关于矩阵族稳定的(J)条件及其与Buchanan准则的关系*

马驷良

（吉林大学）

本文注意到矩阵族稳定的Kreiss定理和Buchanan准则不便于实际应用。文中（§2，§3）从Kreiss定理的豫解条件出发得到了至少对于四阶以下矩阵族较为实用的判别稳定性的(J)条件；并证明了对于其特征值赋套的上三角矩阵族，(J)条件与Buchanan准则的等价性。§4作为(J)条件的应用讨论了逼近于二维、三维波动方程的显式差分方程（其增长矩阵分别是三、四阶矩阵族），得到了稳定的充要条件。

§1. 引言和预备知识

熟知，线性常系数差分方程的稳定性归结于矩阵族$G^n(\Delta t,k)$($0<\Delta t<\tau$, $0<n\Delta t\leqslant T$, $k\in\mathscr{L}$)一致有界。由[1]这等价于存在常数$\alpha>0$，使矩阵族$\mathscr{F}=\{A=e^{-\alpha\Delta t}G(\Delta t,k)\}$稳定，即存在常数$c>0$，使

$$\|A^\nu\|\leqslant c,\ A\in\mathscr{F},\ \nu=1,2,\cdots.$$

理论上，Kreiss定理和Buchanan准则已建立了矩阵族稳定的充要条件（见[1]），但不便于实用，很多情况甚至无法应用。关于二阶矩阵族稳定的充要条件，由李荣华、周长林（文[2]定理7）给出了便于应用的形式。而对三阶以上矩阵族的稳定性，现有的判别法都难以应用。本文基于豫解条件给出了较为实用的(J)条件。其中二阶(J)条件（系充要条件）与文[2]定理7，文[3]定理2、定理3是一致的，但这里的证明则是十分简短的。而一般的p阶(J)条件，当限制于其特征值赋套的上三角矩阵族时，与Buchanan准则是等价的。

1. 豫解条件　Kreiss矩阵定理的豫解条件表述为

定理1.　p阶矩阵族$\mathscr{F}$稳定的充要条件是存在常数$c>0$，对任何$A\in\mathscr{F}$，$|z|>1$，$(zI-A)^{-1}$存在，且

$$\|(zI-A)^{-1}\|\leqslant\frac{c}{|z|-1},\tag{1}$$

*1981年5月7日收到修改稿。

推荐者：李荣华（吉林大学数学系）。

其中 I 是 p 阶单位矩阵，z 是复数。

这个条件隐含着 von Neumann 条件，即 $A\in\mathscr{F}$ 的特征值 $|\lambda_i|\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,p$。

据有限维空间范数的等价性，定理 1 等价于：存在常数 $c>0$，使

$$|B_{ij}|=\left|\frac{A_{ij}(|z|-1)}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)}\right|\leqslant c,\quad |z|>1,\quad i,j=1,\cdots,p. \qquad (2)$$

其中 A_{ij} 是 $(zI-A)$ 的代数余子式。显然 A_{ij} 形如

$$a_1a_2\cdots a_k(z-b_1)\cdots(z-b_{p-1-k}),\quad k=0,1,\cdots,p-1. \qquad (3)$$

$k=0$时，(3)式即$(z-b_1)\cdots(z-b_{p-1})$，$k=p-1$时，(3) 式即 $a_1a_2\cdots a_{p-1}$。其中a_i是A的元素，b_i 与A的元素有关。另外，如果考虑A_{ij} 的行列式展式，则A_{ij} 可写成 $(p-1)!$ 个形如(3)的代数和（此时展式的每一项中 a_i 仍是A的元素，b_i 是A的对角元素）。

2. Buchanan准则. 按[1]，如 $\{\lambda_i\}_1^p$ 满足：

$|\lambda_r-\lambda_s|\leqslant M|\lambda_l-\lambda_m|$，当 $1\leqslant l\leqslant r\leqslant s\leqslant m\leqslant p$，便称复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 以套常数M赋套。[1]中已指出，任意 p 个复数均可以 $M=2^p$ 赋套。特别，$p=2$时，自然赋套；$p=3$时，只要$|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant M|\lambda_1-\lambda_3|$，便已赋套（因$|\lambda_2-\lambda_3|\leqslant|\lambda_1-\lambda_2|+|\lambda_1-\lambda_3|\leqslant(M+1)|\lambda_1-\lambda_3|$）。

定理2 (Buchanan, 1963). 设$\mathscr{F}$是一族 p 阶上三角矩阵，其特征值按对角元位置已赋套，且满足von Neumann条件，则$\mathscr{F}$稳定的充要条件是有常数$c>0$，对$A\in\mathscr{F}$，

$$|a_{ij}|\leqslant c\cdot\max\{1-|\lambda_i|,\ 1-|\lambda_j|,\ |\lambda_i-\lambda_j|\},\quad \begin{matrix} i\neq j,\\ i,j=1,\cdots,p,\end{matrix} \qquad (4)$$

其中 a_{ij} 是A的元素，λ_i 是A的特征值。

3. 李一周条件. 文[2]定理 7 为

定理3. 若 $G(k,\Delta t)$ 为二阶矩阵，则 $G^n(k,\Delta t)$ $(0<\Delta t<\tau,\ k=0,1,\cdots,\ 0<n\Delta t\leqslant T)$ 一致有界的充要条件是

1°. $|\lambda_l(k,\Delta t)|\leqslant 1+O(\Delta t)$, $\quad l=1,2$

2°. $$\left\|G(k,\Delta t)-\frac{1}{2}[g_{11}(k,\Delta t)+g_{22}(k,\Delta t)]I\right\|$$
$$=O(\Delta t+|\lambda_1(k,\Delta t)-\lambda_2(k,\Delta t)|+|1-\max_{i=1,2}|\lambda_i(k,\Delta t)||),$$

其中 g_{ij} 是G的元素。

文[3]用初等方法简化了这个定理的证明，并在此基础上给出了

定理4. 设 $G(k,\Delta t)$ 是二阶矩阵，则 $G^n(k,\Delta t)$ $(0<\Delta t<\tau,\ k=0,1\cdots,\ 0<n\Delta t\leqslant T)$ 一致有界的充要条件是

1°. $|\lambda_l(k,\Delta t)|\leqslant 1+O(\Delta t)$, $l=1,2$,

2°. $$|g_{11}-g_{22}|+|g_{12}|+|g_{21}|=O\left(\Delta t+\left|1-\frac{|g_{11}+g_{22}|}{2}\right|+|(g_{11}-g_{22})^2+4g_{12}g_{21}|^{\frac{1}{2}}\right).$$

对于一般的二阶矩阵族$\mathscr{F}$，有相应的

定理3′. 二阶矩阵族$\mathscr{F}$稳定的充要条件是有常数$c>0$，对任意$A\in\mathscr{F}$，

1°. $|\lambda_i|\leqslant 1$，$i=1,2$，

2°. $\|A-\dfrac{a_{11}+a_{22}}{2}I\|\leqslant c(1-\max\limits_{i=1,2}|\lambda_i|+|\lambda_1-\lambda_2|)$.

