1982年1月　　数学研究与评论　　第1期

环结构中的若干新成果(二)*

谢邦杰

(吉林大学)

本文是前一文的继续。在前一文中，陈述了近廿年来关于Noether环、Artin环、Jacobson根与半单纯环等方面的一些新成果。本文则将继续陈述其它一些方面的结果，如质环与质理想、各种正则环、其它一些特殊的环与理想等方面。

一、质环方面

设环R为诸环$R_\alpha(\alpha\in\Lambda)$的一个亚直接和。如果R到$\prod\limits_{\beta\neq\alpha}R_\beta$内的自然映射之核恒非零，则说此亚直接和为不可缩减的。Levy(1963,[1])研究质环的不可缩减的亚直接和，并把它与Goldie、Johnson、Utumi及Lambek等在商环上的工作联系起来。首先证明了：一环R为诸质环的一个不可缩减的亚直接和必要而且只要R为半质环且R中每个真零化子理想恒含于一个极大真零化子理想。此时，质分量R_α是由R到$\prod\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$内的同构映射所唯一确定。然后又列出了R的零化子理想与A的子集之间的反包含一一对应。并由此推广了Utumi(1956,[2])与Lambek(1961,[3])的结果而得到：如果R是诸质环R_α的一个不可缩减的亚直接和，而S_α为R_α的右(右与左)商的极大环，则$\prod\limits_{\alpha\in A}S_\alpha$为R的右(右与左)商的极大环。最后证明了：一个半质环具有一个满足极小条件的半单纯环为其典型右商环的充要条件，是它为有限个质环的一个不可缩减的亚直接和，且每个质分量具有满足极小条件的单纯环为其典型右商环。

设A是一个半质环。由于A的理想T的左、右零化子恒重合，故是由T所唯一确定而可记之为T*。A中所有这样的质理想P使$P^*\neq\{o\}$的所构成的集合D叫做A的分解集；A中质理想的一个集合X称为一个极小分解集，如果$\bigcap\limits_{P\in X}P=\{o\}$但任意去掉一个后其交即非零。Kishimoto与Kurata(1962,[4])证明了下列诸命题等价于A中存在极小分解集：(*a*)每个非零理想T作为环就含有非零理想B而B为质环；(*b*)由本身为质环的所有这样的非零理想生成的理想的零化子为零；(*c*) D中存在一个子集其中的全部质理想之交为零；(*d*)存在一个理想T使$T^*=\{o\}$且T有一个极小分解集。另外还得到半质环的质理想的结构空间的一些定理。

* 1981年5月29日收到.

Koh(1965,[5]) 证明了当质环R含一个极大右零化子时它就不含诣零的单边理想。1966年又在[6]中通过R的很大右理想I（即R/I有限）的概念给出质环R在一个单纯Artin环中为右次的充分条件以及本原环为Artin环的充要条件。

Renault(1967,[7])证明了一个质环不含零因子必要而且只要它不含非零的詣零元素。Andrunakievič与Rjabubin(1968,[9])证明了：一个环不含非零的诣零元素必要而且只要它同构于非交换整环的一个亚直接乘积。Hentzel (1974,[10]) 又把此结果推广到交错环上。Chaccon(1968,[11]) 则证明了：周期环R不含非零的詣零元素必要而且只要R为半单纯的且 $E\subset C$。其中C为R的中心，E为R中所有等方元素作成的子集。又当周期环R满足 $E\subset C$ 时，R模其根的剩余环便为周期域的一个亚直接和。

如果环R的每个左理想均为某一个元素的左零化子，则说R是一个左的元零化环。同理有右的元零化环。Yohe(1968,[12]) 证明了：一个半质环R为左与右的元零化环必要而且只要它是体上矩阵环的一个直接和；有1的交换环为元零化环必要而且只要它为完全准质主理想环的一个直接和。此处所谓完全准质环，就是一个环R模其Jacobson根J的剩余环R/J为体时即称R为一个完全准质环。又若R/J仅为单纯环，则称R为准质环。

Johnoson与Levy(1968,[8]) 证明了：如果一个半质环R的左与右零化子均适合升链条件，则R的每个极大右理想必含正则元素。

Kimura与Tominaga(1971,[13]) 把Baumgartner(1969,[14]) 关于体的一个定理推广为：如果A是一个质环或Artin半单纯环，B为A的一个Artin半单纯子环且其中心为有限的，则A的中心C为有限的必要而且只要B-模B[x]的维数有一个有限的极大值，其中 $x\in C$。

如果环R的左理想恒为左零化子，则称R为LA-环。Jaegermann与Krempa(1972,[15]) 证明了R是一个半质的LA-环必要而且只要它是若干个体上有限维向量空间的完全线性变换环的一个直接和（可能有无限多个分量）。

对半质的P.I.环，Fisher(1973,[16]) 证明了R的极大左商环Q为正则的且R的正则元在Q中恒可逆。并问Q是否为一个P.I.环？Q是否为R的极大右商环？这两个问题均已由Martindale(1973,[17]) 作出了肯定的回答。而且再用Rowen(1973,[18]) 的一个结果“R的每个非零理想恒含有非零的等方元”来证明：R的一个右理想是本性的必要而且只要它与R的中心C的交在C中为本性的。

对质的P.I.环R，Posner定理谓R有一个单纯商环在其中心上为n^2维的。于是便可定义n为R的P.I.次数。Bergman与Small(1975,[19]) 研究了R的诸质剩余环的P.I.次数与R的P.I.次数的关系。特别地得到：R的P.I.次数为诸单纯剩余环的P.I.次数的线性组合，系数为非负整数。

