关于径向矩阵与谱矩阵*

佟文廷

（南京大学数学系）

§1. 引言与记号

设 $A\in C^{n\times n}$，则称

$$\|A\|=\sup_{X\neq 0}\|AX\|/\|X\|$$

为A的谱模（谱范数），其中$\|X\|$表示向量$X\in C^{n\times 1}$的Euclid范数，即当$X=(x_1,\cdots,x_n)^T$时，$\|X\|=(X^*X)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$；$\|AX\|$为向量$AX$的Euclid范数。

如众周知，我们有如下结论：

引理 1[1]．设A、$B\in C^{n\times n}$，则谱模满足范数的三个条件：

1〉．恒正性：$\|A\|\geqslant 0$且$\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$；

2〉．齐次性：若$\alpha\in C$，则$\|\alpha A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$；

3〉．三角不等式：$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$．

此外还满足

4〉．$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$；

5〉．$\|A\|=\sup\limits_{\|X\|=1}\|AX\|$；

6〉．若$X\in C^{n\times 1}$，则$\|AX\|\leqslant\|A\|\cdot\|X\|$，且必有$0\neq y\in C^{n\times 1}$使$\|AY\|=\|A\|\cdot\|Y\|$；

7〉．设$\rho(A)$为A的谱半径，则$\rho(A)\leqslant\|A\|$；

8〉．$\|A\|=[\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}}=\|A^*\|$．

由上面的7〉,我们引进

定义 1．设$A\in C^{n\times n}$满足$\rho(A)=\|A\|$，则称A为径向矩阵，且记为$A\in R_a$。

若$AA^*=A^*A$，则称A为正规矩阵，且记为$A\in N_o$

众所周知，若$A\in N_o$，$f(x)\in C[x]$，则$f(A)\in N_o$．常用的Hermite矩阵、U矩阵都是正规矩阵．现在我们先来证明

定理 1．设$A\in N_o$，$f(x)\in C[x]$，则$f(A)\in R_a$，即

$$\|f(A)\|=\rho(f(A))．$$

* 1981年4月2日收到．

特别地，我们有 $A\in R_a$，即 $N_o\subseteq R_a$。

证：由引理 1 之 8 ⟩，我们只需要证明如下引理：

引理 2：设 $A\in N_o$，若 $AX=\lambda X, X\in C^{n\times 1}$，则 $A^*X=\bar{\lambda}X$，且当 $\lambda\in\sigma(A)$ 时，$\lambda\bar{\lambda}\in\sigma(AA^*)$。因此

$$\rho(AA^*)=\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2,$$

其中 $\sigma(A)$ 表示 A 的谱，即特征值的集合。

事实上，设 $B\in N_o$，则

$\|BX\|^2=(BX)^*(BX)=X^*B^*BX=X^*BB^*X=\|B^*X\|^2$。

由 $AX=\lambda X$，并注意到 $A-\lambda I\in N_o$，取 $B=A-\lambda I$，则 $BX=0$。因此

$$0=\|(A-\lambda I)X\|=\|(A-\lambda I)^*X\|=\|A^*X-\bar{\lambda}X\|.$$

故 $A^*X=\bar{\lambda}X$。于是若 $\lambda\in\sigma(A)$，即有 $X\neq 0$ 使 $AX=\lambda X$，则

$$A^*AXX^*=\lambda A^*XX^*=\lambda\bar{\lambda}XX^*,$$

而 $X\neq 0$，因此 $XX^*\in C^{n\times n}$ 必非零矩阵。从而必有一非零列向量 Y，使

$$A^*AY=\lambda\bar{\lambda}Y.$$

由此知 $\lambda\bar{\lambda}\in\sigma(A^*A)$，故

$$\rho(AA^*)=\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2.$$

这样引理 2 与定理 1 均已证毕。

上面定义的径向矩阵之研究，最初起源于带初始值之有界差分的稳定性问题。在这类问题中，用到序列 $\{\|A\|^k\}$，$(k=1,2,\cdots)$ 的一致有界性。由于

$$\rho(A^k)=[\rho(A)]^k\leqslant\|A^k\|\leqslant\|A\|^k,$$

显然 $\{\|A^k\|\}$ 一致有界之必要条件为 $\rho(A)\leqslant 1$，而当 $A\in R_o$ 时这也是充分条件（参看[2]）。可惜的是虽然定理 1 已指出 $N_o\subseteq R_a$，但一般的矩阵未必为径向矩阵。比如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，容易算出

$$\|A\|=[\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right]^{\frac{1}{2}}>1=\rho(A),$$

