评

二阶线性椭圆型方程组负指数时的Poincaré边值问题*

闻国椿

（北京大学）

§1. 引　言

本文主要讨论二阶线性一致椭圆型方程组

$$\left.\begin{aligned}
&u_{jz\bar z}=Re[Q_{j1}(z)u_{1zz}+Q_{j2}(z)u_{2zz}]+(\varepsilon f_j(z,u_1,u_2,u_{1z},u_{2z})+A_5(z),\\
&f_j(u,u_1,u_2u_{1z},u_{2z})=Re[A_{j1}(z)u_{1z}+A_{j2}(z)u_{2z}+A_{j3}(z)u_1+A_{j4}(z)u_2],\\
&|Q_{j1}(z)|\leqslant q_{j1},\ |Q_{j2}(z)|\leqslant q_{j2},\ q_{j1}+q_{j2}<\frac{1}{2},\\
&\qquad\|A_{jk}(z)\|_{L_p(\bar G)}\leqslant k_0<\infty,\ p>2,\ k=1,\cdots 5,\ j=1,\ 2
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

及一致椭圆型复方程（方程组的复形式）[1]

$$\left.\begin{aligned}
&w_{z\bar z}=Q_1(z)w_{zz}+Q_2(z)\overline{w_{\bar z\bar z}}+Q_3(z)\overline{w}_{zz}+Q_4(z)w_{\bar z\bar z}+\varepsilon f(z,\\
&w,w_z,\overline{w}_z)+A_7(z),\ f(z,w,w_z,\overline{w}_z)=A_1(z)w_z+A_2(z)\overline{w_{\bar z}}\\
&+A_3(z)\overline{w}_z+A_4(z)w_{\bar z}+A_5(z)w+A_6(z)\overline{w},\ |Q_1(z)|+|Q_2(z)|\leqslant q_1,\\
&|Q_3(z)|+|Q_4(z)|\leqslant q_2,\ q_1+q_2<1,\ \|A_k(z)\|_{L_p(\bar G)}\leqslant k_0<\infty,\ p>2,\\
&k=1,\cdots,\ 7
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

于多连通区域G上两种负指数的*Poincaré*边值问题。

设G是z平面上的$N+1$连通区域，其边界$\Gamma\in C_\mu^2(0<\mu<1)$。不失一般性，可认为$G$是单位圆$|z|<1$内去掉$N$个圆的$N+1$连通圆界区域，其边界$\Gamma$是$N+1$个圆周$\Gamma_j$：$|z-z_j|=\gamma_j$，$j=0,\ 1,\cdots,\ N$，$\Gamma_0$为$|z|=1$，$z=0\in G$，因为这可通过对自变量$z$的保角变换即达要求，而方程组（1.1）及（1.2）的一致椭圆型条件仍保持不变。

本文中所要讨论的第一种边值问题是二阶方程组（1.1）如下的Poincaré问题，其边界条件为

$$\frac{\partial u_j}{\partial \nu_j}+2\varepsilon[\beta_{j1}(z)u_1(z)+\beta_{j2}(z)u_2(z)]=2\beta_{j3}(z),z\in\Gamma,j=1,2,\tag{1.3}$$

这里ν_j是区域G的边界Γ上的方向之量，其分量在Γ上满足指数为μ的Hölder连续条件，$\beta_{jk}(z)\in C_\mu(\Gamma)$，$k=1,\ 2,\ 3$，$j=1,\ 2$，$\frac{1}{2}<\mu<1$，$-\infty<\varepsilon<\infty$。我们可将边界条件（1.3）写成复形式。事实上，由于

* 1981年3月30日收到。

五

$$\frac{\partial u_j}{\partial \nu_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x}\cos\alpha_j+\frac{\partial u_j}{\partial y}\cos\beta_j=\overline{\lambda_j(z)}u_{jz}+\lambda_j(z)u_{j\bar{z}}$$

$$=2Re[\overline{\lambda_j(z)}u_{jz}],\quad \overline{\lambda_j(z)}=\cos\alpha_j+i\cos\alpha_j,\quad j=1,\ 2, \tag{1.4}$$

故 (1.3) 可写成

$$Re[\overline{\lambda_j(z)}u_{jz}]+\varepsilon[\beta_{j1}(z)u_1+\beta_{j2}(z)u_2]=\beta_{j3}(z),\quad z\in\Gamma,\quad j=1,\ 2, \tag{1.5}$$

其中指数 $x_j=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\lambda_j(z)<0$，$j=1, 2$。现在简化上述复数形式的边界条件 (1.5)。注意到

$$\overline{\lambda_j(z)}=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^{x_j}\Pi_j(z)}{|\Pi_j(z)|}e^{-i[\arg\lambda_j(z)-x_j\arg z+\arg\Pi_j(z)]},\ z\in\Gamma_0,\\[2ex] \dfrac{\Pi_j(z)}{|\Pi_j(z)|}e^{-i[\arg\lambda_j(z)+\arg\Pi_j(z)]}, z\in\Gamma_k,\ k=1,\cdots,\ N,\end{cases} \tag{1.6}$$

此处 $x_{jk}=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_k}\arg\lambda_j(z)$，$k=1,\cdots, N$，$\Pi_j(z)=\prod_{k=1}^{N}(z-z_k)^{x_{jk}}$，记

$$S_{j1}(z)=\begin{cases}\arg\lambda_j(z)-x_j\arg z+\arg\Pi_j(z),\ z\in\Gamma_0,\\ \arg\lambda_j(z)+\arg\Pi_j(z), z\in\Gamma_k,\ k=1,\cdots,\ N.\end{cases} \tag{1.7}$$

我们可求出区域G内的解析函数$S_j(z)$，适合边界条件：

$$Re[S_j(z)]=S_{j1}(z)-\theta_j(z),\quad z\in\Gamma,\quad S_j(1)=S_{j1}(1)-\theta_j(1),\quad j=1,\ 2, \tag{1.8}$$

这里$\theta_j(z)=\theta_{jk}(k=0, 1,\cdots, N, j=1, 2)$ 都是实常数，记 $S_{j2}(z)=ImS_j(z)$，当 $z\in\overline{G}$，则

$$-iS_{j1}(z)=-is_j(z)-s_{j2}(z)-i\theta_j(z), \tag{1.9}$$

作函数的变换

$$w_j(z)=e^{-is_j(z)}\Pi_j(z)u_{jz}=u_{jz}/\Psi_j(z),\quad j=1,\ 2, \tag{1.10}$$

则边界条件 (1.5) 转化为

$$Re\{\overline{\lambda_j(z)}w_j(z)+\varepsilon[B_{j1}(z)u_1(z)+B_{j2}(z)u_2(z))]\}+B_{j3}(z),$$
$$z\in\Gamma,\quad j=1,\ 2, \tag{1.11}$$

这里

$$\overline{\lambda_j(z)}=\begin{cases}e^{-i\theta_{j0}}\bar{z}^{x_j},\ z\in\Gamma_0,\\ e^{-i\theta_{jk}},\ z\in\Gamma_k,\ k=1,\cdots,\ N,\end{cases}\qquad B_{jk}(z)=|\Pi_j(z)|e^{s_{j2}(z)}\beta_{jk}(z),$$

$k=1, 2, 3$，$j=1, 2$。我们设 $B_{jk}(z)$ 满足条件：

$$C_\mu[B_{jk}(z),\ \Gamma]\leqslant l_0<\infty,\quad \frac{1}{2}<\mu<1,\quad k=1,\ 2,\ 3,\quad j=1,\ 2. \tag{1.12}$$