定理4′. 二阶矩阵族$\mathscr{F}$稳定的充要条件是有常数$c>0$，对任意 $A\in\mathscr{F}$，

1°. $|\lambda_i|\leqslant|1$，$i=1,2$，

2°. $|a_{11}-a_{22}|+|a_{12}|+|a_{21}|\leqslant c\left(1-\dfrac{|a_{11}+a_{22}|}{2}+|(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}|^{\frac{1}{2}}\right)$.

§2. 二阶、三阶矩阵族稳定的(J)条件

今从(2)式出发开始我们的讨论.

定理5. 二阶矩阵族$\mathscr{F}$稳定的充要条件是有常数$c>0$，对任意$A\in\mathscr{F}$，

1°. $|\lambda_i|\leqslant 1$，$i=1,2$，

2°. $|a_{11}-\lambda_1|+|a_{22}-\lambda_2|+|a_{12}|+|a_{21}|\leqslant c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)$.

证明. 如果$\mathscr{F}$稳定，1°显然成立.又当$|\lambda_1|\leqslant\frac{1}{2}$，2°也显然. 不妨设$|\lambda_1|>\frac{1}{2}$，由(2)，对$|z|>1$，有

$$\frac{(|z-a_{11}|+|z-a_{22}|+|a_{12}|+|a_{21}|)(|z|-1)}{|(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)|}\leqslant 4c.$$

由于

$$\left|\frac{(a_{11}-\lambda_1)(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|\leqslant\left|\frac{(z-a_{11})(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|+\frac{|z|-1}{|z-\lambda_2|}\leqslant c+1,$$

同理，

$$\left|\frac{(a_{22}-\lambda_2)(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|\leqslant c+1,$$

故对$|z|>1$，有

$$|a_{11}-\lambda_1|+|a_{22}-\lambda_2|+|a_{12}|+|a_{21}|\leqslant\frac{4(c+1)|(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)|}{|z|-1}. \tag{5}$$

令$z=t/\bar{\lambda}_1$，$t>1$，$\bar{\lambda}_1$是λ_1的共轭. 显然

$$\frac{|(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)|}{|z|-1}\leqslant\frac{2(t-|\lambda_1|^2)|t-\bar{\lambda}_1\lambda_2|}{t-|\lambda_1|}.$$

以之代入(5)右端，并令$t\to1$，则

$$|a_{11}-\lambda_1|+|a_{22}-\lambda_2|+|a_{12}|+|a_{2}\quad|\leqslant 16(c+1)|1-\bar{\lambda}_1\lambda_2|\leqslant 32(c+1)\cdot(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|) \tag{6}$$

反之，若1°，2°成立，由于

$$\left|\frac{(z-a_{11})(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|\leqslant\left(1+\left|\frac{a_{11}-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right|\right)\frac{|z|-1}{|z-\lambda_2|}\leqslant 1+\left|\frac{(a_{11}-\lambda_1)(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|,$$

$$\left|\frac{(z-a_{22})(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|\leqslant 1+\left|\frac{(a_{22}-\lambda_2)(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|.$$

以及2°，为证(2)式成立只需证

$$\left|\frac{(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right|\leqslant c,\quad |z|>1 \tag{7}$$

成立即可。若 $|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant 1-|\lambda_1|$，则

$$(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)/|z-\lambda_1|\leqslant 2(1-|\lambda_1|)/(|z|-|\lambda_1|)\leqslant 2,$$

显见(7)成立。若 $|\lambda_1-\lambda_2|>1-|\lambda_1|$，当 $|z-\lambda_1|\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$ 时，

$$|(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda z)]|\leqslant 4. \tag{8}$$

而当 $|z-\lambda_1|<\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$ 时，由 $|z-\lambda_2|\geqslant|\lambda_1-\lambda_2|-|z-\lambda_1|>\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$，(8)式也成立，总之(7)成立，从而(2)成立。

按照文[3]中证明定理3和定理4等价的方法，可证定理3′和定理4′是等价的。至于定理3′和定理5的等价性，只需注意，一方面有

$$|a_{11}-a_{22}|\leqslant|a_{11}-\lambda_1|+|a_{22}-\lambda_2|+|\lambda_1-\lambda_2|; \tag{9}$$

另一方面（由根与系数的关系 $\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}$）有

$$|a_{11}-\lambda_1|=|a_{22}-\lambda_2|=\frac{1}{2}|(a_{11}-a_{22})+(\lambda_2-\lambda_1)|,$$

从而

$$|a_{11}-\lambda_1|+|a_{22}-\lambda_2|\leqslant|a_{11}-a_{22}|+|\lambda_1-\lambda_2|. \tag{10}$$

联合(9)、(10)不难看出定理3′和定理5等价。

对于三阶矩阵族 $\mathscr{F}$，(2)式的 A_{ij} 可能取三种形式：$(z-b_1)(z-b_2)$ 或 $a(z-b)$ 或 a_1a_2。例如

$$A_{11}=\begin{vmatrix} z-a_{22}, & -a_{23} \\ -a_{32}, & z-a_{33}\end{vmatrix}=(z-a_{22})(z-a_{33})-a_{23}a_{32}=(z-b_1)(z-b_2),$$

其中 b_1，b_2 是矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

的特征值；

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -a_{12} & -a_{13} \\ z-a_{22} & -a_{23}\end{vmatrix}=a_{13}(z-a_{22})+a_{12}a_{23}$$

$$\begin{cases} a_{13}\left[z-\left(a_{22}-\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right)\right], & \text{当} a_{13}\neq 0, \\ a_{12}a_{23}, & \text{当} a_{13}=0\end{cases}$$