因此 $A\notin R_a$。于是寻求 R_a 的等价描述是一件很有意义的工作。1974 年 *M*. Goldberg 与 *G*. Zwas [2]、H. Flanders [3]、1975 年 *M*. Goldberg [4] 都研究了这一问题，其中 [2] 给出了 R_a 的一些等价描述，[3] 给出了 V. Pta'k [5] 中关于 R_a 等价描述的更简单的证明，[4] 则对正矩阵给出了一些更为精密的结果。

在矩阵论中还有一类比较重要的矩阵类，即谱矩阵。先引入如下定义

定义 2. 设 $A\in C^{n\times n}$，则称

$$\|A\|_n=\sup_{\|X\|=1}|X^*A^*X|$$

为 A 的数值半径。当 $\rho(A)=\|A\|_n$ 时，称 A 为谱矩阵，记为 $A\in S_p$。

本文的主要目的是给出径向矩阵与谱矩阵的一些新的等价描述，特别是只用谱半径的等价描述，同时指出二者的关系，即谱矩阵为径向矩阵的一个推广．利用本文的结果，可更方便地判断一个矩阵是否属于这两个矩阵类．

在不另行声明的情况下，本文所讨论的矩阵都是 n 阶复矩阵，且在本文中一直沿用本节中的各种记号．

§2. 径向矩阵

1974 年 *M*. Goldberg 与 *G*. Zwas 在[2]中证明了：若 A,B 均为径向矩阵且 $\rho(AB)\geqslant\rho(A)\rho(B)$，则 AB 也是径向矩阵．现在，我们来进一步证明如下结果：

定理 2. 设 A、$B\in R_a$，则

1〉. $\rho(AB)\leqslant\rho(A)\rho(B)$;

2〉$\rho(AB)=\rho(A)\rho(B)$ 时 $AB\in R_a$;

3〉. $A^k\in R_a, B^k\in R_a$. $k=1,2,\cdots$.

证. 由设并用引理 1 之 7〉与 4〉得

$$\rho(AB)\leqslant\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|=\rho(A)\rho(B).$$

由此即证出了 1〉. 且由此式可看出：若 $\rho(AB)=\rho(A)\rho(B)$ 则 $\rho(AB)=\|AB\|$，即 $AB\in R_a$．这又证出了 2〉．

再来证 3〉．由 $\rho(A^k)=[\rho(A)]^k$，再从 $A\in$ Ra 知 $\rho(A)=\|A\|$．

用引理 1 之 4〉就得

$$\|A\|^k=[\rho(A)]^k=\rho(A^k)\leqslant\|A^k\|\leqslant\|A\|^k.$$

这就指出 $\rho(A^k)=\|A^k\|$，即 $A^k\in R_a$，同理知 $B^k\in R_a$．

注 1. 本定理之 1〉指出了[2]中上述结果中的条件"$\rho(AB)>\rho(A)\rho(B)$"是虚拟的，即 $A,B\in R_a$ 时这一条件不可能成立．

注 2. 考察下面二式：

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

知 $\rho(AB)$ 可能大于 $\rho(A)\rho(B)$，也可能小于 $\rho(A)\rho(B)$．而由定理 1 与第二式知，在 $A,B\in R_a$ 且 $\rho(AB)<\rho(A)\rho(B)$ 时，仍可能有 $AB\in R_a$．

再考察

$$\begin{aligned}(I_2\oplus A)(A\oplus I_2)&=(A\oplus I_2)(I_2\oplus A)\\&=A\oplus A,\end{aligned}$$

其中 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$I_2$ 为 2 阶单位矩阵．

［2］中已证得下列结果：

$A\in R_s \Leftrightarrow AU$ 相似于 $D\oplus B$，其中 $D=diag(\lambda_1,\cdots\lambda_s)$，而