在变换 (1.10) 之下，方程组 (1.2) 转化为关于 $w_j(z)$、$u_j(z)$ 的一阶方程组

$$w_{j\bar{z}}=[\Psi_j(z)]^{-1}\{Re[Q_{j1}(\Psi_1w_{1z}+\Psi_1'w_1)+Q_{j2}(\Psi_2w_{2z}$$
$$+\Psi_2'w_2)]+\varepsilon f_j(z,\ u_1,\ u_2,\ u_{1z},\ u_{2z})+A_{j5}\},\qquad j=1,2. \tag{1.13}$$

如果边界条件（1.3）中的 ν_1 与 ν_2 不相同，则 $\Psi_1(z)$ 与 $\Psi_2(z)$ 也不同，此时，若补充假设 $|\Psi_2(z)Q_{12}(z)/\Psi_1(z)|\leqslant q_{12}$，$|\Psi_1(z)Q_{21}(z)/\Psi_2(z)|\leqslant q_{21}$，则仍可与原情形一样地讨论。如果（1.3）中的 $\nu_1=\nu_2$，则（1.10）式中的 $\Psi_1(z)=\Psi_2(z)$，而一阶方程组（1.13）的系数满足类似于二阶方程组（1.1）的系数所满足的条件。又当 $N=0$，$\varkappa_1=\varkappa_2=-1$，$\theta_{j0}=0$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 时，则（1.11）就是单位圆上的 Neumann 边界条件与 Dirichlet 边界条件。下面，我们不妨只讨论二阶方程组（1.1）适合边界条件

$$Re\{\overline{\lambda_j(z)}u_{jz}+\varepsilon[B_{j1}(z)u_1+B_{j2}(z)u_2]\}=B_{j3}(z),\ z\in\Gamma,\ j=1,\ 2. \tag{1.14}$$

的 Poincaré 问题，并简称此边值问题为**问题 PI**。由于指数 $\varkappa_j<0$，$j=1$，2，上述问题 PI 不一定可解，因此，我们先考虑一阶方程组

$$w_{j\bar z}=Re[Q_{j1}(z)w_{1z}+Q_{j2}(z)w_{2z}]+\varepsilon f_j(z,\ u_1,\ u_2,\ u_{1z},\ u_{2z})+A_{j5}(z) \tag{1.15}$$

$(j=1,\ 2)$ 适合如下变态边界条件：

$$Re\{\overline{\lambda_j(z)}w_j(z)+\varepsilon[B_{j1}(z)u_1(z)+B_{j2}(z)u_2(z)]\}=B_{j3}(z)+h_j(z),\ z\in\Gamma,\ j=1,\ 2, \tag{1.16}$$

之边值问题，在上式中，$\lambda_j(z)$、$B_{jk}(z)$ 如（1.11）、（1.12）中所设，又

$$h_j(z)=\begin{cases} h_{j0}+Re\sum\limits_{m=1}^{-\varkappa_j-1}(\lambda_{jm}^{+}+i\lambda_{jm}^{-})z^m,\ z\in\Gamma_0,\\ h_{jk},\ z\in\Gamma_k,\ k=1,\ \cdots,\ N,\ j=1,2, \end{cases} \tag{1.17}$$

这里 $h_{jk}(k=0,\ \cdots,\ N)$。$\lambda_{jm}^{\pm}(m=1,\cdots,\ |\varkappa_j|-1,\ j=1,\ 2)$ 都是待定常数，又方程组（1.15）、边界条件（1.16）中的 $w_j(z)$、$u_j(z)$ 满足如下的关系式：

$$u_j(z)=u_{j0}+Re\int_0^z\left[2w_j(z)+\sum_{k=1}^{N}\frac{d_{jk}}{z-z_k}\right]dz, \tag{1.18}$$

其中 u_{10}、u_{20} 是任意实常数，$d_{jk}(k=1,\cdots,\ N,\ j,\ 1,\ 2)$ 都是适当选取的实常数，使得（1.18）的右边由积分所确定的函数在 G 内单值。我们把求方程组（1.15）适合边界条件（1.16）、（1.17）与关系式（1.18）的解 $w_j(z)$、$u_j(z)$ $(j=1,\ 2)$ 简称为**问题QI**。

本文所要讨论的第二种边值问题是二阶复方程（1.2）如下的 Poincaré 问题，其边界条件为

$$Re[\overline{\lambda_1(z)}w_z+\varepsilon\beta_{11}(z)w]=\beta_{12}(z),$$

$$Re[\overline{\lambda_2(z)}\overline{w_z}+\varepsilon\beta_{21}(z)w]=\beta_{22}(z),\ z\in\Gamma, \tag{1.19}$$

其中 $|\lambda_j(z)|=1$，$j=1$，2，$\varkappa_j=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda_j(z)<0$。类似于把边界条件（1.5）转化为标准形式的边界条件（1.11）也可把边界条件（1.19）转化为如下的标准形式

$$Re[\overline{\lambda_j(z)}U_j(z)+\varepsilon B_{j1}(z)w]=B_{j2}(z),\ z\in\Gamma,\ j=1,\ 2, \tag{1.20}$$

其中 $\lambda_j(z)$、$B_{jk}(z)$ 如（1.11）、（1.12）中所设，我们就把二阶复方程（1.2）适合边界条件

$$Re[\overline{\lambda_1(z)}w_z+\varepsilon B_{11}(z)w]=B_{12}(z),$$

$$Re[\overline{\lambda_2(z)}\,\overline{w_z}+\varepsilon B_{21}(z)w]=B_{22}(z),\tag{1.21}$$

之边值问题简称为**问题PII**。并考虑相应于二阶复方程（1.2）之一阶微分积分方程

$$U_{1\bar z}=Q_1(z)U_{1z}+Q_2(z)\overline{U_{1\bar z}}+Q_3(z)U_{2z}+Q_4(z)\overline{U_{2\bar z}}$$
$$+\varepsilon f(z,\ w,\ w_z)+A_7(z)\tag{1.22}$$

适合变态边界条件：

$$Re[\overline{\lambda_j(z)}U_j(z)+\varepsilon B_{j1}(z)w(z)]=B_{j2}(z)+h_j(z),\quad z\in\Gamma,\ j=1,\ 2\tag{1.23}$$

之边值问题，在上式中，$\lambda_j(z)$、$B_{jk}(z)$、$h_j(z)$ 如（1.16）中所述，又复方程（1.22）及边界条件（1.23）中的 $U_j(z)$ （$j=1,\ 2$）与 $w(z)$ 应满足如下的关系式

$$w(z)=w_0+\int_D^z\left\{U_1(z)dz+U_2(z)d\bar z+\sum_{k=1}^N\frac{d_k}{z-z_k}dz\right\},\quad U_{1\bar z}=\overline{U_{2z}},\tag{1.24}$$

这里 $d_k(k=1,\ \cdots,\ N)$ 都是适当选取的复常数，使得（1.24）右边由积分所确定的函数在G内单值，又 w_0 是任意复常数。我们便把求方程（1.22）适合边界条件（1.23）与关系式（1.24）的解 $U_j(z)$ （$j=1,\ 2$）、$w(z)$ 记作**问题QII**。

本文中，我们构造了适合边界条件（1.16）及（1.23）的某种齐次边界条件的二重积分算子$\tilde T_jw(j=1,\ 2)$，并证明了$\tilde S_jw=(\tilde T_jw)_z$满足 $\|\tilde S_j\|_{L_2(\bar G)}\leqslant 1$，$j=1,\ 2$。然后使用线性算子方程的 Fredholm 定理，完整的讨论了一阶方程组（1.15）之问题 QI 及一阶复方程（1.22）之问题 QII 的可解性，进而给出了二阶方程组（1.1）的问题 PI 及二阶复方程（1.2）的问题 PII 的可解条件。关于二阶方程组（1.1）及二阶复方程（1.2）于多连通区域上的前述 Poincaré 边值问题，没有看到国内外有其他人这样完整的解决过。