因此，$B_{ij}(i,j=1,2,3)$ 可写成下面三种形式之一，

$$\begin{cases} (z-b_1)(z-b_2)(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)], & (\mathrm{I}) \\ a(z-b)(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)], & (\mathrm{II}) \\ a_1a_2(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)]. & (\mathrm{III}) \end{cases} \tag{11}$$

定理6. 三阶矩阵族$\mathscr{F}$稳定的必要条件是存在常数$c>0$，对任意$A\in\mathscr{F}$，

1°. $|\lambda_i|\leqslant 1$，$i=1,2,3$；

2°. 对于(I)型，有

$$\begin{cases} \left|1-\dfrac{\bar\lambda_1(b_1-\lambda_2)}{1-\bar\lambda_1\lambda_2}\right|\cdot\left|1-\dfrac{\bar\lambda_1(b_2-\lambda_3)}{1-\bar\lambda_1\lambda_3}\right|\leqslant c, \\ \left|1-\dfrac{\bar\lambda_2(b_1-\lambda_3)}{1-\bar\lambda_2\lambda_3}\right|\cdot\left|1-\dfrac{\bar\lambda_2(b_2-\lambda_1)}{1-\bar\lambda_2\lambda_1}\right|\leqslant c, \\ \left|1-\dfrac{\bar\lambda_3(b_1-\lambda_1)}{1-\bar\lambda_3\lambda_1}\right|\cdot\left|1-\dfrac{\bar\lambda_3(b_2-\lambda_2)}{1-\bar\lambda_3\lambda_2}\right|\leqslant c, \end{cases} \tag{12}$$

其中规定分母为 0 时，分子也为 0（下同）；对于(II)型，有

$$\begin{cases} \left|\dfrac{a}{1-\bar\lambda_1\lambda_2}\right|\cdot\left|1-\dfrac{\bar\lambda_1(b-\lambda_3)}{1-\bar\lambda_1\lambda_3}\right|\leqslant c, \\ \left|\dfrac{a}{1-\bar\lambda_2\lambda_3}\right|\cdot\left|1-\dfrac{\bar\lambda_2(b-\lambda_1)}{1-\bar\lambda_2\lambda_1}\right|\leqslant c, \\ \left|\dfrac{a}{1-\bar\lambda_3\lambda_1}\right|\cdot\left|1-\dfrac{\bar\lambda_3(b-\lambda_2)}{1-\bar\lambda_3\lambda_2}\right|\leqslant c; \end{cases} \tag{13}$$

对于(III)型，有

$$\begin{cases} |a_1a_2|\leqslant c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)(1-|\lambda_3|+|\lambda_1-\lambda_3|), \\ |a_1a_2|\leqslant c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|), \\ |a_1a_2|\leqslant c(1-|\lambda_3|+|\lambda_1-\lambda_3|)(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|). \end{cases} \tag{14}$$

证明. 1° 显然，只需证 2°. 对于 (I)型只证第一式（另二式类似）. 若$|\lambda_1|\leqslant\frac{1}{2}$，由于$|1-\bar\lambda_1\lambda_3|\geqslant\frac{1}{2}$，$|1-\bar\lambda_1\lambda_2|\geqslant\frac{1}{2}$以及 b_1，b_2 一致有界，此式显然成立. 因此不妨设$|\lambda_1|\geqslant\frac{1}{2}$. 因$\mathscr{F}$稳定，由 (2) 式知

$$|(z-b_1)(z-b_2)(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)]|\leqslant\bar c,\qquad |z|>1,$$

取$z=t/\bar\lambda_1$，$t>1$，则

$$\left|\frac{(t-\bar\lambda_1b_1)(t-\bar\lambda_1b_2)(t-|\lambda_1|)}{(t-|\lambda_1|^2)(t-\bar\lambda_1\lambda_2)(t-\bar\lambda_1\lambda_3)}\right|\leqslant\bar c,$$

令 $t\to 1$，得

$$|(1-\bar{\lambda}_1 b_1)(1-\bar{\lambda}_1 b_2)/[(1-\bar{\lambda}_1\lambda_2)(1-\bar{\lambda}_1\lambda_3)]|\leqslant 2\bar{c}. \tag{15}$$

此即(12)第一式。

对于(Ⅱ)型，证明平行，只要注意此时 b 未必一致有界，但 a 和 ab 均一致有界。类似地可就(Ⅲ)型证得(14)。

为得到三阶矩阵族稳定的充分条件，首先给出(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)型一致有界的充分条件。

命题1. 设三阶矩阵族 $\mathscr{F}$ 满足 von Neumann 条件，其特征值已赋套（不妨设套常数 $M>1$），则(Ⅰ)型一致有界，即

$$|(z-b_1)(z-b_2)(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)]|\leqslant c,\quad |z|>1 \tag{16}$$

成立的充分条件是存在常数 $\bar{c}>0$，使

$$\begin{cases}|b_1-\lambda_1|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\overline{\lambda_2}|),\\ |b_2-\lambda_2|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|).\end{cases} \tag{17}$$

证明. 若 $|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant 1-|\lambda_1|$，则由(17)，$|b_1-\lambda_1|\leqslant 2\bar{c}(1-|\lambda_1|)$，从而

$$\left|\frac{z-b_1}{z-\lambda_1}\right|=\left|1-\frac{b_1-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right|\leqslant 1+\frac{2\bar{c}(1-|\lambda_1|)}{|z|-|\lambda_1|}\leqslant 2\bar{c}+1,$$

由(17)第二式及定理5中(7)式的证明又得

$$\left|\frac{(z-b_2)(|z|-1)}{(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)}\right|\leqslant c_1,\quad |z|>1,$$

于是不等式(16)成立。

若 $|\lambda_1-\lambda_2|>1-|\lambda_1|$，则 $|b_1-\lambda_1|\leqslant 2\bar{c}|\lambda_1-\lambda_2|$。当 $|z-\lambda_1|\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$，$|z-\lambda_1|\geqslant\frac{1}{4\bar{c}}|b_1-\lambda_1|$，从而

$$\left|\frac{z-b_1}{z-\lambda_1}\right|\leqslant 1+\left|\frac{b_1-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right|\leqslant 4\bar{c}+1,$$