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_{s+1} & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n\end{pmatrix}(\text{“0”处元素均为}0,\text{“*”处可不为}0).$$

且 $|\lambda_1|=\cdots=|\lambda_s|>|\lambda_{s+1}|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$．同时 $[\rho(A)]^2I-B^*B$ 为半正定或正定 Hermite 矩阵．

由此知 $I_2\oplus A, A\oplus I_2\in R_a$．但容易看出 $A\oplus A\notin R_a$(因为 $\rho(A\oplus A)=0$ 而 $\|A\oplus A\|>0$，二者不等)．因此，可换的径向矩阵之积也未必为径向矩阵．

［2］中还证明了：若 $A\in R_a$，则 $\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2$．现在我们来证明反过来也是成立的，即

定理 3．设 $A\in C^{n\times n}$，则 $A\in R_a\Leftrightarrow\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2$．

证：由于 A^*A 为 Hermite 矩阵，因此 $A^*A\in N_o$．由定理1知 $A^*A\in R_a$，即 $\rho(A^*A)=\|A^*A\|$．再由引理1之8)，知 $\|A\|^2=\rho(A^*A)$．因此

$$\rho(A^*A)=\|A^*A\|=\|A\|^2\geqslant[\rho(A)]^2.$$

所以 $A\in R_a$ 即 $\|A\|=\rho(A)\Leftrightarrow\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2$．

由此顺便得到

推论 1．设 $A\in C^{n\times n}$，则

$$\|A^*A\|=\|A\|^2=\rho(A^*A).$$

注意 $\rho(A)=\rho(\pm A^*)$，因此 $\rho(\pm A^*A)=\rho(AA^*)$，又得

推论 2．设 $A\in C^{n\times n}$，则 $A\in R_a\Leftrightarrow\pm A^*\in R_r$．

$V.\ Pta'k$ 定理给出了 R_a 的一个等价描述(见 $V.\ Pta'k$[5])：若 $A\in C^{n\times n}$，则 $A\in R_a\Leftrightarrow\|A^n\|=\|A\|^n$．现在，我们来证明更好的结果（下文的定理4）．为此，先证明一引理：

引理 3．设 $B=(b_{jk})_{n\times n}$ 为半正定 Hermite 矩阵，若 $b_{jj}=0, j=1,\cdots,n$，则 $B=0$．

证：由所设知，若 $\sigma(B)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则 $\lambda_j\geqslant0, j=1,\cdots,n$，而且

$$\sum_{j=1}^n\lambda_j=trB=\sum_{j=1}^n b_{jj}=0.$$

因此，$\lambda_j=0, j=1,\cdots,n$，但 B 为 Hermite 矩阵，必有 U 矩阵 U_1 使

$$B=U_1\ diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U_1^*,$$

故 $B=0$．

再引进

引理 4[5]．设 $A\in C^{n\times n}$，$\|A\|\leqslant1$ 且对 $W_1,\cdots,W_r\in C^{n\times1}$ 有 $\|AW_j\|=\|W_j\|, j=1,\cdots,r$，则对任意的 $W\in V_1$ 都有

$$\|AW\|=\|W\|,$$

其中

$$V_1=\{W\mid W=\sum_{j=1}^{r}c_jW_j,\ \forall c_j\in C,j=1,\cdots,r\}.$$

现在来证 $Pta'k$ 定理的改进：

定理 4. 设$A\in C^{n\times n}$之最小多项式次数为p，$m\geqslant p$为任一个整数，则$A\in R_a\Leftrightarrow\|A^m\|=\|A\|^m$.