§2. 解析函数变态的 Riemann-Hilbert 边值问题（当$x<0$）解的存在唯一性

为了建立适合边界条件（1.16）及（1.23）的积分算子，本节先来证明解析函数适合边界条件

$$Re[\overline{\lambda(t)}\Phi(t)]=r(t)+h(t),\quad t\in\Gamma,\quad \lambda(t)=\begin{cases}e^{i\theta_0}t^x, & t\in\Gamma_0,\ x<0,\\ e^{i\theta_k}, & t\in\Gamma_k,\ k=1,\cdots,\ N,\end{cases}$$

$$C_x[r(t),\Gamma]\leqslant l_0<\infty,\quad h(t)=\begin{cases}h_0+Re\displaystyle\sum_{m=1}^{|x|-1}(\lambda_m^++i\lambda_m^-)t^m, & t\in\Gamma_0,\\ h_k\ (\text{待定常数}), & t\in\Gamma_k,\ k=1,\cdots,\ N\end{cases}$$

之变态 Riemann—Hilbert 边值问题（简称**问题R**）解的存在唯一性。

定理2.1 解析函数适合边界条件（2.1）的解是存在唯一的。

证明： 先证存在性。我们只要证能找到边界条件（2.1）中的待定常数$h_k(k=0,1,\cdots,N)$及$\lambda_m^{\pm}(m=1,\cdots,|\varkappa|-1)$，使得解析函数问题$R$的可解条件是满足的，即

$$\int_\Gamma \lambda(t)\Psi_n(t)[r(t)+h(t)]t'(s)ds=0,\ n=1,\cdots,N-2\varkappa-1, \tag{2.2}$$

其中$\Psi_n(z)(n=1,\cdots,N-2\varkappa-1)$是问题$R$的共轭齐次问题$R_0'$的线性无关解的完全组，它们适合边界条件

$$Re[\lambda(t)\Psi_n(t)t'(s)]=0,\ t\in\Gamma,\ n=1,\cdots,N-2\varkappa-1 \tag{2.3}$$

（见书［2］定理4.12）。下面先用反证法证明（2.2）中$h_k(k=0,\cdots,N)$、$\lambda_m^{\pm}(m=1,\cdots,|\varkappa|-1)$的系数行列式

$$J=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-2\varkappa-1} \\ & \cdots & \\ a_{N-2\varkappa-1,1} & \cdots & a_{N-2\varkappa-1,N-2\varkappa-1}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{2.4}$$

其中

$$a_{n,k+1}=\int_{\Gamma_k}\lambda(t)\Psi_n(t)t'(s)ds, k=0,1,\cdots,N,\ n=1,\cdots,N-2\varkappa-1,$$

$$a_{n,k}=\int_{\Gamma_0}\lambda(t)\Psi_n(t)t'(s)\cos(k-N-1)sds,\ k=N+2,\cdots,N-\varkappa,$$

$$a_{n,k}=-\int_{\Gamma_0}\lambda(t)\Psi_n(t)t'(s)\sin(k-N+\varkappa)sds,\ k=N-\varkappa+1,\cdots,N-2\varkappa-1.$$

假如不然，即$J=0$，则可找到不全等于0的实常数$c_1,\cdots,c_{N-2\varkappa-1}$，使

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\Gamma_k}Im[\lambda(t)\Psi(t)t'(s)]ds=0,\ k=0,\cdots,N)\\&\int_{\Gamma_0}Im[\lambda(t)\Psi(t)t'(s)]\cdot\begin{Bmatrix}\cos m\arg t\\ \sin m\arg t\end{Bmatrix}ds=0,\ m=1,\cdots,|\varkappa|-1,\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中$\Psi(z)=\sum_{n=1}^{N-2\varkappa-1}c_n\Psi_n(z)$是共轭齐次问题$R_0'$（指数为$N-\varkappa-1$）的非零解。由（2.5）的第一式，可推知在$\Gamma_k$上有点$a_k^*$，使$Im[\lambda(t)\Psi(t)t'(s)]|_{t=a_k^*}=0$，$k=1,\cdots,N$；联合（2.3）式，知

$$\lambda(t)\Psi(t)t'(s)|_{t=a_k^*}=0,\ 即\ \Psi(a_k^*)=0,\ k=1,\cdots,N. \tag{2.6}$$

另外，用$U(z)$表示单位圆E_1: $|z|<1$内的调和函数，它以$Im[\lambda(t)\ \Psi(t)\ t'(s)]$为边值，那么由Poisson公式，我们有

$$U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(t)Re\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\theta=Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(t)\frac{1+\dfrac{z}{t}}{1-\dfrac{z}{t}}d\theta$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(t)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(t)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^j d\theta = Re\frac{z^{|x|}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U(t)d\theta}{t^{|x|-1}(t-z)}, \qquad (2.7)$$

当 $|z|<1$. 由此得知：$U(z)$ 通过 $z=0$ 的等值线 $U(z)=0$ 不少于 $2|x|$ 条，因而若 $U(z)\neq 0$，则知 $U(z)$ 在 Γ_0：$|t|=1$ 上至少有 $2|x|$ 个零点，记其中的 $2|x|$ 个零点为 a_k^*，$k=N+1,\cdots,N+2|x|$，故

$$\lambda(t)\Psi(t)t'(s)|_{t=a_k^*}=0,\ \text{即}\ \Psi(a_k^*)=0,\ k=N+1,\cdots,N-2x. \qquad (2.8)$$

联合（2.6）、（2.8），并注意 $\Psi(z)$ 在 $\Gamma_k(k=1,\cdots,N)$ 上的零点各有偶数个，这样便知 $\Psi(z)$ 在 Γ 上至少有 $2N-2x$ 个零点，由［2］定理 4.7，就可导出矛盾的不等式：

$$2N-2x\leqslant 2N_G+N_\Gamma\leqslant 2(N-x-1)=2N-2x-2, \qquad (2.9)$$

此矛盾证明了（2.4）式成立。这样就可以从 $N-2x-1$ 个代数方程（2.2）中确定 $N-2x-1$ 个待定常数 $h_k(k=0,\cdots,N)$、$\lambda_m^{\pm}(m=1,\cdots,|x|-1)$，对于由这组常数所确定的 $h(t)$，（2.2）式是成立的，因而从得知对于这样的 $h(t)$，解析函数适合边界条件（2.1）之问题 R 存在着解 $\Phi(z)$。

其次证明解析函数问题 R 的解的唯一性。设 $\Phi_1(z)$、$\Phi_2(z)$ 是解析函数问题 R 的两个解，记 $\Phi(z)=\Phi_1(z)-\Phi_2(z)$，则 $\Phi(z)$ 适合问题 R 的齐次边界条件。

$$Re[\overline{\lambda(t)}\Phi(t)]=h(t),\quad t\in\Gamma. \qquad (2.10)$$

我们可证上式中的 $h(t)\equiv 0$。因为对于由 $\Phi(z)$ 确定的 $h(t)$，有

$$\int_\Gamma \lambda(t)\Psi_n(t)h(t)t'(s)ds=0,\quad n=1,\cdots,N-2x-1, \qquad (2.11)$$