同上，由(17)第二式及定理5中(7)式的证明知(16)成立。而当 $|z-\lambda_1|<\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$ 时，$|z-\lambda_2|>\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|\geqslant\frac{1}{4\bar{c}}|b_1-\lambda_1|$，从而

$$\left|\frac{z-b_1}{z-\lambda_2}\right|\leqslant 1+\left|\frac{b_1-\lambda_2}{z-\lambda_2}\right|\leqslant 1+\left|\frac{b_1-\lambda_1}{z-\lambda_2}\right|+\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{z-\lambda_2}\right|\leqslant 4\bar{c}+3. \tag{18}$$

又据(17)第二式及套条件得

$$|b_2-{}_3|\leqslant|b_2-\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_3|+2|\lambda_2-\lambda_3|)+|\lambda_2-\lambda_3|$$
$$\leqslant(2\bar{c}+1)(1-|\lambda_3|+M|\lambda_1-\lambda_3|)\leqslant(2\bar{c}+1)M(1-|\lambda_3|+|\lambda_1-\lambda_3|).$$

从而按定理 5 中(7)式的证明知

$$\left|\frac{(z-b_2)(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_3)}\right|\leqslant c_2. \tag{19}$$

联合(18)、(19)知(16)成立。证毕。

同理，对(Ⅱ)、(Ⅲ)型，我们有

命题2. 设三阶矩阵族$\mathscr{F}$满足 von Neumann 条件，其特征值已赋套，则

$$|a(z-b)(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)]|\leqslant c,\quad |z|>1 \tag{20}$$

成立的充分条件是

$$\begin{cases}|a|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)\\ |b-\lambda_2|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|)\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}|b-\lambda_1|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)\\ |a|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|)\end{cases} \tag{21}$$

命题3. 设三阶矩阵族$\mathscr{F}$满足 von Neumann 条件，其特征值已赋套，则

$$|a_1a_2(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)]|\leqslant c,\quad |z|>1 \tag{22}$$

成立的充要条件是

$$|a_1a_2|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|). \tag{23}$$

命题 3 的必要性可从定理 6 中(14)第二式看出。另外也不难看出

$$\begin{cases}|a_1|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)\\ |a_2|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|)\end{cases} \tag{24}$$

是(22)成立的充分条件。

现在不难给出(J)条件的定义。

定义1. 设$\mathscr{F}=\{A\}$是 p 阶矩阵族，A的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 赋套。称与A相关的式子 $a_1a_2\cdots a_k(z-b_1)\cdots(z-b_{p-1-k})$或

$$\frac{a_1a_2\cdots a_k(z-b_1)\cdots(z-b_{p-1-k})(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_p)},\qquad k=0,1,\cdots,p-1$$

满足(J)条件，如果有常数 $c>0$，对任意$A\in\mathscr{F}$，只要适当排列 $a_1,\cdots,a_k$, $b_1,\cdots b_{p-1-k}$ 的次序为 $d_1,d_2\cdots,d_{p-1}$ 之后，便有

$$|e_i|\leqslant c(1-|\lambda_i|+|\lambda_i-\lambda_{i+1}|),\quad i=1,2,\cdots,p-1,$$

其中

$$e_i=\begin{cases}d_i, & 当 d_i\in\{a_1,\cdots,a_k\}\\ d_i-\lambda_i, & 当 d_i\in\{b_1,\cdots,b_{p-1-k}\}.\end{cases}$$

联合命题 1,2,3，便有

定理7. 设三阶矩阵族$\mathscr{F}$满足 von Neumann 条件，则$\mathscr{F}$稳定的充分条件是 (2) 中诸 B_{ij} 满足(J)条件。

为进一步得到较实用的条件，我们注意(2)中每个 B_{ij} 不仅可直接写成(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)型之一，也可根据方便写成这三种类型的有限和：$B_{ij}=J_1+J_2+\cdots+J_m$。特别，可按 A_{ij} 的行列式展式把 B_{ij} 分解成$(p-1)!$（此时$p=3$）个三种类型的有限和（注意，这样分解后的每一项直接与A的元素有关），例如，由$A_{11}=(z-a_{22})(z-a_{33})-a_{23}a_{32}$，可把 B_{11}分解成一个(Ⅰ)型和一个(Ⅲ)型之和：

$$B_{11}=\frac{(z-a_{22})(z-a_{33})(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)}-\frac{a_{23}a_{32}(|z|-1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)}.$$

如果分解后的每一项 J_l $(l=1,2,\cdots,m)$ 均满足(J)条件，虽然一般不能说 B_{ij} 满足 (J) 条件，但显然 B_{ij} 一致有界。这样，我们可只对分解后的每一项验证(J)条件。

定义2. 设 p 阶矩阵族$\mathscr{F}$满足 von Neumann 条件，且(2)中诸 B_{ij} 满足 (J) 条件，或其分解为有限和后的每一项满足(J)条件，便称$\mathscr{F}$满足(J)条件。

按此定义，定理 5 即是：二阶矩阵族$\mathscr{F}$稳定的充要条件是$\mathscr{F}$满足(J)条件。而由命题1，2，3，有

定理 8. 若三阶矩阵族$\mathscr{F}$满足(J)条件，则$\mathscr{F}$稳定。

特别，我们有

定理 9. 设三阶矩阵族$\mathscr{F}$满足 von Neumann 条件，则$\mathscr{F}$稳定的充分条件是$(zI-A)$的诸代数余子式A_{ij}按行列式展式的每一项均满足(J)条件。

定理 9 本是定理 8 的特例。其所以表述为定理，第一是由于便于应用，它只与A的元素和特征值直接有关。而应用定理 8 往往要计算A的子矩阵的特征值等，虽然在三阶矩阵族（子矩阵二阶）情形，这并不很复杂，但对四阶以上情形就不方便了；第二是因为对于特征值已按对角元位置赋套的上三角矩阵族，定理 9 （及§3定理9′）的条件与Buchanan准则等价，因此是稳定的充要条件。即

推论1. 设$\mathscr{F}$是特征值按对角元位置赋套的三阶上三角矩阵族，满足 von Neumann 条件，则$\mathscr{F}$稳定的充要条件是有常数$c>0$，使

$$\begin{cases}|a_{12}|\leqslant c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)\\ |a_{23}|\leqslant c(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|)\\ |a_{13}|\leqslant\begin{cases}c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|), & \text{当}\ |\lambda_1-\lambda_2|>|\lambda_2-\lambda_3|,\\ c(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|), & \text{当}\ |\lambda_1-\lambda_2|\leqslant|\lambda_2-\lambda_3|.\end{cases}\end{cases}\tag{25}$$