证： 设 $A\in R_a$，即 $\rho(A)=\|A\|$. 由定理 2 知 $A^m\in R_a$. 因此

$$\|A^m\|=\rho(A^m)=[\rho(A)]^m=\|A\|^m.$$

再设$\|A^m\|=\|A\|^m$来证$A\in R_a$. 若 $A=0$ 当然有 $A\in R_a$. 现设 $A\neq 0$，由谱模之恒正性与齐次性(引理 1)知，不失一般地可设$\|A\|=1$. 于是

$$\|A^m\|=\|A\|^m=1.$$

故由引理 1 之 6)知，必有 $W_0\in C^{n\times 1}$ 使

$$\|A^mW_0\|=\|W_0\|=1.$$

现记

$$V_1=\{W\mid W=\sum_{j=0}^{m-1}c_j(A^jW_0),\ \forall c_j\in C,j=0,1,\cdots,m-1\}.$$

对$1\leqslant k\leqslant m$ 有$\|A^k\|\leqslant\|A\|^k=1$. 于是

$$\begin{aligned}1=\|A^mW_0\|&=\|A^{m-k}(A^kW_0)\|\\&\leqslant\|A^{m-k}\|\cdot\|A^kW_0\|\leqslant\|A^kW_0\|\\&\leqslant\|A^k\|\cdot\|W_0\|\leqslant\|W_0\|=1.\end{aligned}$$

故$\|A^kW_0\|=1$，即

$$\|A(A^{k-1}W_0)\|=1,k=1,\cdots,m.$$

由引理 4 知，对一切 $W\in V_1$ 都有$\|AW\|=\|W\|$，但A的最小多项式为p次而 $m\geqslant p$，因此 $A^mW_0\in V_1$. 由此知

$$AV_1\subseteq V_1,$$

即 V_1 为A的不变子空间. 于是设$\dim V_1=r$，就有非异的 $P\in C^{n\times n}$ 使

$$A=P\begin{pmatrix}A_{11}&0\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}P^{-1},\quad A_{11}\in C^{r\times r}.$$

设$\mathscr{A}_{11}$ 为 A_{11} 在相应基之下对座的 V_1 上的线性变换，$\mathscr{A}$为

$$\begin{pmatrix}A_{11}&0\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}$$

在 C^n(即$C^{n\times 1}$)中相应基之下对应的线性变换，则$\mathscr{A}$在 V_1上之限制$\mathscr{A}\mid V_1=\mathscr{A}_{11}$，而$\sigma(A_{11})\subseteq\sigma(A)$. 由上证知 $0\notin\sigma(A_{11})$，因为否则必有$X_1\neq 0,X_1\in V_1$ 使 $AX_1=0$，这与$\|AX_1\|=\|X_1\|\neq 0$ 矛盾. 因此必有 $0\neq\lambda\in\sigma(A_{11})\subseteq\sigma(A)$使 $AX=\lambda X$，其中 $0\neq X\in V_1$. 对这个$X\in V_1$，我们有

$$\|AX\|=|\lambda|\cdot\|X\|=\|X\|.$$

由此可知$|\lambda|=1$. 但由上设$\|A\|=1$ 知$\rho(A)\leqslant\|A\|=1$ 故

$$\|A\|=\rho(A)=1,$$

即 $A\in R_a$. 定理证毕.

注意到$n\geqslant p$. 即可看出 $Pta'k$ 定理为本定理之特例.

§3. 谱矩阵

先来证明

定理 5. 设 $A\in C^{n\times n}$，则

1〉 $\|A\|_n$ 为一种拟范数，即有

拟恒正性：$\|A\|_n\geqslant 0$；

齐次性：$\|\alpha A\|_n=|\alpha|\cdot\|A\|_n$，$\forall\alpha\in C$；

三角不等式：$\|A+B\|_n\leqslant\|A\|_n+\|B\|_n$．$\forall B\in C^{n\times n}$．

2〉 $\|A\|_n=\sup\limits_{z\neq 0}|Z^*A^*Z|/\|Z\|=\|A^*\|_n$．

3〉 $\|A\|_n=0\Leftrightarrow A=-A^*$

4〉 $\|A\|_n\leqslant\|A\|$ 且因此 $\|AB\|_n\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$，$\forall B\in C^{n\times n}$．

证： 由 C 中数模性质并注意 $X^*A^*X\in C$，即知 1〉中各点成立．而由 1〉中之齐次性并注意到 $|X^*A^*X|=|X^*AX|$．即知 2〉成立．