其中 $\Psi_n(z)$ 是共轭齐次问题 R_0' 的线性无关解，如（2.2）中所述，我们还可如前那样证明（2.4）式成立，因而 $h(t)$ 中的 $h_k(k=0,\cdots,N)$、$\lambda_m^{\pm}(m=1,\cdots,|x|-1)$ 全等于0，即 $h(t)\equiv 0$。再由［2］定理 4.5，便知 $\Phi(z)\equiv 0$，即 $\Phi_1(z)\equiv\Phi_2(z)$，当 $z\in\overline{G}$。

现在我们叙述解析函数问题 R 的解 $\Phi(z)$ 所满足的估计式。

定理2.2 设 $\Phi(z)$ 是解析函数问题 R 的解，则 $\Phi(z)$ 满足估计式

$$C_\mu[\Phi(z),\overline{G})\leqslant M_{21},\quad \|\Phi'(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M_{22}, \qquad (2.12)$$

这里 $\frac{1}{2}<\mu<1$，$2<p_0<\frac{1}{1-\mu}$，$M_k=M_k(p_0,G,\mu,l_0)$，$k=21,22$

证明：仿照［3］第三章引理 4.1 的证法，使用本节定理 2.1 的结果，我们可证：

$$|h(t)|\leqslant M_{23}=M_{23}(p_0,G,\mu,l_0), \qquad (2.13)$$

其中 $h(t)$ 是将问题 R 的解 $\Phi(z)$ 代入边界条件（2.1）所确定的函数。有了估计式（2.13），再仿［3］第三章定理 6.1 的证法，便可导出：$\Phi(z)$ 满足估计式（2.12）。

§3. 一阶复方程变态的 Riemann-Hilbert 边值问题 (当x<0) 解的积分表示

本节，我们要给出一阶复方程

$$w_{\bar z}=\omega(z),\ \|\omega(z)\|_{L_{p_0}(\bar G)}\leqslant k_0<\infty,\ p>2 \tag{3.1}$$

适合边界条件：

$$Re[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t)+h(t),\ t\in\Gamma \tag{3.2}$$

($\lambda(t)$、$r(t)$、$h(t)$ 如 (2.1) 中所示) 之问题 R 解的积分表示式。下面，先构造复方程 (3.1) 适合 (3.2) 的齐次边界条件

$$Re[\overline{\lambda(t)}w(t)]=h(t),\ t\in\Gamma \tag{3.3}$$

之问题 R_0 的解 $w(z)$ 的积分算子。记

$$\left.\begin{aligned}&G_1(z,\zeta)=\frac{1}{\zeta-z}+\sum_{k=0}^{N}g_k(z,\zeta),\ G_2(z,\zeta)=\frac{1}{\zeta-z}-\sum_{k=0}^{N}g_k(z,\zeta),\\&g_0(z,\zeta)=\frac{e^{2i\theta_0}\zeta^{2|x|-1}}{1-\zeta z},\ g_k(z,\zeta)=\frac{e^{2i\theta k}(z-z_k)}{r_k^2-\overline{(\zeta-z_k)}(z-z_k)},k=1,\cdots,N.\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

又设

$$\left.\begin{aligned}&T\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,\ T_0\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G g_0(z,\zeta)\overline{\omega(\zeta)}d\sigma_\zeta,\\&T_k\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G g_k(z,\zeta)\overline{\omega(\zeta)}d\sigma_\zeta,\ k=1,\cdots,N\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

然后求适合以下边界条件的解析函数 $\Psi(z)$。

$$\begin{aligned}&Re[\overline{\lambda(t)}\Psi(t)]=-Re[\overline{\lambda(t)}R(t)]+h(t),\\&R(t)=\sum_{\substack{m=0\\m\neq k}}^{N}T_m\omega,\qquad t\in\Gamma_k,\ k,\ 0,\cdots,\ N\end{aligned} \tag{3.6}$$

从定理 2.1，可知这样的解析函数 $\Psi(z)$ 是存在唯一的，记 $T_*\omega=\Psi(z)$，并设

$$\begin{aligned}\tilde T\omega=&-\frac{1}{\pi}\iint_G[G_1(z,\zeta)Re\omega(\zeta)+iG_2(z,\zeta)I_m\omega(\zeta)]\cdot d\sigma_\zeta\\&+T_*\omega=T\omega+\sum_{k=0}^{N}T_k\omega+T_*\omega,\ \omega(z)\in L_p(\bar G),\ p>1.\end{aligned} \tag{3.7}$$

我们可证关于积分算子 $\tilde T\omega$ 的如下结果。

定理3.1 设 $\omega(z)\in L_p(\bar G)$，$p>1$，则$\tilde T\omega$具有下列性质：

(1) $(\tilde T\omega)_{\bar z}=\omega(z)$，$\tilde S\omega=(\tilde T\omega)_z=\Pi\omega+\sum_{k=0}^{N}\Pi_k\omega+\Pi_*\omega$，

其中

$$\left.\begin{aligned}&\Pi\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta,\ \Pi_k\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{e^{2i\theta_0}\bar{\zeta}^{2|x|}\overline{\omega(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}z)^2}d\sigma_\zeta\\&\Pi_k\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{e^{2i\theta_k}\overline{\omega(\zeta)}\gamma_k^2d\sigma_\zeta}{[r_k^2-\overline{(\zeta-z_k)}(z-z_k)]^2},\ k=1,\cdots,N,\ \Pi_*\omega=(T_*\omega)_z,\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

(2) $\tilde{S}\omega=(\tilde{T}\omega)_z$ 是$L_p(\overline{G})$上的线性有界算子，满足

$$\|\tilde{S}\omega\|_{L_p(\overline{G})}\leqslant\lambda_p\|\omega\|_{L_p(\overline{G})},\tag{3.9}$$

其中 λ_p 是使上式成立的最小常数，且

$$\lambda_2\leqslant 1.\tag{3.10}$$

(3) 对于非负常数 $q_0(0\leqslant q_0<1)$，则存在常数 $p_0\left(2<p_0<\min\left(p,\frac{1}{1-\mu}\right)\right)$，使

$$q_0\lambda_{p_0}<1.\tag{3.11}$$

(4) 当 $p>2$，又 $2<p_0\leqslant p$ 时，$\tilde{T}\omega$ 满足估计式

$$C_\alpha[\tilde{T}\omega,\ \overline{G}]\leqslant M_{31}\|\omega\|_{L_{p_0}(\overline{G})},\tag{3.12}$$

这里 $\alpha=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$M_{31}=M_{31}(p_0,G)$；又 $\tilde{T}\omega$ 适合问题 R_0 的边界条件：

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}\tilde{T}\omega]=h(t),\ t\in\Gamma.\tag{3.13}$$

证明： (1) 注意到 (3.4)、(3.5)，即得 (1) 中各式。

(2) 为了证明 (3.9) 式。任取 $\omega(z)\in L_p(\overline{G})$，$p>1$，不妨设 $\|\omega(z)\|_{L_p(\overline{G})}\neq 0$，用 $\|\omega\|=\|\omega(z)\|_{L_p(\overline{G})}$ 除 $\omega(z)$，记 $\omega^*(z)=\dfrac{\omega(z)}{\|\omega\|}$，则$\|\omega^*\|=1$。如书 [2] 第四章 §9，可证

$$\|\Pi\omega^*\|\leqslant\lambda_{1p},\ \|\Pi_k\omega^*\|\leqslant\lambda_{2p},\ k=0,\cdots,\ \|T_*\omega^*\|\leqslant\lambda_{3p},\tag{3.14}$$