证明. 充分性. 只要注意 A_{ij} 的行列式展式

$$\begin{cases}A_{11}=(z-a_{22})(z-a_{22}),\ A_{22}=(z-a_{11})(z-a_{33}),\\ A_{33}=(z-a_{11})(z-a_{22}),\ A_{21}=a_{12}(z-a_{33}),\\ A_{32}=a_{23}(z-a_{11}),\ A_{31}=a_{12}a_{23}+a_{13}(z-a_{22}),\\ A_{12}=A_{13}=A_{23}=0.\end{cases}\tag{26}$$

此时 $\lambda_i=a_{ii}$，$i=1,2,3$。$A_{11},A_{22},A_{33},A_{21},A_{32}$ 的行列式展式只有一项，由 (25) 显然

满足(J)条件。A_{31} 的行列式展式有两项，第一项满足(J)条件，第二项 $a_{13}(z-a_{22})$，因为$|a_{22}-\lambda_1|=|\lambda_2-\lambda_1|$和$|a_{22}-\lambda_2|=0\leqslant|\lambda_2-\lambda_3|$，故也总满足$(J)$条件。由定理 9，$\mathscr{F}$ 稳定。

必要性。只要证明 Buchanan 准则中

$$\begin{cases}|a_{12}|\leqslant c\mathrm{Max}\{1-|\lambda_1|,\ 1-|\lambda_2|,\ |\lambda_1-\lambda_2|\}\\ |a_{23}|\leqslant c\mathrm{Max}\{1-|\lambda_2|,\ 1-|\lambda_3|,\ |\lambda_2-\lambda_3|\}\\ |a_{13}|\leqslant c\mathrm{Max}\{1-|\lambda_1|,\ 1-|\lambda_3|,\ |\lambda_1-\lambda_3|\}\end{cases}\tag{27}$$

能推出(25)即可。注意到$1-|\lambda_2|\leqslant 1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|$，$1-|\lambda_3|\leqslant 1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|$，则由(27)第一、二式立得(25)的第一、二式。而由(27)第三式，

$$|a_{13}|\leqslant c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_3|),$$

$$|a_{13}|\leqslant c(1-|\lambda_3|+|\lambda_1-\lambda_3|)\leqslant c(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|+|\lambda_1-\lambda_3|).$$

于是当$|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant|\lambda_2-\lambda_3|$时，由$|\lambda_1-\lambda_3|\leqslant|\lambda_1-\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|$，得$|\lambda_1-\lambda_3|\leqslant 2|\lambda_2-\lambda_3|$，从而

$$|a_{13}|\leqslant 3c(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|).$$

当$|\lambda_1-\lambda_2|>|\lambda_2-\lambda_3|$时，$|\lambda_1-\lambda_2|>\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_3|$，从而

$$|a_{13}|\leqslant 2c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|).$$

即推得(25)第三式。证毕。

对于一般三阶矩阵族，诸 A_{ij} 是

$$\begin{cases}A_{11}=(z-a_{22})(z-a_{33})-a_{23}a_{32}=(z-\alpha_{11})(z-\alpha_{12}),\\ A_{22}=(z-a_{11})(z-a_{33})-a_{13}a_{31}=(z-\alpha_{21})(z-\alpha_{22}),\\ A_{33}=(z-a_{11})(z-a_{22})-a_{12}a_{21}=(z-\alpha_{31})(z-\alpha_{32}),\\ A_{12}=a_{21}(z-a_{33})+a_{31}a_{23}=a_{21}\left(z-a_{33}+\dfrac{a_{31}a_{23}}{a_{21}}\right)=a_{21}(z-\beta_{12}),\\ A_{13}=a_{31}(z-a_{22})+a_{21}a_{32}=a_{31}\left(z-a_{22}+\dfrac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}\right)=a_{31}(z-\beta_{13}),\\ A_{21}=a_{12}(z-a_{33})+a_{13}a_{32}=a_{12}\left(z-a_{33}+\dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}\right)=a_{12}(z-\beta_{21}),\\ A_{23}=a_{32}(z-a_{11})+a_{12}a_{31}=a_{32}\left(z-a_{11}+\dfrac{a_{12}a_{31}}{a_{32}}\right)=a_{32}(z-\beta_{23}),\\ A_{31}=a_{13}(z-a_{22})+a_{12}a_{23}=a_{13}\left(z-a_{22}+\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right)=a_{13}(z-\beta_{31}),\\ A_{32}=a_{23}(z-a_{11})+a_{13}a_{21}=a_{23}\left(z-a_{11}+\dfrac{a_{13}a_{21}}{a_{23}}\right)=a_{23}(z-\beta_{32}).\end{cases}\tag{28}$$

其中α_{11}、α_{12}，α_{21}、α_{22}，α_{31}、α_{32} 分别是矩阵

$$\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

的特征值，$\beta_{12}=a_{33}-\dfrac{a_{31}a_{23}}{a_{21}}$，… 等等。记 $\Gamma_{i,i+1}=1-|\lambda_i|+|\lambda_i-\lambda_{i+1}|$，$i=1,2$。我们有

推论2. 设三阶矩阵族$\mathscr{F}$满足 von Neumann 条件，其特征值赋套，则$\mathscr{F}$稳定的充分条件是

$$1°\ \begin{cases}|a_{11}-\lambda_1|+|a_{21}-\lambda_1|+|a_{31}-\lambda_1|\leqslant c\Gamma_{12},\\ |a_{12}-\lambda_2|+|a_{22}-\lambda_2|+|a_{32}-\lambda_2|\leqslant c\Gamma_{23},\end{cases}$$

$$2°\ \begin{cases}|a_{ij}|\leqslant c\Gamma_{12}\\ |\beta_{ji}|\leqslant c\Gamma_{23}\end{cases}\ \text{或}\ \begin{cases}|\beta_{ij}|\leqslant c\Gamma_{12},\ i\neq j,\\ |a_{ji}|\leqslant c\Gamma_{23},\ i,j=1,2,3.\end{cases}$$

其中规定某 $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ 时条件 2°中不等式根据 A_{ij} 的表达式作相应变动。例如 $a_{12}=0$，由于 $A_{21}=a_{12}a_{32}$，则2°换成 $|a_{13}a_{32}|\leqslant c\Gamma_{12}\Gamma_{23}$（参见命题 3）。