再由
$$|X^*A^*X|=\left|X^*\left(\frac{A^*+A}{2}\right)X\right|$$
并注意到 $(A^*+A)/2$ 为 Hermite 矩阵，由 2〉知
$$\|A\|_n=0\Leftrightarrow\forall X\in C^{n\times 1},\ \left|X^*\left(\frac{A^*+A}{2}\right)X\right|=0$$
$$\Leftrightarrow A^*+A=0\Leftrightarrow A=-A^*.$$
这就证出了 3〉．

又由 Schwarz 不等式 $|(X,Y)|\leqslant\|X\|\cdot\|Y\|$，即
$$|X^*Y|\leqslant\|X\|\cdot\|Y\|,$$
知
$$|X^*A^*X|=|(AX)^*X|\leqslant\|(AX)^*\|\cdot\|X\|=\|AX\|\cdot\|X\|.$$
对 $\|X\|=1$ 取 Sup，得 $\|A\|_n\leqslant\|A\|$．因此又有
$$\|AB\|_n\leqslant\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|.$$
定理证毕．

注 3. 上面定理 4〉中的 $\|AB\|_n\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$ 不能改进为 $\|AB_n\leqslant\|A\|_n\cdot\|B\|_n$．例如，取
$$A=D_1\oplus O_{n-2}=B,$$
其中
$$D_1=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix},\quad O_{n-2}\text{ 为 }n-2\text{ 阶零矩阵}.$$
由 $A=-A^*, B=-B^*$ 用上面定理之 3〉知
$$\|A\|_n=\|B\|_n=o.$$
但
$$AB=diag(-4,-4)\oplus O_{n-2},$$
$$AB\neq-(AB)^*,$$
于是 $\|AB\|_n>o$，因此 $\|AB\|_n\leqslant\|A\|_n\cdot\|B\|_n$ 不成立．

下面我们给出谱半径与数值半径以及谱模的关系：

定理 6. 设 $A\in C^{n\times n}$，则
$$\|A\|=[\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}}\geqslant\|A\|_n=\frac{1}{2}\rho(A^*+A)\geqslant\rho(A).$$

证. 由 $$\|A\|_n=\sup_{\|X\|=1}|X^*A^*X|=\frac{1}{2}\sup_{\|X\|=1}|X^*(A^*+A)X|,$$
并对右端用 Hermite 型的极值性质，知
$$\|A\|_n=\frac{1}{2}\rho(A^*+A).$$
再设 $\lambda\in\sigma(A)$，则有 $X_0\in C^{n\times 1}$ 使 $AX_0=\lambda X_0,\|X_0\|=1$。于是
$$\|A\|_n=\sup_{\|X\|=1}|X^*A^*X|=\sup_{\|X\|=1}|X^*AX|$$
$$\geqslant|X_0^*AX_0|=|X_0^*\lambda X_0|=|\lambda|\cdot\|X_0\|=|\lambda|,$$
因此 $\|A\|_n\geqslant\rho(A)$。

又由引理1之8〉知
$$\|A\|=[\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}}.$$
而由定理5之4〉又知 $\|A\|_n\leqslant\|A\|$。因此有
$$\|A\|=[\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}}\geqslant\|A\|_n=\frac{1}{2}\rho(A^*+A)\geqslant\rho(A).$$
定理证毕。

由此定理可得如下推论：

推论. $R_a\subset S_p$.

证： 由定理6知
$$\rho(A)\leqslant\|A\|_n\leqslant\|A\|.$$
因此从 R_a，S_p 之定义立得 $R_r\subseteq S_p$。而考察矩阵
$$A=I_{n-2}\oplus B,$$
其中
$$B=\begin{pmatrix}0 & 3+2\sqrt{2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$
容易算出 $\rho(B)=1+\sqrt{2}$。因此 $\rho(A)=\max(1,1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$。但
$$\frac{A^*+A}{2}=I_{n-2}\oplus\left(\frac{B^*+B}{2}\right),$$
其中
$$\frac{B^*+B}{2}=\begin{pmatrix}0 & 1+\sqrt{2}\\ 1+\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$
由非负矩阵理论知
$$\rho\left(\frac{1}{2}(B^*+B)\right)=1+\sqrt{2}.$$
从而知 $$\frac{1}{2}\rho(A^*+A)=\max(1,1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}.$$
故由定理6知 $\|A\|_n=\rho(A)$，即 $A\in S_p$。下面来证 $A\notin R_a$。事实上，
$$A^*A=I_{n-2}\oplus B^*B,$$
这里
$$B^*B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (3+2\sqrt{2})^2\end{pmatrix}.$$