设σ为环R的一个自同构但非恒等变换。如果对 $x\in R$ 及R的中心C恒有 $(xx^\sigma-x^\sigma x)\in C$，则说$\sigma$是一个非平凡的中心化自同构。Mayne(1976,[20]) 证明了具有这样的σ的质环必为交换整环。这是Divinsky(1955)、Posner(1957)、Luh(1970)等的有关结果的推广。

一个非质的环其真子环恒为质环时就称为一步的非质环。O.Steinfeld曾证明这样的环或为一个质数元数的零乘环或为两个质数元数域的直乘积。Szász(1976,[21]) 对此给出一个初等证明。

设G为环R的一来n元自同构群，R^G为其定环。Fisher与Osterbucg(1978,[23])证明了：当R为半质与n扭自由的时，R为左Goldie的必要而且只要R^G亦然。Fisher(1978,[22])又对这样的R进一步证明了斜群环R*G亦为半质的。

关于任意环Ω的Levitzki根N，[24]中引进所谓l-质理想而证明了：N为所有l-质理想之交；又当Ω为右Noether环时，其质理想均为l-质理想。

设I为环R的一个右理想。如果对R的右理想A，B只要$AB\subset I$，$AI\subset I$就必有$A\subset I$或$B\subset I$，则说I是R的一个质右理想。这是质理想概念的推广。Koh(1971,[25])证明了：如果对每个$a\in R$，由a生成的右理想$[a]_r$恒等于aR，则R是一个右Noether环必要而且只要R的每个质右理想恒为有限生成的。同样，R的每个右理想是由一个元素生成的必要而且只要每个质右理想亦然。此外，R的每个右理想恒为质右理想的充要条件是R为单纯环且对每个$a\in R$恒有$aR=[a]_r$。

如果一个交换环的质理想恒为主的，则称之为F-环。Gilmer(1969,[26])证明了：如果一个F-环有1或其准质理想恒为主的，则其理想恒为主的。

Watters(1975,[27])证明了：如果环R的每个质理想均为本原理想之交，则多项式环$R[x]$亦然。

如果有1的交换环的每个理想均为准质的，则叫做广义准质环，Satyanarayana(1969,[28])证明了：广义准质环为局部环；一个Noether环为广义准质环必要而且只要它是1维局部环；一个有1的交换遗传环为广义准质环必要而且只要它是离散赋值环；一个Noether广义准质环为离散赋环必要而且只要其唯一极大理想为主理想。

如果环R的Jacobson根$J(R)$是幂零的且$R/J(R)$为Artin环，则说R是一个半准质环。Clark(1967,[29])证明了：在半准质环中，主左理想为射影的必要而且只要左零化子为直和分量。以右易左亦然。

一个左Artin环R的中心Z(R)是半准质的，但未必是Artin的。Jensen与Jøndrup(1973,[30])研究了这样的问题：何种交换的半准质环能作为Artin环的中心？其主要结果为：设R为一个交换环且含极大理想M合于$M^2=0$，又$dim_{R/M}M\geqslant(R/M)$的基数，则R同构于一个左与右Artin环的中心。又还有一个左与右Artin环B及B的一个有限生成的自同构群G使R为G在B中的定环。此结果又推广到这样的半准质环R：$(J(R))^2=0$且$R/J(R)$至多是可数的。然后举了一个非平凡的例说明主要结果不能从本质上加以改进。最后证明了一个Noether(或Artin)环的一个有限生成的自同构群的交换定环是一个左Noether(或左Artin)环的中心。

若一环的两边理想恒为主左与主右理想，则称之为主理想环。Fisher(1976,[31])证明了：每个有限的主理想环必同构于环直接和$R_1\oplus\cdots\oplus R_t\oplus N$，其中$R_i$为准质主理想环，N为幂零主理想环。进一步知$R_i$为完全准质主理想环上的全阵环，N为质幂元数的幂零主理想环的一个直接和。最后，有限完全准质主理想环必为双环。

二、正则环方面

设Ω为一环。如果对$a\in\Omega$恒有Ω中的$x=x(a)$使$a=axa$，则说Ω是正则的；如果对$a\in$

Ω恒有Ω中的x使 $a=a^2x$,则说Ω是强正则的．易知强正则环恒为简化环(即不含非零的詣零元素的环)，而且一个环为强正则的必要而且只要它是正则的简化环．Arens 与 Kaplansky (1948,[32]) 证明了强正则环必为诸体的一个亚直接和．Azumaya(1954,[33]) 在有 1 的环中研究与强正则性等价的条件．Luh(1964,[34]) 证明了环Ω为强正则的必要而且只要Ω的每个元素必含于Ω的乘法半群的一个子群中.Ehrlich(1968,[35])证明了对强正则环的每元 a 恒有单位 u 使 $a=a^2u$．Sogawa(1971,[37]) 回答 S.Lajos 的一个猜想而证明了环Ω为强正则的必要而且只要对其左理想L与右理想R恒有$L\cap R=L\Omega R$．Wong(1972,[36]) 证明了：如果有 1 的简化环的完全质理想恒为极大右理想，则该环为强正则的．此外，又易由上述 Ehrlich 的结果而知：在正则环的一个整扩张中,完全质理想恒为极大右理想．故正则环的整扩张简化环必为强正则的．而且也推广了 Kaplansky 定理：一个交换环为正则的必要而且只要它是简化环且其质理想恒为极大的．Lajos(1973,[38]) 证明了一环为强正则的必要而且只要其右（左，拟，bi-）理想作成乘法半格．

Lajos 与 Szász(1970,[39]) 共提出11项与强正则性等价的条件．Chiba 与 Tominaga (1973,[40]) 又陈述了 9 项与强正则性等价的条件．包括下面这些：环Ω 为简化环且 Ω/P 恒为正则的（对每个质理想P)；对左理想L与右理想R恒有 $L\cap R=LR$；Ω为简化环且每个完全质理想为极大右理想等．Szász(1974,[41]) 又提出11项与强正则性等价的条件，有10项是早有的，新的 1 条是：有指数 $m,n\geqslant 2$ 使对环Ω的左理想L与右理想R恒有$(R+\Omega R)^m=R$，$(L+L\Omega)^n=L$.