其中 $\lambda_{jp}(j=1,2,3)$ 是只与 p，G有关的常数。联合上面三式，即得

$$\|\tilde{S}\omega^*\|\leqslant\lambda_p<\infty\tag{3.15}$$

由上式易得(3.9)式。现在我们来证明(3.10)式。设$\omega(z)\in D_\infty^0(G)$，则由格林公式，有

$$\begin{aligned}\|\tilde{S}\omega\|_{L_2}^2&=\iint_G(\tilde{T}\omega)_z\cdot\overline{(\tilde{T}\omega)_{\bar z}}d\sigma_z\\&=\iint_G[(\overline{(\tilde{T}\omega)}\cdot(\tilde{T}\omega)_z]_{\bar z}d\sigma_z-\iint_G\overline{\tilde{T}\omega}\cdot\omega_z d\sigma_z\\&=\frac{1}{2i}\int_\Gamma(\overline{\tilde{T}\omega})\cdot(\tilde{T}\omega)_z dz-\iint_G[\overline{\tilde{T}\omega}\cdot\omega]_z d\sigma_z+\iint_G\overline{\omega}\omega d\sigma_z\\&=\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_\Gamma(\overline{\tilde{T}\omega})(\tilde{T}\omega)_z dz\\&\quad+\frac{1}{2i}\int_\Gamma\overline{\tilde{T}\omega}\cdot\omega d\bar{z}+\|\omega\|_{L_2}^2=I+\|\omega\|_{L_2}^2,\end{aligned}\tag{3.16}$$

由于$\omega(z)$在区域G的边界Γ附近等于0，易知$\tilde{T}\omega$适合边界条件(3.13)，设$R(t)=\sum_{m=-1}^{x}H_m t^m$，$H_m=\lambda_{|x|+m}^++i\lambda_{|x|+m}^-$，$m=-1,\cdots,x$，$\lambda_0^+=h_0$，$\lambda_0^-=0$；记 $U(t)=e^{-i\theta_0}\tilde{T}\omega-R(t)$，当 $|t|=1$，于是有

$$\mathrm{eR}[t^{|x|}U(t)]=0,\ \text{当}\, t\in\Gamma_0:\ |t|=1. \tag{3.17}$$

将（3.17）在 Γ_0 上对 $t=e^{i\theta}$ 的幅角 θ 微商，则有

$$\left.\begin{aligned}&Re[it^{|x|+1}U_t-it^{|x|-1}U_{\bar t}+i|x|t^{|x|}U(t)]=0,\ \text{当}\, t\in\Gamma_0,\\&\text{即}\ Re[it^{|x|+1}U_t]=Re[ixt^{|x|}U(t)],\ \text{当}\, t\in\Gamma_0;\\&e^{i\theta_k}\overline{\widetilde{T}\omega}=-e^{-i\theta_k}\widetilde{T}\omega+2h_k,\quad \text{即}\ \overline{\widetilde{T}\omega}=-e^{-2i\theta_k}\widetilde{T}\omega+2d_ke^{-i\theta_k},k=1,\cdots,N\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

因此，由格林公式，有

$$I=\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_\Gamma\overline{\widetilde{T}\omega}\cdot(\widetilde{T}\omega)_zdz=\sum_{k=1}^N Re\left[\frac{-1}{2i}\int_{\Gamma_k}e^{-2\theta_k}\cdot\widetilde{T}\omega(\widetilde{T}\omega)_zdz\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i}\int_{\Gamma_k}e^{-i\theta_k}h_k(\widetilde{T}\omega)_zdz\right]+$$

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_0}\cdot[\overline{U(z)+R(z)}]\cdot[U_z+R'(z)]dz=\sum_{k=1}^N\mathrm{Re}\left[\frac{-1}{4i}\int_{\Gamma_k}e^{-2i\theta_k}\cdot d(\widetilde{T}\omega)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i}\int_{\Gamma_k}e^{-i\theta_k}h_kd\widetilde{T}\omega\right]+$$

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_0}[\overline{U(z)}U_z+\overline{R(z)}R'(z)+\overline{U(z)}R'(z)+\overline{R(z)}U_z]dz$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Gamma_k}[\overline{iz^{|x|}U(z)}\cdot iz^{|x|+1}U_z+\overline{R(z)}R'(z)z]d\theta\right.$$

$$+\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_0}[\overline{U(z)}R'(z)\,dz+\overline{R(z)}]dU$$

$$=\mathrm{Re}\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}[\overline{iz^{|x|}U(z)}]\cdot[\mathrm{Re}iz^{|x|+1}U_z+iImiz^{|x|+1}U_z]d\theta$$

$$+\mathrm{Re}\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\overline{R(z)}R'(z)zd\theta+\mathrm{Re}\int_{\Gamma_0}\overline{U(z)}R'(z)zd\theta$$

$$=\mathrm{Re}\frac{x}{2}\int_{\Gamma_0}|\mathrm{Re}iz^{|x|}U(z)|^2d\theta-\mathrm{Re}\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}Im\overline{iz^{|x|}U(z)}\cdot Im[iz^{|x|+1}U_z]d\theta$$

$$+\pi\sum_{m=-1}^{x}m|H_m|^2+\mathrm{Re}\int_{\Gamma_0}[\overline{iz^{|x|}U(z)}]\left[i\sum_{m=-1}^{x}mH_mz^{m+|x|}\right]d\theta$$

$$=\frac{x}{2}\int_{\Gamma_0}|\mathrm{Re}iz^{|x|}U(z)|^2d\theta$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\mathrm{Re}[z^{|x|}U(z)]\cdot Im[iz^{|x|+1}U_z]d\theta$$

$$+\pi\sum_{m=-1}^{x}m|H_m|^2-\int_{\Gamma_0}\mathrm{Re}[iz^{|x|}U(z)]\cdot Im\sum_{m=-1}^{x}mH_mz^{m+|x|}]d\theta$$

$$=x\pi\left[\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}\right)\right]+\pi\sum_{m=-1}^{x}m|H_m|^2$$

$$-\pi\sum_{m=-1}^{x} m\Big[\mathrm{Re}H_m\cdot b_{m+|x|}+ImH_m\cdot a_{m+|x|}\Big]$$

$$\leqslant\pi\sum_{m=-1}^{x} m\Big[\frac{a_{m+|x|}^2+b_{m+|x|}^2}{4}+|H_m|^2-\mathrm{Re}H_m b_{m+|x|}$$

$$-ImH_m\cdot a_{m+|x|}\Big]\leqslant 0; \tag{3.19}$$

其中a_n、b_n($n=0$, 1,…)为$\mathrm{Re}iz^{|x|}U(z)$的伏里埃级数的系数。联合(3.16)、(3.19),有

$$\|\widetilde{S}\omega\|_{L_2}^2\leqslant\|\omega\|_{L_2}^2, \tag{3.20}$$

由于$D_\infty^\circ(G)$在$L_2(\overline{G})$中的稠密性,则知对任意的$\omega(z)\in L_2(\overline{G})$,(3.20)式仍成立,故$\lambda_2\leqslant 1$。从上面的推算还可看出:当$x=0$时,也有$\lambda_2\leqslant 1$。

(3) 由Riesz凸性定理,便知(3.11)式是成立的。

(4) 当$2<p_0\leqslant p$时,对任意的$\omega(z)\in L_p(\overline{G})$,也有$\omega(z)\in L_{p_0}(\overline{G})$。不妨设$\|\omega\|_{L_p(\overline{G})}\neq 0$,记$\omega^*(z)=\dfrac{\omega(z)}{\|\omega\|}$,则仿[2]定理1.23,可证:$T\omega^*$、$T_k\omega^*$($k=0$, 1,…, N)及$T_*\omega^*$满足(3.21) $C_\alpha[T\omega^*,\overline{G}]\leqslant M_{32}$, $C_\alpha[T_k\omega^*,\overline{G}]\leqslant M_{33}$, $k=0,\cdots,N$, $C_\alpha[T_*\omega^*,\overline{G}]\leqslant M_{34}$,这里$\alpha=\dfrac{p_0-2}{p_0}$, $M_k=M_k(p_0, G)$, $k=32$, 33, 34。联合以上各式,便知(3.12)式成立。至于$\widetilde{T}\omega$适合边界条件(3.13)是明显的。