由此知

$$\rho(A^*A)=\rho(B^*B)=(3+2\sqrt{2})^2\neq[\rho(A)]^2=(1+\sqrt{2})^2.$$

故由定理 3 知 $A\notin R_a$。又取上述的 B 为 A，则知 $n=2$ 时亦有 $R_a\subset S_p$。综上知 $R_a\subset S_p$。证毕。

注 4. 1975 年 Goldberg[4]中的定理 1 的内容为：$A\geqslant 0$ 时 $\|A\|_n=\rho\left(\frac{A^*+A}{2}\right)$. 由上面的定理 6 知 $A\geqslant 0$ 这一条件是多余的，因为 $\|A\|_n=\rho\left(\frac{A^*+A}{2}\right)$ 对任何复矩阵都成立。

定理 1 已顺便指出 $N_o\subseteq R_a$，现在我们将正规矩阵与径向矩阵的这一关系更加精密化地表成

定理 7. $n>2$ 时 $N_o\subset R_a\subset S_p$，

$n=2$ 时 $N_o=R_a\subset S_p$.

证. 这里只需再证 $n>2$ 时 $N_o\neq R_a$ 以及 $n=2$ 时 $N_o=R_a$。取

$$A=I_{n-2}\oplus\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

由 §2 注 2，知 $A\in R_a$，但由

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

知 $A^*A\neq AA^*$，即 $A\notin N_o$。因此 $n>2$ 时 $N_o\neq R_o$，而 $N_o\subseteq R_a$，于是 $N_o\subset R_a$。

再证 $n=2$ 时 $N_o=R_a$，由定理 1 知只需要再证此时 $R_a\subseteq N_o$。事实上，由 §2 注 2 中所引用的[2]中结果知，若 $n=2$ 时 $A\in R_a$ 则 A 必 U 相似于对角型，因此 $A\in N_o$，定理证毕。

对谱矩阵，我们有如下的等价描述：

定理 8. 设 $A\in C^{n\times n}$，则下述各条是互为等价的：

1〉 $A\in S_p$；

2〉 $A^*\in S_p$；

3〉 $-A\in S_p$；

4〉 $\rho(A^*+A)=2\rho(A)$.