说环A是其子环B的强正则扩张，如果对 $a\in A$恒有 $x\in A$使 $a^2x-a\in B$．Utumi(1957,[42]) 把在其中心上为强正则扩张的环叫做 ξ-环．Martindale(1958,[43]) 把前面陈述过的[32]中的结果推广成：Jacoboon 半单纯ξ-环为诸体的一个亚直接和．Faith(1962,[44]) 再把此推广为：如果半单纯环A为其交换子环 B 的强正则扩张，则 A 为诸体的一个亚直接和．并为证此而得到结构定理：如果A是本原环而非体，且A/B为强正则扩张，则 A 在 A 的有限拓扑中为稠密的．从而又知B 或为本原环或为整环，而且体的强正则扩张为诸体的一个亚直接和．Lihtman(1963,[45]) 又把 ξ-环再推广为所谓 s_n-环，并分别推广 Utumi 定理与 Martindale 定理为：一个 s_n环R的所有詣零元素生成一个詣零理想N，且R/N表为亚直接和时每个分量或为体或为整环；一个 s_n环为亚直接不可分环的一个亚直接和，每个分量或为体或为一环其 n 次交换子生成一个中心理想．

Szász(1971,[46]) 证明了：一个环R的每个子环S均满足 $S^2=S$ 必要而且只要每个子环的同态象的左零化子恒为零；必要而且只要每个子环均为强正则的；必要而且只要 R为交换环，R^+为挠群，并对R的每个 p-分量 R_p 有 $pR_p=0$，且由一个元素生成的子环恒为有限的而为有限域的一个直接和．

如果环K的元素 a 恒满足 $(a^2)=(a)$，则说K是完全等方的．这是强正则性的推广，而在交换环中这两者就一致了．K 的完全等方性的判别法是对 $a,b\in K$ 恒有 $(ab)=(a)(b)=(a)\cap(b)$.Andrunakievič 与 Rjabuhin(1971,[47]) 证明了：环K为完全等方的必要而且只要K 的同态象恒为简化环，必要而且只要K 的同态象恒非含零因子的亚直接不可约环；必要而且只要K的同态象恒为无零因子的亚直接不可约环的一个亚直接和．

在推广强正则环方面，Szász(1972,[48])研究了所谓P_1-环，即这样的环R，对每个元素a恒有$aR=aRa$。其后，在[49]中又研究了所谓P_2-环与P_3-环：当对每个元素a恒有$RaR=Ra^2R$之环R便称为P_2-环；当对环R的每个自同态σ就有等方元e，f使得恒有$x^\sigma=ex=xf$ $(x\in R)$时就说R为P_3-环。于是证明了：一个环R为P_2-环必要而且只要对R的元素a与理想J以及$n\geqslant3$，下二式$RaR\subset J$与$a^n\in J$恒等价；任意Artin强正则环必为P_3-环。

Ligh与Utumi(1974,[50])对P_1-环给出一些刻划，即对任意环R便有下列4个等价的命题：(1)R是一个P_1-环；(2)R是一个强正则环与一个零乘环的直接和；(3)对$a\in R$恒有$aR=Ra^2$；(4)对$a\in R$恒有$aR\subset Ra^2$且R的等方元恒在中心内。Chiba与Tominaga(1975,[51])证明了：有1的环R为P_1-环的充要条件是R为强正则的。

如果环R的真同态象恒为正则的，则说R是有限制正则的。Jain等(1971,[52])证明了：非质的右Noether环R是有限制正则的必要而且只要：(1)R为半单纯的Artin环；(2)R为一局部环上的n阶矩阵环，而J(R)为唯一非平凡理想；(3)R同构于$\begin{pmatrix}U & N\\ O & V\end{pmatrix}$，此处U,V均为单纯Artin环，N为一个不可约的$(U-V)$双模，R恰有三个非平凡理想，即J(R)与其左、右零化子。其中J(R)表R的Jacobson根。

Nitǎ(1975,[53])称环R为左N-正则的，如果对$a\in R$恒有n及$x\in R$使$xa^{n+1}=a^n$。显然R是左N-正则的必要而且只要R中这样的左理想Ra^n满足极小条件。既左又右的N-正则环称为N-正则的。于是证明了：若R还是左Noether的，则R为左Artin的；左N-正则环的Jacobson根为詣零的；N-正则环的中心仍为N-正则的。

如果对环R中的a恒有n使$aRa=a^nRa^n$，就称R为广义的亚交换正则环。Szász(1973,[54])得到这样的环R的一些基本性质：$a\in R$时就有b使$a^3=a^3ba^3$；如果a是R中詣零元素，则$a^3=o$；R的Jacobson根恰由全部詣零元素组成；如果R还是简化环，则R为强正则的，反之亦然。

如果环R的右理想恒为等方的(此等价于对$a\in R$恒有$a\in(aR)^2$)，则称R为右弱正则的。Ramamurthi(1973,[55])证明了：(1)右弱正则环的理想与商环均为右弱正则的；(2)右弱正则环的中心为正则的，(3)一个右弱正则环为简化环必要而且只要它是有1的单纯整环的一个亚直接和；(4)在右Artin环或交换环中，正则性、双正则性与右弱正则性是三为一体的；在一般情形下，后者是前二者的推广；(5)一个半质右Goldie环为右弱正则的必要而且只要它是单纯环R_i的一个有限直接和，且诸R_i中的x_i恒满足$x_i\in x_iR_i$。