其次,我们给出一阶复方程(3.1)适合边界条件(3.2)之问题R的解$w(z)$的表示式与估计式。

定理3.2 (1) 对于一阶复方程(3.1),它的问题R的解$w(z)$是存在唯一的,且具有表示式

$$w(z)=\Phi(z)+W(z)=\Phi(z)+\widetilde{T}\omega, \tag{3.22}$$

其中$W(z)=\widetilde{T}\omega$如(3.7)式所示,具有定理3.1中所述的性质,而$\Phi(z)$是适合边界条件(3.2)的解析函数。

(2) 上述问题R的解$w(z)$满足估计式:

$$C_\alpha[w(z),\overline{G}]\leqslant M_{35},\quad \||w_{\bar z}|+|w_z|\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M_{36}, \tag{3.23}$$

这里$\alpha=\dfrac{p_0-2}{p_0}$, $2<p_0<\min\Big(p,\dfrac{1}{1-\mu}\Big)$, $M_k=M_k(p_0, k_0, G, \mu, l_0)$, $k=35$, 36。

证明:由定理2.1,定理2.2.定理3.1,即得本定理的各结果。

§4. 方程组(1.15)之问题QI与方程组(1.1)之问题PI的可解性

本节将讨论二阶线性一致椭圆型方程组(1.1)之问题PI的可解性。如在§1中所述,我们先求一阶方程组(1.15)即

$$L_j w = w_{j\bar{z}} - \mathrm{Re}[Q_{j1}(z)w_{1z} + Q_{j2}(z)w_{2z}]$$
$$= \varepsilon f_j(z, u_1, u_2, u_{1z}, u_{2z}) + A_{j5}(z), \quad j=1, 2 \tag{4.1}$$

之问题 QI 的解，也就是求方程组（4.1）适合边界条件

$$l_j w = \mathrm{Re}[\overline{\lambda_j(t)} w_j(t)] = -\varepsilon \mathrm{Re}[B_{j1}(t)u_1(t) + B_{j2}(t)$$
$$\cdot u_2(t)] + B_{j3}(t) + h_j(t) \tag{4.2}$$

$(j=1,2)$ 及关系式（1.18）的解 $w_j(z)$、$u_j(z)$ $(j=1, 2)$。为此，我们来求一阶方程组

$$L_j w = A_{j5}(z), \quad j=1, 2 \tag{4.3}$$

适合边界条件

$$l_j w = B_{j3}(t) + h_j(t), \quad t \in \Gamma, \quad j=1, 2 \tag{4.4}$$

的唯一解 $w_{j0}(z)$，$j=1, 2$，记 $w_0(z) = [w_{10}(z), w_{20}(z)]$。并求一阶方程组

$$L_j w = f_j(z, u_1, u_2, u_{1z}, u_{2z}), \quad u_j(z) \in C^1(\overline{G}), \quad j=1, 2 \tag{4.5}$$

适合边界条件

$$l_j w = -\mathrm{Re}[B_{j1}(t)u_1(t) + B_{j2}(t)u_2(t)] + h_j(t), \quad t \in \Gamma, \quad j=1, 2 \tag{4.6}$$

之唯一解 $w_j(z)$，$j=2$。记从 $u(z) = [u_1(z), u_2(z)] \in C^1(\overline{G}) \times C^1(\overline{G})$ 到 $w(z) = [w_1(z),$ $w_2(z)] \in C_\alpha(\overline{G}) \times C_\alpha(\overline{G})$ 的映射为 $w = T_1 u$。根据定理3.1，定理3.2，可知 $w_j(z)$ 能表成

$$w_j(z) = \Phi_j(z) + \widetilde{T}_j \omega_j, \quad j=1, 2, \tag{4.7}$$

这里 $\Phi_j(z)$ $(j=1, 2)$ 是解析函数适合边界条件（4.6）的解，而 $W_j(z) = \widetilde{T}_j \omega_j$ 是一阶方程组

$$L_j W = \mathrm{Re}[Q_{j1}\Phi_1' + Q_{j2}\Phi_2'] + f_j(z, u_1, u_2, u_{1z}, u_{2z}), \quad j=1, 2 \tag{4.8}$$

适合齐次边界条件 $l_j W = h_j(t)$ $(t \in \Gamma)$ 的解，并可写成（3.7）的形式，即

$$\widetilde{T}_j \omega_j = T\omega_j + \sum_{k=0}^{N} T_k \omega_j + T_* \omega_j, \quad \omega_j(z) \in L_{p_0}(\overline{G}), \quad p_0 > 2, \tag{4.9}$$

由于（4.5）、4.6）右边的函数满足

$$\left.\begin{aligned} &\|f_j(z, u_1, u_2, u_{1z}, u_{2z})\|_{L_{p_0}(\overline{G})} \leqslant M_{41} \sum_{j=1}^{2} C^1[u_j(z), \overline{G}], \\ &C_\alpha\{\mathrm{Re}[B_{j1}(t)u_1(t) + B_{j2}(t)u_2(t)], \Gamma\} \leqslant M_{42} \sum_{k=1}^{2} C^1[u_j(z), \overline{G}]. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

因而 $\Phi_j(z)$、$\omega_j(z)$ $(j=1, 2)$ 满足估计式：

$$C_\alpha[\Phi_j(z), \overline{G}] + \|\Phi_j'(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})} \leqslant M_{43} \sum_{k=1}^{2} C^1[u_j(z), \overline{G}], \tag{4.11}$$

$$\|\omega_j(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{1 - 2\underset{j=1,2}{\mathrm{Max}}(q_{j1} + q_{j2})\Lambda_{p_0}} \sum_{j=1}^{2} [\|\Phi_j'\|_{L_{p_0}(\overline{G})}$$
$$+ \|f_j\|_{L_{p_0}(\overline{G})}] \leqslant M_{44} \sum_{k=1}^{2} C^1[u_i(z), \overline{G}], \quad j=1, 2 \tag{4.12}$$

在(4.10)-(4.12)中，$\alpha=\frac{p_0-2}{p_0}$，$p_0(<2)$是接近2的常数，$M_k=M_k(q_{jk},\ p_0,\ k_0,\ G,\ \mu,\ l_0)$，$k=41,\cdots,44$。因而$w_j(z)$ $(j=1,\ 2)$满足估计式：

$$C_\alpha[w_j(z),\overline{G}]\leqslant M_{45}\sum_{j=1}^{2}C^1[u_j(z),\overline{G}],\ j=1,\ 2, \tag{4.13}$$