证明. 条件 1°，2° 显然保证了(28)中A_{ij}均满足(J)条件。

推论3. 若三阶矩阵族$\mathscr{F}$满足 von Neumann 条件，其特征值赋套，且不妨设 $|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant|\lambda_2-\lambda_3|$，则$\mathscr{F}$稳定的充分条件是

$$\begin{cases}|a_{11}-\lambda_1|+|a_{22}-\lambda_1|+|a_{31}|+|a_{32}|+|a_{12}|+|a_{21}|\leqslant c\Gamma_{12},\\ |a_{33}-\lambda_2|+|a_{13}|+|a_{23}|\leqslant c\Gamma_{23}.\end{cases}\tag{29}$$

证明. 只要注意由$|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant|\lambda_2-\lambda_3|$可得$\Gamma_{12}\leqslant 2\Gamma_{23}$，则易见(28)中诸$A_{ij}$按行列式展式的每一项均满足$(J)$条件。

注： 1. 若推论 3 中条件$|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant|\lambda_2-\lambda_3|$换成$|\lambda_1-\lambda_2|>|\lambda_2-\lambda_3|$，则$\Gamma_{23}\leqslant 2\Gamma_{12}$，(29)相应换成

$$\begin{cases}|a_{11}-\lambda_1|+|a_{22}-\lambda_1|+|a_{31}|+|a_{32}|+|a_{12}|+|a_{21}|\leqslant c\Gamma_{23},\\ |a_{13}|+|a_{23}|+|a_{33}-\lambda_2|\leqslant c\Gamma_{12}.\end{cases}\tag{30}$$

2. 从A_{ij}的表达式(28)易见，按定理 8、9 还可以有其他类似推论 2、3 的结果。

§3. p 阶矩阵族稳定的(J)条件及其与 Buchanan 准制的关系

本节把§2 的结果推广到 p 阶矩阵族。熟知，Buchanan 准则只能用于通过酉变换已化成其特征值按对角元位置赋套的上三角矩阵族。而这种酉变换只是理论上存在，实际上很难求得。本文给出的(J)条件则可以应用于一般矩阵族。对于 p 阶矩阵族，(2)中 B_{ij} 可取下列三型之一

$$\begin{cases}(z-b_1)\cdots(z-b_{p-1})(|z|-1)/[(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)],\\ a_1\cdots a_k(z-b_1)\cdots(z-b_{p-1-k})(|z|-1)/(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)],\ k=1,\cdots,p-2,\\ a_1\cdots a_{p-1}(|z|-1)/[(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)].\end{cases}\tag{31}$$

同样，B_{ij} 也可写成此三种形式的有限和。特别，可按 $(zI-A)$ 的代数余子式 A_{ij} 的行列式展式分解。

定理8′. 若p阶矩阵族$\mathscr{F}$满足(J)条件，则$\mathscr{F}$稳定。

证明. 为简便计，仅就(I)型用归纳法证明：若(J)条件成立，即

$$|\lambda_i|\leqslant 1,\ i=1,\cdots,p,\ |b_i-\lambda_i|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_i|+|\lambda_i-\lambda_{i+1}|),\quad i=1,\cdots,p-1, \tag{32}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_p$已赋套，则有$c>0$，使

$$|(z-b_1)\cdots(z-b_{p-1})(|z|-1)/[(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)]|\leqslant c,\quad |z|>1. \tag{33}$$

$p=2,3$时§2已证，今假定$p<k$ $(k>3)$ 时为真，往证$p=k$亦然。

若$|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant 1-|\lambda_1|$，则$|b_1-\lambda_1|\leqslant 2\bar{c}(1-|\lambda_1|)$,

$$|(z-b_1)/(z-\lambda_1)|\leqslant 1+|(b_1-\lambda_1)/(z-\lambda_1)|\leqslant 2\bar{c}+1,\quad |z|>1, \tag{34}$$

于是由于$\lambda_2,\cdots,\lambda_p$仍赋套，且由(32)按归纳法假设，有

$$|(z-b_2)\cdots(z-b_{k-1})(|z|-1)/[(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_k)]|\leqslant c_1,\quad |z|>1, \tag{35}$$

联合(34)、(35)便得(33)。

若$|\lambda_1-\lambda_2|>1-|\lambda_1|$，则$|b_1-\lambda_1|\leqslant 2\bar{c}|\lambda_1-\lambda_2|$，当$|z-\lambda_1|\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$，有$|z-\lambda_1|\geqslant\frac{1}{4\bar{c}}|b_1-\lambda_1|$，从而

$|(z-b_1)/(z-\lambda_1)|\leqslant 1+|b_1-\lambda_1)/(z-\lambda_1)|\leqslant 4\bar{c}+1,\quad |z|>1$，同上，由归纳法假设知此时(33)也成立；当$|z-\lambda_1|<\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$，有$|z-\lambda_2|>\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|\geqslant\frac{1}{4\bar{c}}|b_1-\lambda_1|$,

$$\left|\frac{(z-b_1)}{(z-\lambda_2)}\right|\leqslant 1+\left|\frac{b_1-\lambda_2}{z-\lambda_2}\right|\leqslant 1+\left|\frac{b_1-\lambda_1}{z-\lambda_2}\right|+\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{z-\lambda_2}\right|\leqslant 4\bar{c}+3. \tag{36}$$

而此时$\lambda_1,\lambda_3,\cdots,\lambda_p$仍赋套，且由于

$$\begin{aligned}|b_2-\lambda_1|&\leqslant|b_2-\lambda_2|+|\lambda_1-\lambda_2|\leqslant\bar{c}(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|)+|\lambda_1-\lambda_2|\\&\leqslant M(2\bar{c}+1)(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_3|),\end{aligned} \tag{37}$$

其中$M>1$是套常数。于是由(32)、(37)和归纳法假设知

$|(z-b_2)(z-b_3)\cdots(z-b_{k-1})(|z|-1)/[(z-\lambda_1)(z-\lambda_3)\cdots(z-\lambda_k)]|\leqslant c_2$，再联合(36)得(33)。归纳法完成。

定理9′. 设p阶矩阵族$\mathscr{F}=\{A\}$满足von Neumann条件，则$\mathscr{F}$稳定的充分条件是：$(zI-A)$的诸代数余子式A_{ij}按行列式展式的每一项满足(J)条件。

定理10. 对于其特征值按对角元位置赋套的p阶上三角矩阵族$\mathscr{F}$，定理9′的条件与Buchanan准则的条件等价。从而此时定理9′的条件是充要条件。