设R为有1的环，$\langle a\rangle$表a在R中生成的理想。如果有$y\in\langle a\rangle$使$a=ay$，则说a是右弱正则的。如果$\langle a\rangle$中的元素均右弱正则的，则说a是真右弱正则的。以W(R)表R中所有真右弱正则元素的集合。Gupta(1974,[56])证明了：W(R)是R的一个理想；$W(R/W(R))=0$；对全阵环有$W(R_n)=(W(R))_n$；对R的理想A有$W(A)=A\cap W(R)$。

当一环之右理想恒为理想时即称为右双环。同理有左双环。既左又右的双环简称双环。S.Lajes(1970—71)证明了一环为正则双环的充要条件是对其左理想L_1，L_2与右理想R_1，R_2恒有$L_1\cap L_2=L_1L_2$，$R_1\cap R_2=R_1R_2$。Chandran(1975，[57])把正则双环R嵌入有1的正则环Ω使R为Ω的理想。此后，Chandran(1977,[58])又在Feller(1958，[59])与Thierrin(1960,[60])的基础上证明了：如果有1的左双环R的质理想恒为主的[或恒为有限生

成的]，则其任意理想亦然．最后又证明了一个有1的左双环为π-正则的必要而且只要其质理想恒极大．所谓π-正则性即对每个元素a恒有n及x使$a^nxa^n=a^n$．

如果有1的环R的每个元素均为R中两个单位之和，则说R具性质T．如果2为R的单位，则说R是2-可逆的．示性数非2的体上向量空间的自同态环即已由Wolfson(1953,[61])与Zelinsky(1954,[62])证其具有性质T. Skornjakov, L.A.(1958)曾问正则环是否均为由其单位生成的？G.Bergman(1974)已予以否定的回答．G.Ehrlich(1958)曾得出一大类正则环均具性质T，且均为2-可逆的．简称2-可逆的单位正则环．Fisher与Snider(1976,[63])证明了：

(1) 每个正则环其本原剩余环均为Artin环时，就是单位正则的（即由单位生成的）．又只要它是2-可逆的，它便具有性质T．特别地，正则P.I.环必为单位正则的（此亦为S.K. Jain独立所得结果）．

(2) 每个π-正则环其本原剩余环均为Artin环时，如其不以$Z/2Z$为同态象，就必具性质T．

(3) 2-可逆的强π-正则环必具有性质T．

三、诣零性与幂零性方面

环Ω的一个子集S叫做詣零的，如果对$x\in S$恒有$n=n(x)$使$x^n=0$；说詣零子集S的上指数为$m(m\geqslant 2)$，如果对$x\in S$恒有$x^m=0$，但有$a\in S$使$a^{m-1}\neq 0$．本文作者（1955,[64—65]）对一般环Ω证明了：

(1) Ω的一个上指数为m的詣零左理想必含有Ω的一个上指数为2或3的詣零左理想

(2) Ω的上指数为3的左理想必含Ω的上指数为2的左理想．

(3) Ω的上指数为2的左理想必为Ω的若干个幂零左理想的并集．

(4) 存在一个上指数为2的詣零环它不是幂零的（这就回答了Divinsky(1965,[66])在其书中的第六章§2所提的问题）．

(5) 左或右Noether环的詣零单边理想恒为幂零的（Levitzki(1945,[67])曾论证过此，但经Divinsky在[66]的第三章§2中指出其论证略有疏忽之外，但一直到Jacobson把它列入[68]中后，此点缺陷仍未得到改正．此结果即Köthe问题的肯定回答）．

(6) 若Ω中的左零化子满足极大条件，则Ω的詣零子环恒为Baer根环．

(7) 若Ω中的左与右零化子均分别满足极大条件，则Ω的詣零子环恒为幂零的（几年后，Levitzki; Herstein; Small等（1963—64,[69—71]）又再提出并论证了与此完全一样的命题）．

在这以前，Levitzki, J.曾证明过Ω的上指数为n的左理想必含有Ω的幂零左理想．这自然可以从（1)—(3）立即推出．与此有关，Felzenszwalb(1978,[72])证明了：

(1) 设环Ω不含詣零理想，U为Ω的一个理想．如果Ω中有一个元素a它能左零化U中每个元素的一个幂，则a必在U的左与右零化子中．

(2) 设环Ω不含詣零应理想，U为Ω的一个左（右）理想．如果a能左零化U的每个元素的一个幂，则a必在U的右（左）零化子中．

Herstein 与 Small(1964,[73]) 证明了诣零Goldie 环为幂零的。Lanski(1969,[74]) 把此推广成Goldie 环的诣零子环为幂零的。

如果一个环的每个真子环S恒小于其理想化子（即以S为理想的最大子环），则称之为U-环。P.A.Freĭdman(1960) 曾证明诣零 U-环必为半幂零的。Biggs(1970,[75]) 则证明了存在半幂零的非U-环。

Abían 与 Mc Worter(1963,[76]) 在 2 元域上构造了一些上指数为 2 的诣零代数，其中维数有限的均为幂零的，但无限维的则未必幂零。

Hmel′nickiĭ(1971,[77]) 证明了当一环之真子环恒幂零时该环必为幂零的（除去 p 元域这种平凡情形）。

Streb(1973,[78]) 证明了：如果有限环R不含非零等方元，则R为幂零环。故一有限环为幂零的必要而且只要它是诣零的。

Kegel(1964,[79]) 证明了：如果环R的极大子环M为可解的，则M为R的理想。且R的所有诣零元素组成一个可解理想，它是弱幂零的必要而且只要M亦然。又在[80]中把其早期的结果“如果R为两个幂零子环之和，则R为幂零的”。推广为：设 I 为R的理想。如果对R的每个使得 $f(I)\neq 0$ 的同态 f，就有 $f(R)$ 的含于 $f(I)$ 的非零理想 J 使 $J^2=0$（或使 $f(R)J=Jf(R)=0$），则说 I 是可解地（或幂零地）嵌入R。