这里$\alpha=\frac{p_0-2}{p_0}$，$M_{45}=M_{45}(q_{jk},\ p_0,\ k_0,\ G,\ \mu,\ l_0)$。由此可知：$w=T_1u$是从$C^1(\overline{G})\times C^1(\overline{G})$映射到$C(\overline{G})\times C(\overline{G})$的线性有界的完全连续算子。然后将$w_0(z)=[w_{10}(z),\ w_{20}(z)]$代入(1.18)的右边，而得$u_0(z)=[u_{10}(z),\ u_{20}(z)]=T_2w_0$，再将$w(z)=[w_1(z),\ w_2(z)]$代入(1.18)的右边得$u(z)=[u_1(z),\ u_2(z)]=T_2w$，但取(1.18)中的常数$u_{10}=u_{20}=0$。容易得知：$T_2$是将$C(\overline{G})\times(\overline{G})$映射到$C^1(\overline{G})\times C^1(\overline{G})$的线性有界算子。于是，我们得到线性算子方程

$$u-\varepsilon T_2T_1u=T_2w_0+c_0,\ c_0=(c_{10},\ C_{20}), \tag{4.14}$$

其中c_{10}、c_{20}是任意常数，并可知T_2T_1是将$C^1(\overline{G})\times C^1(\overline{G})$映射到自身的完全连续算子。这样，便可使用书[4]第四章的定理，以$\varepsilon_j(j=1,\ 2,\cdots,\ 0<|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon_2|\leqslant\cdots\leqslant|\varepsilon_n|\leqslant|\varepsilon_{n+1}|\leqslant\cdots)$表示齐次算子方程

$$u-\varepsilon T_2T_1u=0 \tag{4.15}$$

的特征值，则可得以下结果。

定理4.1 对于一阶一致椭圆型方程组(4.1)的问题QI。

(1) 当ε不是其相应齐次方程(4.15)的离散特征值，则问题QI是可解的，其解$u(z)=[u_1(z),\ u_2(z)]$包含有两个任意常数。

(2) 当ε是(4.15)秩为q的特征值，则问题QI有$q-s$个可解条件，其解$u(z)=[u_1(z),\ u_2(z)]$包含有$2+q-s$个任意实常数，$s\leqslant\min[q,\ 2]$。

以上定理中的(1)是明显的。对于(2)，由于非齐次方程(4.14)的可解条件是由q个代数方程来表示的，其中含有两个任意常数C_{10}，C_{20}，以s表示它们的系数矩阵的秩，$s\leqslant\min(q,\ 2)$，这样从上述代数方程可确定C_{10}，C_{20}中的s个，而要使问题QI可解，还应有$q-s$个可解条件。

其次，由方程组(4.1)问题QI的可解性结果导出方程组(1.1)问题PI的可解条件。若ε不是相应于问题QI的齐次方程(4.15)的特征值，我们将方程组(4.1)问题QI的解$w_j(z)$、$u_j(z)$ $(j=1,\ 2)$代入关系式(1.18)，如果$w_j(z)$满足$2N$个条件：

$$\mathrm{Re}\int_{L_k}w_j(z)dz=0,\ k=1,\cdots,\ N,\ j=1,\ 2 \tag{4.16}$$

则可取(1.18)中的$d_{jk}=0$ $(k=1,\cdots,\ N,\ j=1,\ 2)$，因而

$$u_j(z)=C_{jo}+\mathrm{Re}\int_a^z 2w_j(z)dz,\ j=1,\ 2, \tag{4.17}$$

故 $u_{jz}=w_j(z)$，$j=1,2$。再将上述函数 $w_j(z)$、$u_j(z)$（$j=1,2$）代入边界条件（1.16）、（1.17），取其中的 $h(z)=0$。并以 s 表示 C_{10}、C_{20} 的系数矩阵的秩，则可从 $h_{jk}(k=0,1,\cdots,N)$，$\lambda^{\pm}_{jm}(m=1,\cdots,|x_j|-1)$（$j=1,2$）中确定 s 个，而余下还应有 $2N-2x_1-2x_2-2-s$ 个条件。因此在上述 $2(2N-x_1-x_2-1)-s$ 个条件下，则方程组（4.1）问题 QI 的解 $u_j(z)$（$j=1,2$）就是方程组（1.1）问题 PI 的解。

又当 ε 是（4.15）秩为 q 的特征值，我们可写出由 q 个代数方程表示的非齐次方程（4.14）的可解条件，以 s_1 表示 C_{10}，C_{20} 的系数矩阵的秩，$s_1\leqslant\min(q,2)$，则可确定 C_{10}、C_{20} 中的 s_1 个，也从 q 个代数方程中确定了 s_1 个等式。然后将所得的含有 $2+q-s_1$ 个任意常数的解 $w_j(z)$、$u_j(z)$（$j=1,2$）代入（4.16）式及（1.16）式（取其中的 $h(t)=0$），以 s_2 表示其中 $2+q-s_1$ 个任意常数的系数矩阵的秩，$s_2\leqslant\min(4N-2x_1-2x_2-2,\ 2+q-s_1)$，那么与前同理，可确定上述 $2+q-s_1$ 个任意常数中的 s_2 个，同时也确定了 s_2 个等式。由此可知：二阶方程组（1.1）之问题 PI 有 $4N-2x_1-2x_2-2+q-s_1-s_2$ 个可解条件，当这些条件满足时，其解 $u_1(z)$、$u_2(z)$ 包含有 $2+q-s_1-s_2$ 个任意实常数。于是有以下定理。

定理4.2 对于二阶方程组（1.1）的问题 PI，

（1）当 ε 不是其相应的齐次方程（4.15）的特征值，则问题 PI 有 $2(2N-x_1-x_2-1)-s$ 个可解条件，其解 $u(z)=[u_1(z),\ u_2(z)]$ 包含有 $2-s$ 个任意实常数，$0\leqslant s\leqslant 2$。

（2）当 ε 是其相应的齐次方程（4.15）秩为 q 的特征值，则问题 PI 有 $2(2N-x_1-x_2-1)+q-s$ 个可解条件，其解包含有 $2+q-s$ 个任意实常数，$s\leqslant\min(4N-2x_1-2x_2-2+q,\ 2+q)$。

§5. 复方程（1.22）之问题QⅡ与复方程（1.2）之问题PⅡ的可解性

与上节相仿，我们先求一阶复方程（1.22），即

$$LU=U_{1\bar z}-Q_1(z)U_{1z}-Q_2(z)\overline{U_1}_{\bar z}-Q_3(z)U_{2z}-Q_4(z)\overline{U_2}_{\bar z}=\varepsilon f(z,\ w,\ w_z,\overline{w_z})+A_7(z) \tag{5.1}$$

适合边界条件（1.23）即

$$l_jU=\mathrm{Re}[\overline{\lambda_j(t)}U_j(t)]=-\varepsilon\mathrm{Re}[B_{j1}(t)w(t)]+B_{j2}(t)+h_j(t),\quad t\in\Gamma,\ j=1,\ 2 \tag{5.2}$$

之问题 QⅡ 的解 $U_j(z)$（$j=1,2$），$w(z)$。为此，先考虑一阶复方程

$$LU=A_7(z) \tag{5.3}$$

适合边界条件

$$l_jU=B_{j2}(t)+h_j(t),\quad t\in\Gamma,\ j=1,\ 2 \tag{5.4}$$

的唯一解$U_{10}(z)$、$U_{20}(z)$，使$U_{10\bar{z}}=\overline{U}_{20z}$，记$U_0=[U_{10}(z),\ U_{20}(z)]$。并求一阶复方程

$$LU=f(z,\ w,\ w_z,\ \overline{w}_z),\ w(z)\in C^1(\overline{G}) \tag{5.5}$$

适合边界条件

$$l_jU=-\mathrm{Re}[B_{j1}(t)w(t)]+h_j(t),\ t\in\Gamma,\ j=1,\ 2 \tag{5.6}$$

之唯一解$U_1(z)$、$U_2(z)$，使$U_{1\bar{z}}=\overline{U}_{2z}$。记从$w(z)\in C^1(\overline{G})$ 到$U=[U_1(z),\ U_2(z)]\in C(\overline{G})\times C(\overline{G})$ 的映射为$U=T_1(w)$。根据定理3.1，定理3.2，可知能将$U_j(z)$ 表示成，

$$U_1(z)=\Phi_1(z)+\widetilde{T}_1\omega,\ U_2(z)=\Phi_2(z)+\widetilde{T}_2\overline{\omega},\ \omega(z)\in L_{p_0}(\overline{G}) \tag{5.7}$$