证： 由显见的事实：

$$|X^*A^*X|=|X(\pm A)X|$$

知，1〉，2〉，3〉互相等价．下面只需证 1〉$\Leftrightarrow$ 4〉，即

$$A\in S_p\Leftrightarrow\rho(A^*+A)=2\rho(A).$$

事实上，由 A^*+A 为 Hermite 矩阵知

$$A^*+A\in N_o\subset S_p,$$

即

$$\rho(A^*+A)=\|A^*+A\|_n.$$

但

$$\|A^*+A\|_n=\sup_{\|X\|=1}|X^*(A^*+A)X|$$

$$=2\sup_{\|X\|=1}|X^*A^*X|=2\|A\|_n\geqslant 2\rho(A),$$

由此即知欲证之结论成立。

由此定理的证明可顺便得到

推论1. 设 $A\in C^{n\times n}$，则

$$\rho(A^*A)=\|A^*+A\|_n=2\|A\|_n\geqslant 2\rho(A).$$

注5. 由定理3知径向矩阵可定义为满足

$$\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2$$

之矩阵类。而由定理8知，谱矩阵可相应地定义为满足

$$\rho(A^*+A)=2\rho(A)$$

的矩阵类。

由定理6之推论和定理8得

推论2. 设 $A\in C^{n\times n}$，且

$$\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2,$$

则

$$\rho(A^*+A)=2\rho(A).$$

最后，我们给出相应于定理2的下述结果：

定理9. 设 $A,B\in S_p$，则

$$\rho(A+B)\leqslant\rho(A)+\rho(B),$$

且当 $\rho(A+B)=\rho(A)+\rho(B)$ 时 $A+B\in S_p$。

证. 因为

$$\rho(A+B)\leqslant\|A+B\|_n\leqslant\|A\|_n+\|B\|_n,$$

而由所设知 $\|A\|_n=\rho(A)$，$\|B\|_n=\rho(B)$。于是

$$\rho(A+B)\leqslant\|A+B\|_n\leqslant\rho(A)+\rho(B).$$

由此又知，当 $\rho(A+B)=\rho(A)+\rho(B)$ 时必有

$$\rho(A+B)=\|A+B\|_n,$$

即 $A+B\in S_p$。定理证毕。

[附记] 本文写成后，作者读到M. Goldberg 1979年发表的[6]，[6]中未加证明地指出1974年M. Goldberg与G. Zwas已于[7]中得到与本文定理4相同的结果。但[6]中的参考文献中指出[7]尚未发表，又[6]中未加证明地指出他们于1976年发表的[8]中已得到 $n>2$ 时 $R_a\subset S_p$ 而 $n=2$ 时 $R_a=S_p$。但[8]所在的这一期杂志，作者至今尚未看到。不过，由本文定理6之推论，可知 $n>2$ 时这一结果是对的，而 $n=2$ 时[8]中的 $R_a=S_p$ 这一结果必定是错误的。

参 考 文 献

[1] Varga, R. A., Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1962. 有中译本：蒋尔雄、游兆永、张玉德译，矩阵迭代分析，上海科技出版社，1966.

[2] Goldberg, M. and Zwas, G., On matrices having egual spectral radius and spectral norm, *Linear Alg. Appl.*, 8 (1974), 427-434.

[3] Flanders, H., On the norm and spectral radius, *Linear and Multilinear Alg.*, 2(1974), 239-240.
[4] Goldberg, M., Numerical radius of positive matrices, *Linear Alg. Appl.*, 12(1975), 209-214.
[5] Pta'k, V., Norms and the spectral radius of matrices, *Czech. Math. J.*, 12(1962), 555-557.
[6] Goldberg, M., On certai finite dimensional numerical ranges and numerical radii, *Linear and Multilinear Alg.*, 7(1979), 329-342.
[7] Goldberg, M. and Zwas, G., A remark on a theorem by Pta'k, unpublished (1974).
[8] Goldberg, M. and Zwas, G., Inclusion relations between certain sets of matrices, *Linear and Multilinear Alg.*, 4(1976), 55-60.

On radial matrices and spectral matrices

By *Tong Wen-ting* (佟文廷)

Abstract

Let R_a and S_p be the sets of nxn radial matrices and nxn spectral matrices, respectively. In this paper we give some characterizations of R_a and S_p. Specially, we give the following results:

Theorem 1. For every $A\in C^{n\times n}$, the following statemens are equivalent:

1) $A\in R_a$;

2) $\pm A^*\in R_a$;

3) $\|A^m\|=\|A\|^m$, where $m\geqslant p$, and p is degree of the minimal polynomial of A;

4) $\rho(A^*A)=[\rho(A)]^2$, where $\rho(A)$ denotes the spectral radius of A;

Theorem 2. For every $A\in C^{n\times n}$, the following statements are equivalent:

1) $A\in S_p$;

2) $\pm A^*\in S_p$;

3) $\rho(A^*+A)=2\rho(A)$.

In addition, we give the following results:

Theorem 3. Let $A,B\in R_a$, then

1) $\rho(AB)\leqslant\rho(A)\rho(B)$;

2) $\rho(AB)=\rho(A)\rho(B)\Rightarrow AB\in R_a$;

3) $A^k\in R_a$, $B^k\in R_a$, $k=1,2,\cdots$.

Theorem 4. Let $A,B\in S_p$, then

1) $\rho(A+B)\leqslant\rho(A)+\rho(B)$;

2) $\rho(A+B)=\rho(A)+\rho(B)\Rightarrow A+B\in S_p$.

Theorem 5. Let $A\in No\cap C^{n\times n}$ and $f(x)\in C[x]$, then $f(A)\in R_a$.

Theorem 6. $N_o\subset R_a\subset S_p \quad (n>2)$,

$N_o=R_a\subset S_p \quad (n=2)$,

where No is the set of normal matrices.