以 S(R)（或 N(R)）表所有可解地（或幂零地）嵌入R的理想的和，则此二者即分别为此二性质的根。如果有子环 A,B 使 $R=A+B$，则 $N(A)N(B)=N(B)N(A)=O(mod S(R))$。

把一个环R看作一个算子环 L 上的代数时，R的一个子集若对R上某个二元运算×是闭合的，且满足 $t\times s=ts+a(s,t)t+b(s,t)$，此处 $a(s,t)$ 与 $b(s,t)$ 均为 s 的正幂的L-线性组合，则说此子集是弱闭合的。Hunter(1967,[81]) 证明了下列诸命题等价：(1) R的诣零子环恒为幂零的；(2) R的幂零子集的升链的并集为幂零的；(3) R的诣零弱闭合子集恒为幂零的。

示性数为 p 且恒满足 $yx^p=x^py$ 的环叫做 *pre-p-* 环。Weinert(1967,[82]) 证明了*pre-p*-环恒为亚直接不可约的 *pre-p*-诣零环的亚直接和。在一定程度上决定了亚直接不可约 *pre-p*-环的结构。

Mirbagheri(1970,[83]) 证明了：如果R是一个左 Noether 环而M为其 Brown-McCoy 根，R/M 是一个质 Goldie 整环，且对R中诣零元素 x 及任意 $y\in R$，交换子$[x,y]$恒为诣零的，则R必为幂零环。

设环 Ω 的子集的一个降链序列 (S_n)。如果有 n 使 S_n 与 S_{n+j} 的右零化子恒重合（对所有 $j>0$），则说此序列有一个右常量零化子。同理可定义左常量零化子。Shock(1972,[84]) 把环 Ω 的质根（即 Baer 根）P 刻划为所有这样 x 组成的：$x\Omega$ 为诣零的，且每个满足 $x_1=x$，$x_{n+1}\in x_n\cdots x_1\Omega$ 的序列 (x_n) 引出的子集序列 $(\Omega x_n\cdots x_1)$ 有一个右常量零化子。由此可证：质根P是幂零的必要而且只要 (P^n) 有右常量零化子，且对 P 中每个序列 (x_n)，序列 $\Omega x_n)\cdots x_1\Omega)$ 有左常量零化子。于是又推出 Ω 的理想满足极小条件时P即为幂零的。此外又证明了：如果 Ω 是一个右有限维的环，而 Ω 的序列 (x_n) 引出的子集序列 $(\Omega x_n\cdots x_1)$ 恒

有右常量零化子，且对每个诣零子环S，子集序列（S^n）恒有右常量零化子，则Ω的诣零子环均为幂零的。

有限生成的理想恒为主理想的幂零环叫做幂零半主环。Fountain(1973,[85]）继其[86]中对幂零主理想的刻划而研究幂零半主环，得到一个幂零环是半主的必要而且只要它有一个理想的分配格。并按加群的结构的不同情形来对这样环进行分类。

Steb(1973,[87]）得到一个诣零环为有限环的8项等价条件，这些条件是由左理想与理想的一些受限制的升、降链条件的各种不同组合产生出来的。

对域F上的全阵代数$M_n(F)$，Handelman与Selick(1974,[88]）证明了：如果一个非平凡代数是$M_n(F)$中的幂零类k中的所有交换幂零子代数中的极大者，则它就已是$M_n(F)$的所有交换幂零子代数中的极大者。

如果一个诣零环的每个子环或为一理想或为幂零的，则称之为N-环。Andrijanov(1974,[89]）证明了一个环为N-环必要而且只要它或为幂零环或为Hamilton诣零环。

如果有1的环R恒满足$Rxy=Ryx$，则说R以1为一个根元。此时R的所有诣零元素组成一个理想N，且R/N为诣零-半单纯环以1+N为一个根元。vonLeeuwen(1976,[90]）证明了：R为诣零-半单纯的必要而且只要R为诸体的交换子子环的一个亚直接和。如果R为Artin的，则R为有限个体的直接和。一个单纯质环Ω恒满足$\Omega xy=\Omega yx$时必为体。一个有1的双环未必以1为一个根元。

如果环Ω的一个左理想L的右零化子非零，则说L是Ω的一个左零因子理想。本文作者（1981,[96]）把本段开始所陈述的结果（5)(即Köthe问题的解答）推广为：左零因子理想适合极大条件的环的诣零单边理想恒为幂零的。

四、其它方面

如果有$n>1$使环R的元素x恒满足$x^n=x$，则说R是一个J-环。特别地，当R的示性数为质数p且恒有$x^{p^k}=x$时，称R为一个p^k-环。在$k=1$时，自然称为p-环。Luh(1967,[91]）证明了R是一个J-环必要而且只要它是有限个p^k-环的直接和。同年，又在[92]中把[93—94]的结果推广为：恒满足$x^my=xy^m$的环是一个指数有界的诣零环与一个J-环的直接和（该J-环恒满足$x^m=x$）。所谓p-环的质理想定理就是每个p-环恒含一个真质理想。如同质理想定理（[97]p.124）一样有许多等价于它的命题。其中之一是McCoy与Montgomery(1937）用选择公理证明的：每个p-环恒同构于诸p元域I_p的一个直接和的一个子环。Abian(1973,[95]）不用选择公理而得另一等价形式：I_p上多项式方程组在I_p中有一解，只要其每个有限子方程组亦然。Morita(1978,[118]）对J-环的交换性给了一个初等证明。

