}$ 为闭集.

证 $(X,\mathscr{T})$ 为 T_2 空间，故对任意 $y\neq x$，显然有点 y 的开邻域 B_y 使 $B_y\cap\{x\}=\Phi$. 于是 $B=\cup\{B_y|y\in X,y\neq x\}$ 是开集且与 $\{x\}$ 互补，故 $\{x\}$ 是闭集. ▌

系 设 $(X,\mathscr{T})$ 为 T_2 空间，则集 $\{x_\lambda\}$ 的任一聚点必作 x_μ，$\mu\not\leqslant\lambda$ 型.

T_2 空间可能不是准 T_1 的，从而更不是 T_1 的.

例 设 $X=\{x,y\}$，$L_0=\{0,1\}$，拓扑 $\mathscr{T}=\{\{x\},\{y\}X,\Phi\}$ 易见 $(X,\mathscr{T})$ 为 T_2 的，但不是准 T_1 的.

定理4.5　$(X,\mathscr{T})$ 若是 T_2 与准 T_1 的，则也是 T_1 的。

证　因为 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_2 的，由定理4.4知对每一 $x\in X$，$\{x\}$ 为闭集。再加上准 T_1 性。由定理4.3立得 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_1 的。 ∎

由于 T_1 空间或 T_2 空间中，对每一 $x\in X$，$\{x\}$ 的导集皆 Φ，由定理3.8，有

定理4.6　若 $(L_0,\leqslant)$ 是全序的，则在 T_1 或 T_2 的 L-fuzzy 拓扑空间中，每个L-fuzzy 集的导集为闭集。

§5. Ω聚点、Lindelöf 性质、子空间、隔离性、连通性

文[2]中§§7—10的内容可以全部地，逐字逐句地转移到本文所研究的 L-fuzzy 拓扑空间中来。为了节省篇幅，就不再赘述了。惟对[2]中定理7.1的证明须略加改写如下：

定理5.1　设 $(X,\mathscr{T})$ 为遗传 Lindelöf 空间，A 为 X 上不可数的 L-fuzzy 集，属于 A 自身的 A 的 Ω 聚点全体所成的集记作 B，那末 $X_1=\mathrm{Supp}A-\mathrm{Supp}B$ 为 X 中可数分明集。

证　首先注意：$X_1=\mathrm{Supp}X_1\cap\mathrm{supp}A=\mathrm{Supp}(X_1\cap A)$。因此我们只须证明 $X_1\cap A$ 可数。任取一点 $y_\lambda\in X_1\cap A$，则 $y\notin\mathrm{Supp}B$，因而 y_λ 不是 A 的 Ω 聚点。故 y_λ 有开重域 By_λ 使 By_λ 中与 A 相重的点所成的集至多为可数。记 $\mathscr{B}=\{By_\lambda|y_\lambda\in X_1\cap A\}$，则 $D=\cup\mathscr{B}$ 是 $X_1\cap A$ 中每一点的开重域。因为 $\mathscr{B}$ 为 D 的开复盖，D 有 Lindelöf 性质，故有可数个 By_λ：$(By_\lambda)_i\in\mathscr{B}$，$i=1,2,\cdots$，使 $W=\bigcup_{i=1}^{\infty}(By_\lambda)_i\supset D$。显然 W 与 A 至多在可数个点处相重，因而 W 与 $X_1\cap A$ 至多在可数个点处相重，又由 $W\supset D$ 知 $X_1\cap A$ 中每个点都与 W 相重，故 $X_1\cap A$ 可数。 ∎

参　考　文　献

[1] Chang, C. L., Fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 24(1968), 182—189.

[2] 蒲保明、刘应明，不分明拓扑学Ⅰ——不分明点的邻近构造与 Moore-Smith 式收敛，四川大学学报（自然科学版），6(1977)，31—50. 或 J.Math. Anal. Appl., 76(1980), 571－599.

[3] Pu Pao-ming and Liu Ying-ming (蒲保明、刘应明), Fuzzy topology Ⅰ. Product and quotient spaces, *J. Math. Anal.*, 77(1980), 20—37. 中文简报见科学通报，24(1979)，3，97—100.

[4] 刘应明，不分明拓扑空间紧性与 Тихонов 定理，数学学报，24(1981)，2，260—268.

[5] 刘应明，不分明单位区间紧性的一个问题，科学通报数理化专辑（1980），33—35.

[6] Liu Yin-ming (刘应明), Intersection operation on union-preserving mappings in completely distributive lattices, *J. Math. Anal. Appl.* 83 (1981) № 2, 中文简报见自然杂志，4(1981)，1，73—74.

[7] 刘应明，不分明拓扑空间中完全正则性的点式刻划与嵌入定理，（已投稿“中国科学”）.

[8] 刘应明，格上保并映射类的逆运算及其在 Fuzzy 一致空间中的应用，模糊数学，（将发表）.

[9] 蒋继光，不分明拓扑空间的分离性公理与紧性，四川大学学报（自然科学版），3(1979)，1—10.

[10] 王国俊，拓扑分子格，陕西师大学报（自然科学版），6(1979)，1—15.

[11] 王国俊，一种比较理想的弗晰紧性，模糊数学，（将发表）.

[12] Kelley, J.L. General Topology, Princeton (1955).

[13] 李中夫，关于导集的杨忠道定理在 Fuzzy 拓扑空间中的推广，模糊数学，1(1981)，39--41.

A Class of L-Fuzzy Topological Spaces
I. Neighborhood Structure of a L-Fuzzy Point

By Li Zhongfu (李中夫)

Abstract

Suppose $(L_0, \leqslant)$ is a poset (i.e. partially ordered set) with an order reversing involution $\lambda \to \lambda'$ and has an all element 1. Let $L = \{b | b$ is a subset of L_0 and satisfies the condition: if $\lambda \in b$, $\mu \leqslant \lambda$ then $\mu \in b\}$, then $(L, \subset, \cap, \cup)$ is a complete and distributive lattice. L is called the lattice induced from poset L_0. There is a mapping $a \to a' = \{\lambda \in L_0 | \lambda' \notin a\}$ of a lattice L onto L. The mapping is clearly order reversing involution.

Let X be a non-empty ordinary set. A function A from X to lattice L as called a L-fuzzy set in X. x_λ (where $\lambda \in L_0$, $x \in X$) is called a L-fuzzy point. A L-fuzzy point x_λ is said to belong to a L-fuzzy set A, denoted by $x_\lambda \in A$, iff $\lambda \in A(x)$. The complement of A denoted by A', is defined by the formula: $A'(x) = (A(x))'$, $\forall x \in X$. A L-fuzzy point x_λ is said to be quasi-coincident with A iff $\lambda \notin A'(x)$. We have the following theorem:

Theorem (Dual principle). A L-fuzzy point x_λ is quasi-coincident with a L-fuzzy set A iff the L-fuzzy point $x_{\lambda'} \in A$; A L-fuzzy set A is a Q-neighborhood of a L-fuzzy point x_λ iff A is a neighborhood of the L-fuzzy point $x_{\lambda'}$.

In this paper, all results of [2] §§1—10 (corresponding ones of [12] ch. I) have been generalized to the mentioned L-fuzzy topological spaces and some new theorems have been given.