证明. 只需证明定理2中的条件能保证诸A_{ij}的行列式展式的每一项均满足(J)条件。

注意$A_{ij}=0$ $(j>i)$，而A_{ii}的行列式展式只有一项且显然满足(J)条件。因此，只需对A_{ij} $(i>j)$进行证明。$p=2$显然，$p=3$，推论1已证，今设$p<k$时为真，往证$p=k$时亦然。事实上，

$$A_{ii-1}=(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{i-2})a_{i-1;i}(z-\lambda_{i+1})\cdots(z-\lambda_k),\quad i=2,\cdots,p. \tag{38}$$

而由(4)，$|a_{i-1;i}|\leqslant c(1-|\lambda_{i-1}|+|\lambda_{i-1}-\lambda_i|)$，从而，$A_{i;i-1}$按(38)中的次序满足(J)条件。当$j<i-1$时，

$$A_{ij}=\left|\begin{array}{cccccccccc}
z-\lambda_1 & -a_{12} & & & & & & & & \\
0 & z-\lambda_2 & * & & & & & & & * \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & z-\lambda_{j-1} & * & & & & & \\
 & & & 0 & -a_{jj+1} & -a_{jj+2} & & & & \\
 & & & & z-\lambda_{j+1} & -a_{j+1;j+2} & * & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & z-\lambda_{i-2} & -a_{i-2,i-1} & & & \\
 & & & & & & z-\lambda_{i-1} & -a_{i-1\,i} & & \\
 & & & & & & & 0 & z-\lambda_{i+1} & \\
 & 0 & & & & & & & \ddots & * \\
 & & & & & & & & 0 & z-\lambda_k
\end{array}\right|. \tag{39}$$

为简明计，不妨仅就$k=4$时对$A_{ij}=A_{41}$加以证明。

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}-a_{12} & -a_{13} & -a_{14}\\ z-\lambda_2 & -a_{23} & -a_{24}\\ 0 & z-\lambda_3 & -a_{34}\end{vmatrix}=a_{12}\begin{vmatrix}-a_{23} & -a_{24}\\ z-\lambda_3 & -a_{34}\end{vmatrix}+(z-\lambda_2)\begin{vmatrix}-a_{13} & -a_{14}\\ z-\lambda_3 & -a_{34}\end{vmatrix}. \tag{40}$$

记

$$A'_{31}=\begin{vmatrix}-a_{23} & -a_{24}\\ z-\lambda_3 & -a_{34}\end{vmatrix},\qquad A''_{31}=\begin{vmatrix}-a_{13} & -a_{14}\\ z-\lambda_3 & -a_{34}\end{vmatrix}.$$

则A'_{31}是矩阵

$$\begin{pmatrix}z-\lambda_2 & -a_{23} & -a_{24}\\ 0 & z-\lambda_3 & -a_{34}\\ 0 & 0 & z-\lambda_4\end{pmatrix} \tag{41}$$

的第$i-j=3$行第$j=1$列元素的代数余子式，而(41)显然是满足Buchanan准则的其特征值赋套的$k-j=3$阶上三角矩阵族，由归纳法假设，A'_{31}的行列式展式的每一项满足3阶(J)条件，前边乘以a_{12}之后，因由(4)，$|a_{12}|\leqslant c(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|)$，便满足$k=4$阶(J)条件。又$A''_{31}$是矩阵

$$\begin{pmatrix} z-\lambda_1 & -a_{12} & -a_{14} \\ 0 & z-\lambda_3 & -a_{34} \\ 0 & 0 & z-\lambda_4 \end{pmatrix} \tag{42}$$

的第 $i-j=3$ 行第 $j=1$ 列元素的代数余子式，而(42)显然是满足 Buchanan 准则的其特征值赋套的上三角矩阵族，由归纳法假定，A''_{31} 的行列式展式的每一项满足 $k-1=3$ 阶 (J) 条件，不妨写成

$$\begin{cases} |a''_1| \leqslant \bar{c}(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_3|), \\ |a''_2| \leqslant \bar{c}(1-|\lambda_3|+|\lambda_3-\lambda_4|), \end{cases} \tag{43}$$

其中 a''_1, a''_2 或是A的非对角元，或是A的某二特征值之差。于是，若$\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_3|>|\lambda_1-\lambda_2|$，则$\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_3|<|\lambda_2-\lambda_3|$，

$$|a''_1| \leqslant \bar{c}(1-|\lambda_2|+|\lambda_1-\lambda_2|+|\lambda_1-\lambda_3|) \leqslant 3\bar{c}(1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|). \tag{44}$$

由(44)、(43)的第二式以及$|\lambda_2-\lambda_1| \leqslant 1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|$知，在 A''_{31} 的展式的每一项前边乘以 $(z-\lambda_2)$ 后得到的 A_{41} 展式中的相应项，按次序 $\lambda_2-\lambda_1$，a''_1, a''_2 满足 $k=4$ 阶(J)条件。

若$\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_3| \leqslant |\lambda_1-{}_2\lambda|$，则由

$$|a''_1| \leqslant 2\bar{c}(1-|\lambda_1|+|\lambda_1-\lambda_2|),\quad 0=|\lambda_1-\lambda_2| \leqslant 1-|\lambda_2|+|\lambda_2-\lambda_3|, \tag{45}$$

以及(43)的第二式知，A''_{31} 展式的每一项乘以 $(z-\lambda_2)$ 之后所得 A_{41} 展式中的相应项，按次序 a''_1，$\lambda_2-\lambda_2$，a''_2 满足 $k=4$ 阶(J)条件。归纳法完成(不难看出一般情形证明类似)。

§4. 二维、三维波动方程

考虑逼近二维维波动方程的显格式

$$\frac{U^{n+1}_{ij}-2U^n_{ij}+U^{n-1}_{ij}}{\Delta t^2} = \frac{U^n_{i+1,j}-2U^n_{ij}+U^n_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U^n_{i,j+1}-2U^n_{ij}+U^n_{i,j-1}}{\Delta y^2}, \tag{46}$$

按通常作法 $\left(令\ u=\frac{\partial U}{\partial t},\ v=\frac{\partial U}{\partial x},\ w=\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ 格式(46)等价于差分方程组(例如，参见[4])