关于有限环方面。Ganesan(1964,[98]）曾证明仅有限个零因子的环必有限。Corbas(1969,[99]）定义有1的环R为少量零因子环，如其含$(n+1)^2$个元素时就恰含$n+1$个零因子（$n\geqslant1$）。并证明了这样的环的元数为p^{2j}，p为质数，$j\geqslant1$。进一步又完全决定了所有这样的环，并证明对每个可能的元数，至少有两个不同构的少量零因子环。当$j=1$时，这些环均为交换的；但$j>1$时，就有非交换的。这就回答了Ganesan的一个公开问题。

Laffey(1974,[100]) 对质数 p, q 定义 $C(p^\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}C(p^n)$, 其中 $C(p^n)$ 为 p^n 元循环解；$G_{p,q}=\bigcup_{n=0}^{\infty}GF(p^{q^n})$. 并证明了：如果无限环R的真子环恒有限，则或 $R^2=O$ 而 $R=C(p^\infty)$ 对某质数 p；或 $R=G_{p,q}$ 对某二质数 p, q. 由此可得下面的熟知定理的新证明：如果环R的子环适合极大与极小条件，则R为有限环(可参看[101]或 **MR17**,122). Abian 与 Floyd (1976,[102]) 证明了：如果有限环的所有非零元素按任何排列之积恒为 -1，则它必为域。

如果一环的真同态象恒有限，则称为剩余地有限环. 有限环与单纯环均如此. Chew 与 Lawn(1970,[103]) 证明了：环R为剩余地有限的必要而且只要R的理想适合升链条件且在R中非零质理想为指数有限的. 特别地，交换环R为剩余地有限的必要而且只要每个非零质理想为有限生成的且在R中为指数有限的. 一个无穷的剩余地有限环为质的；一个真正剩余地有限的交换环必为整环. 又设整环R的商域为F，S为R的扩张整环且在R上为整相关的. 于是当R为 Noether 的且S为剩余地有限环时R亦然；当R为剩余地有限环且S的商域在F上为有限扩张时，S就是剩余地有限环. 此外，一个无穷的剩余地有限的半局部环R可嵌入一个剩余地有限的完全局部环 R' 它是R的完满化 R^* 的一个同态象；一个非无限域的交换环R为剩余地有限的完全局部环必要而且只要它是一个紧致拓扑环而含唯一的非零真质理想P且 P^2 为开的.

Gilmer(1963,[104]) 证明了：有1的有限交换环S当其单位组成循环乘法群时，就必为同类型的准质环的直接和，而且这样的准质环恒为有限域或整数环上的多项式环的同态象. 通过对这些同态象的考虑，就决定了所有这样的环S. Raghavendran(1970,[105]) 把这样的非交换环S叫做 Gilmer 环，并证明了一环为不可分 Gilmer 环必要而且只要它是下面七类环中之一：(1)$GF(p^m)$；(2)$Z/(p^m)$, p 为奇质数且 $m\geqslant 2$；(3)$F[X]/(X^2)$, F 为有限质域；(4)$Z/(4)$；(5)$F[X]/(X^3)$, $F=GF(2)$；(6)$Z[X]/(4,2X,X^2-2)$；(7)GF(2) 上的所有2阶上三角矩阵环. 又若一个 Gilmer 环为 $k(\geqslant 2)$ 个不可分环的直接和时，就至少有 $k-1$ 个分量为示性数2的域. 此结果的交换情形已由 Gilmer 所处理，而且由 Eldridge 与 Fischer(1967,[106]) 推广到左 Artin 环. [105] 文的优点是统一处理交换与非交换情形，且在思路上与前两项工作有本质的区别. Ayoub(1969,[107]) 对交换Gilmer 环的分类（不可分的）给出新的证明.

如果一个非交换环R其真子环恒交换时就称为下堕环. Rédei 曾通过有限下堕环R的下列三断言而得到其分类与刻划：(1) R的同态象或为交换环或为有限下堕环；(2) R由两个非交换元生成；(3)R^+ 为 p-群. Ikeda(1966,[108]) 又证明了：若N为下堕环 Ω 之 Jacobson 根而且 Ω/N 在其中心上为有限的，则 Ω 必为有限下堕环.

所谓 Litoff 定理即每个含极小右理想的单纯环必为局部矩阵的. Faith 与 Utumi (1963,[109]) 曾对此给出一个新的初等证明. Kertész(1972,[110]) 应用 Jacobson 的稠密定理又再给出一个初等证明.

所谓弱 Bezaut 环，即环中任二主理想之交非零时其和与交均为主理想之环. Williams (1968,[111]) 证明了一个无零因子的环，只要其任二主理想之交非零时其和即为主理想，就必为弱 Bezout 环.

关于环R上的全阵环 R_n 的两个条件：(1) 如果 $A\in R_n$ 为幂零的，则有 $A^n=O$；(2)

如果在 R_n 中有 $AB=I_n$，则 $BA=I_n$。已知R满足（1）时必满足（2）.Klein(1970,[112]) 证明（2）未必能推出（1）。

Small(1973,[113]) 证明了：如果有1的环R在某交换环上满足一个多项恒等式，则当其理想满足极大条件时，其质理想即满足极小条件。

对于简化环R，已知其子集S的左与右零化子恒重合而为R的理想 S^*，且下列诸命题等价：(1)S^* 为一极大零化子；(2)S^* 为质理想；(3)S^* 为一极小质理想；(4)S^* 为完全质的。Cornish 与 Stewart(1974,[114]) 又证明了零化子适合极大条件的简化环恰为诸非交换整环的有限直乘积的子环。

如果对环A的元素 l 有 n 使 $lx=nx$（对所有 $x\in A$），则说 l 是一个左倍。Szász(1976,[115]) 证明了：A的每个元素均为左倍的充要条件是A的每个元素 a 具有形式 ma_0+a^*，此处是对某个 $n_0>0$ 有 $a_0x=n_0x$（对所有 x），且 a^* 在A的左零化子中。

