Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

关于赋值环的单元群*

陈炳辉　漆芝南

（江西大学数学系）

由于一个域K的赋值环的单元乘法群是域K的非零元乘法群K^*的一个子群，我们自然会问，K^*的子群满足什么条件时才成为K的某个赋值环的单元群？本文对此给出了一个充要条件，也讨论了这种子群的某些性质。

设K是一个域，M，N是K的两个子集，我们令 $-M=\{-a|a\in M\}$，$M+N=\{a+b|\ a\in M, b\in N\}$，$M\cdot N=\{ab|a\in M,\ b\in N\}$，$K^*=K\backslash\{0\}$，若$M\subseteq K^*$，令$M^{-1}=\{a^{-1}|a\in M\}$。

定义1　K^*的一个子群S称为具有对称性，如果对任意$a\in S$，均有$-a\in S$，即$-S=S$。

由定义立即得出：子群S具有对称性的充要条件是$-1\in S$。设$M\supset S$是K^*的二个有对称性的子群，令

$$T(S)=\{a\in K^*|a+S\subseteq S\},$$

$$T_M(S)=\{a\in M|a+S\subseteq S\}.$$

易知：$T(S)\cap S=\varnothing$。事实上，若存在$a\in T(S)\cap S$，则有$-a\in S$，因而$a+(-a)=0\in S$这与$S\subseteq K^*$矛盾。因为$T(S)\supseteq T_M(S)$，故$T_M(S)\cap S=\varnothing$。

引理1　设S是K^*的具有对称性的子群，M是K^*的子群且$M\supset S$，则有

(1) $T_M(S)+S=S$，　$T_M(S)\cdot S=T_M(S)$，

$T_M(S)^{-1}+S\subseteq T_M(S)^{-1}$。

(2) $-T_M(S)=T_M(S)$

(3) $[T_M(S)+T_M(S)]\cap M\subseteq T_M(S)$，

$T_M(S)T_M(S)\subseteq T_M(S)$。

(4) $T_M(S)\cap T_M(S)^{-1}=\varnothing$。

---

*推荐者：戴执中（江西大学）。

1981年5月20日收到。

特别当$M=K^*$时就得

$$(1)\ T(S)+S=S,\quad T(S)\cdot S=T(S),\quad T(S)^{-1}+S\subseteq T(S)^{-1}.$$

$$(2)\ -T(S)=T(S)$$

$$(3)\ T(S)+T(S)\subseteq T(S)\cup\{0\},\quad T(S)T(S)\subseteq T(S).$$

$$(4)\ T(S)\cap T(S)^{-1}=\emptyset.$$

证明 若$T_M(S)=\emptyset$，显然(1)—(4)都成立，故以下就$T_M(S)\neq\emptyset$时来讨论。

(1)由定义 $T_M(S)+S\subseteq S$. 反之，$\forall a\in S$，对$\forall x\in T_M(S)$，因S具有对称性，所以$-a\in S$，$x-a\in S$. 于是$-(x-a)\in S$. 故$a=x-(x-a)\in T_M(S)+S$ 所以 $T_M(S)+S=S$. $\forall x\in T_M(S)$，$\forall a\in S$，有$ax\in M$，$ax+S=a(x+a^{-1}S)=a(x+S)\subseteq aS=S$. 所以 $ax\in T_M(S)$，从而 $T_M(S)\cdot S\subseteq T_M(S)$. 但$1\in S$，故$T_M(S)\subseteq T_M(S)\cdot S$，从而$T_M(S)\cdot S=T_M(S)$. $\forall x\in T_M(S)^{-1}$，有$x^{-1}\in T_M(S)$，对$\forall a\in S$，$x^{-1}a\in T_M(S)$，从而$(a+x)/x=x^{-1}a+1\in S$，故$x/(a+x)\in S$. $1/(a+x)=(x/(a+x))x^{-1}\in ST_M(S)=T_M(S)$所以 $a+x\in T_M(S)^{-1}$. 于是 $T_M(S)^{-1}+S\subseteq T_M(S)^{-1}$ 成立。

(2) $\forall x\in T_M(S)$，得 $x+S=S$，从而$-x-S\subseteq -S$. 由$-S=S$，故$-x+S\subseteq S$，即$-x\in T_M(S)$. 于是$-T_M(S)\subseteq T_M(S)$. 两边乘以-1得 $T_M(S)\subseteq -T_M(S)$. 故 $T_M(S)=-T_M(S)$.

(3) $\forall x, y\in T_M(S)$，若$x+y\in M$，则由$(x+y)+S=x+(y+S)\subseteq x+S\subseteq S$推出$x+y\in T_M(S)$. 所以 $[T_M(S)+T_M(S)]\cap M\subseteq T_M(S)$ 成立. x，y 同上，自然有x，$y\in M$，所以 $xy\in M$，由 $y+1\in S$ 推出 $xy+x\in xS\subseteq T_M(S)$. 从而 $xy+S=(xy+x)+(-x+S)\subseteq xy+x+S\subseteq S$. 所以 $xy\in T_M(S)$，即$T_M(S)\cdot T_M(S)\subseteq T_M(S)$.