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}_{ij}-u^n_{ij}}{\Delta t} = \dfrac{v^n_{i+\frac{1}{2},j}-v^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \dfrac{w^n_{i,j+\frac{1}{2}}-w^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \\ \dfrac{v^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}-v^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta t} = \dfrac{u^{n+1}_{ij}-u^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x}, \\ \dfrac{w^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}-w_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \dfrac{u^{n+1}_{ij}-u^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y}. \end{cases} \tag{47}$$

用分离变量法易标出(47)的增长矩振为

$$G(\theta_1,\theta_2)=\begin{pmatrix}1 & a_1 i & a_2 i\\ a_1 i & 1-a_1^2 & -a_1a_2\\ a_2 i & -a_1a_2 & 1-a_2^2\end{pmatrix},\tag{48}$$

其中 $a_1=2r_1\sin\theta_1$，$a_2=2r_2\sin\theta_2$，$r_1=\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=\text{const}$，$r_2=\dfrac{\Delta t}{\Delta y}=\text{const}$，$\theta_1=\dfrac{\pi k_1\Delta x}{L_1}$，$\theta_2=\dfrac{\pi k_2\Delta y}{L_2}$，$k_1$，$k_2$ 是整数。于是(46)的稳定性等价于三阶矩阵族$\{G^n(\theta_1,\theta_2)\}$的一致有界性。下面利用推论 3 证明(46)稳定的充要条件是 $r_1^2+r_2^2<1$。

(48)的特征方程为

$(\lambda-1)[\lambda_2-(2-a_1^2-a_2^2)\lambda+1]=(\lambda-1)[\lambda^2-2(1-a^2)\lambda+1]=0$，其中$a=\left(\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$。

其特征根是

$$\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=1-a^2\pm a\sqrt{a^2-2}.$$

易知 $|\lambda_{2,3}|\leqslant1$ 的充要条件是（见[5]）

$$2|1-a^2|\leqslant2,$$

从而 $\{G(\theta_1,\theta_2)\}$ 满足 von Neumann 条件的充要条件是：$r_1^2+r_2^2\leqslant1$。在此条件下，有

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=1-a^2+ia\sqrt{2-a^2},\ \lambda_3=1-a^2-ia\sqrt{2-a^2}.\tag{49}$$

注意 λ_1，λ_2，λ_3 已赋套（因为 $|\lambda_1-\lambda_2|=|\lambda_1-\lambda_3|=\sqrt{2}a$）。若 $r_1^2+r_2^2<1$，则 $\sqrt{2-a^2}\geqslant\sqrt{2(1-r_1^2-r_2^2)}>0$，从而有

$$|\lambda_2-\lambda_3|=2a\sqrt{2-a^2}\geqslant2\sqrt{2(1-r_1^2-r_2^2)}\,a.\tag{50}$$

注意到$|a_1|\leqslant2$，$|a_2|\leqslant2$，$|a_1|\leqslant\sqrt{2}\,a$，$|a_2|\leqslant\sqrt{2}\,a$，有

$$|g_{11}-\lambda_1|+|g_{22}-\lambda_1|+|g_{31}|+|g_{32}|+|g_{12}|+|g_{21}|$$
$$=0+a_1^2+|a_2|+|a_1a_2|+2|a_1|\leqslant7\sqrt{2}\,a=7|\lambda_1-\lambda|,$$
$$|g_{13}|+|g_{23}|+|g_{33}-\lambda_2|=|a_2|+|a_1a_2|+|a_2^2-a^2+ia\sqrt{2-a^2}|$$
$$\leqslant|a_2|+|a_1a_2|+a_2^2+a^2+a\sqrt{2-a^2}\leqslant M_1a\leqslant M_2|\lambda_2-\lambda_3|.$$

其中 g_{ij} 是 $G(\theta_1,\theta_2)$ 的元素，M_1，M_2 是正常数。

当 $r_1^2+r_2^2=1$ 时，令 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$，则$a_1=2r_1$，$a_2=2r_2$，$a=\sqrt{2}$，此时$(zI-G)$的第 3 行第 1 列元素的代数余子式 $G_{31}=-a_1^2a_2i+a_2i(z-1+a_1^2)=i2r_2(z-1)$。从而 $B_{31}=i2r_2(|z|-1)/(z+1)^2$ 于 $|z|>1$ 无界，因此差分格式不稳定。当 $r_1^2+r_2^2>1$，由于破坏 von Neumann 条件，也不稳定。

类似地，我们可以利用定理8′讨论逼近三维波动方程的显格式，得到稳定的充要条件是 $r_1^2+r_2^2+r_3^2<1$（证明略）。

值得提及的是，最近文[6]利用本文推论 3 和文[2]定理 4 证明了关于声热耦合问题的 Richtmyer 第三猜想（参见[1]），并给出了稳定的充要条件。

作者感谢他的老师李荣华教授的指导。

参　考　文　献

[1] Richtmyer, R. D. and Morton, K. W., Difference Methods for Initial-value Problems, Second Edition, (1967.

[2] 李荣华、周长林，矩阵族 $G^n(\theta,\Delta t)$的一致有界性与差分格式稳定的条件(Ⅱ)，吉林大学自然科学学报，第 3 期（1964），15—29).

[3] 马驷良，二阶矩阵族 $G^n(k,\Delta t)$ 一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用，高等学校计算数学学报，1980，第 2 期.

[4] 李荣华、周长林，矩阵族$G^n(\theta)$ 的一致有界性与差分格式稳定的条件(Ⅰ)，吉林大学自然科学学报，第 2 期，1963）.

[5] 李荣华，关于二次方程根的分析及其在差分方法中的应用，吉林大学自然科学学报第，1 期（1963），

[6] Ma si liang and Xu Zheuyin, On Richtmyer's Conjecture, 待发表.

Condition (J) for the stability of a Family of Matrices and Its Relation to the Buchanan Criterion

By *Ma Siliang* (马驷良)

Abstract

It is observed that the Kreiss theorem and the Buchanan criterion for the stability of the family of matrices are not convenient to apply in practice. In this paper (§2.§3) we have derived some more practical condition (J) of which the proof follows from the resolvent condition of the Kreiss matrix theorem. Furthermore, we have proved the equivalence between the condition (J) and the Buchanan criterion for the family of matrices with upper triangular form and with their eigenvalues nested. In §4, as an application of condition (J), we have discussed the stability of some explicit difference equations of the wave equation with 2 or 3 space variables, and provided necessary and sufficient conditions for stability.