设R为有1的环，$\sum$为R中任意一组理想。Blair(1976,[116]) 证明了存在R的扩张环 Ω 使$\sum$中每个理想均为 Ω 的一个主理想在R中的收缩（即与R之交）。

设R为有1的整环。如果R的两个主右（或左）理想之交仍为主的，则称R为 LCM 整环。Beauregard(1977,[117]) 考虑P.M.Cohn(1971) 的问题："如果R是右双环与左Ore环（即两个非零左理想之交恒非零），则R是否为左双环"？而证明了：对满足一项自然的有限条件的 LCM 整环回答是肯定的，但一般情形下为否定的。

参 考 文 献

[1] Levy, L., *Trans. Amer. Math. Soc.* 106(1963), 64.
[2] Utumi, Y., *Osaka Math. J.* 8(1956), no.1, 1.
[3] Lambek, J., *Canad. J. Math.* 13(1961), no.3, 292.
[4] Kishimoto, K.; Kurata, Y., *J. Fac. Sci. Hokkaoido Univ. Ser. I* 16(1962), 214.
[5] Koh, K., *Canad. Math. Bull.* 8(1965), 109.
[6] ——, *ibid.* 9(1966), 191.
[7] Renault, Guy, *J. Math. Pures Appl.* (9) 46(1967), 203.
[8] Johnson, R.E.; Levy, L.S., *Proc. Amer. Math. Soc.* 19(1968), 961.
[9] Andrunakievič, V. A.; Rjabuhin, *Ju. M., Dokl. Akad. Nauk SSSR* 180(1968), 9.
[10] Hentzel, I.R., *Proc. Amer. Math. Soc.* 42(1974), 373.
[11] Chacron, M,. *Bull. S. Math. Belg.* 20(1968), 66.
[12] Yohe, C.R., *Proc. Amer. Math. Soc.* 19(1968), 1346.
[13] Kimura, S.; Tominaga, H., *Proc. Japan Acad.* 47(1971), 517.
[14] Baumgartner, K., *Arch. Math.* (Basel) 20(1969), 134,
[15] Jaegermann, M.; Krempa, J., *Fund. Math.* 76(1972), no.2, 95.
[16] Eisher, J.W., *Proc. Amer. Math. Soc.* 39(1973), 465.
[17] Martindale, W.S., III, *ibid.* 40(1973), 365.
[18] Rowen, L., *Bull. Amer. Math. Soc.* 79(1973), 219.
[19] Bergman, G.M.; Small, L.W., *J. Algebra* 33(1975), 435.
[20] Mayne, J.H., *Canad. Math. Bull.* 19(1976), no.1. 113.
[21] Szász, F., *Period Math. Hungar.* 7(1976), no.1, 9.
[22] Fisher, J.W., *J. Algebra.* 52(1978), 241.
[23] Fisher, J.W.; Osterburg, J., *ibid.* 50(1978), 488.
[24] van der Walt, A.P.J., *Arch. Math.* 16(1965), 22.
[25] Koh, K., *Canad. Math. Bull.* 14(1971), 259.
[26] Gilmer, R., *Math. Ann.* 183(1969), 151.

[27] Watters, J.F., *J. Algebra* 36(1975), no.2, 302.
[28] Satyanarayana, M., *Math. Ann.* 179(1969), 109.
[29] Clark, W.E., *Osaka J. Math.* 4(1967), 177.
[30] Jensen, C.U.; Jondrup, S., *Math. Z.* 130(1973), 189.
[31] Fisher, J. L., *Canad. Math. Bull.* 19(1976), no.3, 277.
[32] Aremns, R.F.; Kaplansky, I., *Trans. Amer. Math. Soc.* 63(1948), 457.
[33] Azumaya, G., *J.Fac. Sci. Hokkaido Univ.* Ser. I 13(1954), 34.
[34] Luh, J., *Proc. Japan Acad.* 40(1964), 74.
[35] Ehrlich, G., *Portugal. Math.* 27(1968), 209.
[36] Wong, E.T., *Proc. Amer. Math. Soc.* 33(1972), 313.
[37] Sogawa, M., *Proc. Japan Acad.* 47(1971), 180.
[38] Lajos. S., *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 16(1973), 167.
[39] Lajos, S.; Szász, F., *Proc. Japan Acad.* 46(1970), 287.
[40] Chiba, K.; Tominaga, H., *ibid.* 49(1973), 435.
[41] Szász, F.A., *Bull. Acad. Polon. Sci. Sèr. Sci. Math. Astronom. Phys.* 22(1974), 243.
[42] Utumi, Y., *Proc. Japan Acad.* 33(1957), 63.
[43] Martindale, W.S., III, *Proc. Amer. Math. Soc.* 9(1958), 714.
[44] Faith, C., *Nagoya Math. J.* 20(1962), 169.
[45] Lihtman, A.I., *Sibirsk Mat. Ž.* 4(1963), 641.
[46] Szász, F.A., *Monatsh. Math.* 75(1971), 168.
[47] Andrunakievič, V.A.; Rjabuhin, Ju.M., *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 201(1971), 1015.
[48] Szász, F.A., *Math. Japon.* 17(1972), 115.
[49] ——, *ibid.* 18(1973), 87—90; 91—94.
[50] Ligh, S.; Utumi, Y., *Proc. Japan Acad.* 50(1974), 589.
[51] Chiba, K.; Tominaga, H., *ibid.*51(1975), no.4, 259.
[52] Jain, S.K.; Jain Saroj, *Math. Z.* 121(1971), 51.
[53] Nită, C., *Math. Pures Appl.* 20(1975), no.7, 793.
[54] Szász, F.A., *Monatsh. Math.* 77(1973), 67.
[55] Ramamurthi, V.S., *Canad. Math. Bull.* 16(1973), 317.
[56] Gupta, V., *Glasnik Mat.* Ser. III 9(29) (1974), 29.
[57] Chandran, V.R., *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur* (8) 58(1975), no.6, 823.
[58] ——, *Indian J. Prue Appl. Math.* 8(1977), no.1, 54.
[59] Feller, E.H., *Trans. Amer. Math. Soc.* 89(1958), 79.
[60] Thierrin, G., *Canad. Math. Bull.* 3(1960), 167.
[61] Wolfson, K.G., *Amer. J. Math.*, 75(1953). 358.
[62] Zelinsky, D., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5(1954), 627.
[63] Fisher, J.W.; Snider, R.L., *J. Algebra*, 42(1976), no.2, 363.
[64] 谢邦杰，东北人民大学（即现吉林大学）自然科学学报，1(1955), 13.
[65] ——，同上学报，同期，71.
[66] Divinsky, N.J., Rings and radicals, 1965.
[67] Levitzki, J., *Amer J. Math.*, 67(1945), 437.
[68] Jacobson, N., Structure of rings, 1956.
[69] Herstein, I.N.; Small, L., *Notices Amer. Math. Soc.* 10(1963), 662.
[70] ——, *Canad. J. Math.* 16(1964), 771.
[71] Levitzki, J., *Israel J. Math.* 1(1963), 215.
[72] Felzenszwalb, B., *Canad. Math. Bull.* 21(1978), no.2, 241.
[73] Herstein, I.N.; Small, L., *Canad. J. Math.* 16(1964), 771.
[74] Lanski, C., *ibid.* 21(1969), 904.
[75] Biggs, R.G., *ibid.* 22(1970), 403.
[76] Abian, A.; McWorter, W.A., *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 18(1963), 252.
[77] Hmel'nichiĭ, I.L., *Ural. Gos. Univ. Mat. Zap.* 8(1971), tetrad' 1. 121.