其中$\Phi_j(z)$ $(j=1,\ 2)$，$\widetilde{T}_1\omega$、$\widetilde{T}_2\overline{\omega}$类似于（4.7）-（4.9）中所述，并且相仿于§4，可证$U_j(z)$ 满足估计式：

$$C_\alpha[U_j(z),\ \overline{G}]\leqslant M_{51}C^1[w(z),\ \overline{G}],\qquad j=1,\ 2, \tag{5.8}$$

这里 $\alpha=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$2<p_0<\min\left(p,\ \dfrac{1}{1-\mu}\right)$，$M_{51}=M_{51}(q_j,\ p_0,\ k_0,\ G,\ \mu,\ l_0)$。由此可见，$T_1$ 是将$C^1(\overline{G})$ 映射到$C(\overline{G})\times C(\overline{G})$ 的线性有界的完全连续算子。然后将$U_{j0}(z)$ $(j=1,2)$ 代入（1.24）的右边，便得$w_0(z)=T_2U_0$，再将$U_j(z)$ $(j=1,\ 2)$ 代入（1.24）的右边，而得$w(z)=T_2U$，但我们取其中的复常数$w_0=0$。容易看出：T_2 是将$C(\overline{G})\times C(\overline{G})$ 映射到$C^1(\overline{G})$ 的线性有界算子。这样便得到线性算子方程

$$w-\varepsilon T_2T_1w=T_2U+C_0,\ C_0=C_{10}+iC_{20}, \tag{5.9}$$

这里C_{10}、C_{20}都是任意实常数，并可知T_2T_1是将$C^1(\overline{G})$映射到自身的线性有界的完全连续算子，因而可使用书[4]中第四章的结果，以$\varepsilon_j(j=1,\ 2,\cdots,\ 0<|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon_2|\leqslant\cdots\leqslant|\varepsilon_n|\leqslant|\varepsilon_{n+1}|\leqslant\cdots)$ 表示（5.9）的齐次算子方程

$$w-\varepsilon T_2T_1w=0 \tag{5.10}$$

的特征值，并仿上节中证明定理4.1，定理4.2的方法，可得以下定理。

定理5.1 对于一阶复方程（5.1）与二阶复方程（1.2），

（1）当ε不是对应于问题QⅡ的齐次方程（5.10）的离散特征值；则（5.1）的问题QⅡ是可解的，其解$w(z)$ 包含有两个任意实常数；而（1.1）的问题PⅡ有$2(2N-x_1-x_2-1)-s$个可解条件，当这些条件满足时，其解包含有$2-s$个任意实常数，这里$0\leqslant s\leqslant 2$。

（2）当ε是齐次方程（5.10）的秩为q的特征值，则（5.1）的问题QⅡ有$q-s$个可解条件，当这些条件满足时，其解$w(z)$ 包含有$2+q-s$个任意实常数，$s\leqslant\min(q,\ 2)$，而（1.1）的问题PⅡ有$2(N-x_1-x_2-1)+q-s$个可解条件，其解包含有$2+q-s$个任意实常数，$s\leqslant\min(4N-2x_1-2x_2-2+q,\ 2+q)$。

最后还要提及：对于二阶复方程（1.2），如果设 $q_1+q_2<\frac{1}{2}$，那么我们也可得到它适合边界条件（1.14）（$w=u_1+iu_2$）之边值问题的可解性结果，如定理5.1中所述。此外，对于指数 $\varkappa_1\leqslant 0$、$\varkappa_2\leqslant 0$ 时的前述 Poincaré 边值问题，也有相应于本文中的结果。

参 考 文 献

[1] 闻国椿，方爱农，二阶椭圆型方程组的复形式与某些边值问题，《数学年刊》，第二卷（1981）第二期，pp. 201-216.

[2] Векуа, И. Н.. 广义解析函数，人民教育出版社，1960.

[3] 闻国椿，李忠，非线性椭圆型复方程的函数论方法，1979.

[4] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., 函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957.

The Poincaré Boundary Value Problem with Nonpositive Indices for Linear Elliptic Systems of Second Order

By Wen Guochun（闻国椿）

Abstract

In this paper, we consider mainly a linear unifomly elliptic system of second order of the form

$$\left.\begin{aligned}&w_{z\bar z}-Q_1(z)w_{zz}-Q_2(z)\overline{w_{\bar z\bar z}}-Q_3(z)\overline{w_{zz}}-Q_4(z)w_{\bar z\bar z}\\&=\varepsilon f(z,\ w,\ w_z,\ \overline{w_z})+A_7(z),\ f=A_1(z)w_z+A_2(z)\overline{w_{\bar z}}\\&+A_3(z)\ \overline{w_z}+A_4(z)w_{\bar z}+A_5(z)w+A_6(z)\overline{w},\\&|Q_1(z)|+|Q_2(z)|\leqslant q,\quad |Q_3(z)|+|Q_4(z)|\leqslant q_2,\ q_1+q_2<1,\\&A_k(z)\in L_p(\overline{G}),\ p>2,\ k=1,\cdots,\ 7\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

in an $(N+1)$-connected circular domain, and study two Poincaré boundary value problems, the boundary conditions being

$$\frac{\partial u_j}{\partial v_j}+\varepsilon[\beta_{j1}(z)u_1(z)+\beta_{j2}(z)u_2(z)]=\beta_{j3}(z),\quad z\in\Gamma,\ j=1,\ 2\tag{2}$$

or

$$Re[\overline{\lambda_1(z)}w_z+\varepsilon\beta_{11}(z)w]=\beta_{12}(z),$$

$$Re[\overline{\lambda_2(z)}\overline{w_z}+\varepsilon\beta_{21}(z)w]=\beta_{22}(z),\quad z\in\Gamma,\ \text{where }|\lambda_j(z)|=1,$$

$$\lambda_j(z)、\beta_{jk}(z)\in C_\mu(\Gamma),\ j,\ k=1,\ 2,\ \frac{1}{2}<\mu<1,\ -\infty<\varepsilon<\infty. \tag{3}$$

In order to obtain the solvable condition of the Poincaré problem (1), (2) or (1), (3), we establish the integral operator corresponding to the Poincaré problem and use the Fredholm theorem for linear operator equation to prove the following result.

The main theorem. Suppose that indices

$$x_j=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\lambda_j(z)<0,\ j=1,\ 2,\ \text{and } \varepsilon_k(j=1,\ 2,\cdots)$$

are the eigenvalues of the homogeneous integral equation corresponding to the Poincaré problem. Then we have the following solvability of the above boundary value problems:

(1) When $\varepsilon\overline{\in}\varepsilon_j(j=1,\ 2,\cdots)$, the Poincaré problem (1), (2) or (1), (3) has $2(2N-x_1-x_2-1)-s$ solvable conditions, where $0\leqslant s\leqslant 2$.

(2) When $\varepsilon=\varepsilon_j$ is an eigenvalue with rank q, the Poincaré problem (1), (2) or (1), (3) has $2(N-x_1-x_2-1)+q-s$ solvable conditions, where $s\leqslant\min[2(2N-x_1-x_2-1)+q,\ z+q]$

Besides, if $x_j=0$, $j=1,\ 2$, we can also obtain the solvable conditions of the above Poincaré problems.