[78] Streb, W., *Elem. Math.* 28(1973), 70.
[79] Kegel, O.H., *Michigan Math. J.* 11(1964), 251.
[80] ——, *J. Algebra* 1(1964), 103.
[81] Hunter, K., *Arch. Math.* (Basel) 18(1967), 136.
[82] Weinert, H.J., *Amer. Math. Monthly* 74(1967), 378.
[83] Mirbagheri, A., *Portugal. Math.* 29(1970), 151.
[84] Shock, R.C., *J. Math. Soc. Japan* 24(1972), 374.
[85] Fountain, J.B., *Quart. J. Math.* Oxford Ser. (2) 24(1973), 433.
[86] ——, *Proc. London Math. Soc.* (3) 20(1970), 348.
[87] Steb, W., *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 48(1973), 349.
[88] Handelman, D.; Selick, P., *Canad. Math. Bull.* 17(1974), 125.
[89] Andrijanov, V·I., Sverdlovsk. Gos. Ped. Inst. Naučn. Trudy Sb. 219 Algebra i Mat. Anal., 1974, 10.
[90] von Leeuwen, L.C.A., *Acta Sci. Math.* (Szeged) 38(1976), no.1—2, 97.
[91] Luh, J., *Amer. Math. Monthly* 74(1967), 164.
[92] ——, *Canad. J. Math.* 19(1967), 1289.
[93] Yaqub, A., *Amer. Math. Monthly* 71(1964), 1010.
[94] Abiân, A., *ibid.* 71(1964), 155.
[95] ——, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie* (N.S.) 15(63) (1973), no.3, 259.
[96] 谢邦杰，数学进展，2(1981)，153.
[97] ——，超穷数与超穷论法，1979.
[98] Ganesan, N., *Math. Ann.* 157(1964), 215.
[99] Corbas, B., *ibid.* 181(1969), 1.
[100] Laffey, T.J., *Amer. Math. Monthly*, 81(1974), 270.
[101] Szele, T., *Publ. Math. Debrecen* 3(1954), 253.
[102] Abian, A.; Floyd, D.R., *Period. Math. Hungar.* 7(1976), no.3—4, 229.
[103] Chew, K.L.; Lawn, S., *Canad. J. Math.* 22(1970), 92.
[104] Gilmer, R.W., *Amer. J. Math.* 85(1963), 447.
[105] Raghavendran, R., *Compositio Math.* 22(1970), 49.
[106] Eldridge, K.E.; Fischer, I., *Duke Math. J.* 34(1967), 243.
[107] Ayoub, C., *Compositio Math.* 21(1969), 247.
[108] Ikeda, M., *Nagoya Math. J.* 27(1966), 371.
[109] Faith, C.; Utumi, Y., *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* 14(1963), 369.
[110] Kertész, A., *ibid.* 23(1972), 1.
[111] Williams, R.E., *Proc. Amer. Math. Soc.* 19(1968), 951.
[112] Klein, A.A., *Israel J. Math.* 8(1970), 90.
[113] Small, L.W., *Bull. Amer. Math. Soc.* 79(1973), 421.
[114] Cornish, W.H.; Stewart, P.N., *Canad. Math. Bull.* 17(1974), 35; Correction, *ibid.* 17, no.3, 425.
[115] Szász, F., *Acta Sci. Math.* (Szeged), 38(1976), no.1—2, 165.
[116] Blair, W.D., *Comm. Algebra*, 4(1976), no.2, 193; 校正于 no.7, 693.
[117] Beauregard, R.A., *Proc. Amer. Math. Soc.* 67(1977), no.2, 201.
[118] Morita, Y., *Mem. Defense Acad.* 18(1978), no.1, 1.