(4)若存在$x\in T_M(S)\cap T_M(S)^{-1}$，那么$x^{-1}\in T_M(S)$，所以$1=x\cdot x^{-1}\in T_M(S)\cdot T_M(S)\subseteq T_M(S)$. 而$1\in S$. 这与$S\cap T_M(S)=\emptyset$相矛盾.

若S是M的具有对称性子群，由引理 1 的(4)知，$T_M(S)^{-1}\cup T_M(S)\cup S$是M的互不相交的子集之并. 但这个却并不一定等于M. 例如$S=\{-1,1\}$，那么$T(S)=\emptyset$. 若$K\neq\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，则$K^*\neq T(S)^{-1}\cup S\cup T(S)$. 但我们关心的是这个并等于M的那些子群.

定义 2 设$M\supset S$是K^*的两个有对称性的子群，如果对$\forall x\in M\backslash S$均有$x\in T_M(S)$或者$x^{-1}\in T_M(S)$成立，则称S是M的一个具有性质U的子群，简称S是M的U-子群. 若对$\forall x\in K^*\backslash S$均有$x\in T(S)$或$x^{-1}\in T(S)$成立，则简称S是一个U-子群.

由定义立即知道，若 S 是 M 的具有对称性子群，它是M的 U-子群的充要条件是$M=T_M(S)\cup S\cup T_M(S)^{-1}$. 域K的赋值环与 K^* 的 U-子群有密切关系.

定理 1 设A是域K的一个赋值环，U_A 是 A 的全体单元所成的乘法群，$\mathfrak{M}_A$是 A 的极大理想，则U_A是K^*的U-子群，且$T(U_A)\cup\{0\}=\mathfrak{M}_A$，$A=U_A\cup T(U_A)\cup\{0\}$.

证明 设A所对应的Krull赋值为V，因为 $V(\pm 1)=0$，从而$-1\in U_A$，所以 U_A 具有对称性，对$\forall x\in K^*-U_A$，有 $V(x)>0$，或 $V(x^{-1})>0$，当 $V(x)>0$时，则$\forall a\in U_A$有$V(x+a)=V(a)=0$，即$x+a\in U_A$，所以 $x\in T(U_A)$；当 $V(x^{-1})>0$，同理可得 $x^{-1}\in T(U_A)$，所以 U_A 是 U-子群，从以上证明知其余二等式显然成立.

更为重要的是我们有：

定理 2　设S是K^*的U-子群，令

$$A(S)=S\cup T(S)\cup\{0\},$$

则$A(S)$是S在K中生成的子环；$A(S)$是K的赋值环，且$A(S)$的单元群$U_{A(S)}=S$，$A(S)$的极大理想$\mathscr{M}_{A(S)}=T(S)\cup\{0\}$

证明　首先证明$S+S\subseteq S\cup T(S)\cup\{0\}=A(S)$成立。否则，$\exists a,b\in S$，使$a+b\notin A(S)$，那么由S具有性质U知，必有$\frac{1}{a+b}\in T(S)$，因$-a^{-1}\in S$，所以$\frac{1}{a+b}-a^{-1}=\frac{-a^{-1}b}{a+b}\in S$，而$-a^{-1}b\in S$所以有$\frac{1}{a+b}=\frac{-a^{-1}b}{a+b}(-a^{-1}b)^{-1}\in S$，因此$\frac{1}{a+b}\in T(S)\cap S$，这与$T(S)\cap S=\varnothing$矛盾。

现在我们来证明$A(S)$是S生成的环：由S的对称性和引理1的(2)有：

$$-A(S)=(-S)\cup(-T(S))\cup\{0\}=S\cup T(S)\cup\{0\}=A(S).$$

由前式和引理1有

$$A(S)+A(S)=(S+S)\cup(S+T(S))\cup S\cup T(S)\cup(T(S)+T(S))\cup\{0\}$$
$$\subseteq A(S)\cup S\cup S\cup T(S)\cup T(S)\cup\{0\}=A(S)$$

即$A(S)$对加法是封闭的。再由引理1我们有

$$A(S)\cdot A(S)=(S\cdot S)\cup(S\cdot T(S))\cup(T(S)\cdot T(S))\cup\{0\}$$
$$\subseteq S\cup T(S)\cup T(S)\cup\{0\}=A(S).$$

即$A(S)$对乘法是封闭的。所以$A(S)$是K的包含S的子环。今设B是K的任意一个包含S的子环。因为$S\subset B$。所以$S+S\subseteq B$，又由$\pm1\in S$得$0=1+(-1)\in B$，再因$T(S)+S\subseteq S$，所以$T(S)\subset S-S=S+S\subseteq B$，因此$A(S)\subseteq B$，这就证明了$A(S)$是S在K中生成的子环。

$\forall a\in K^*$，若$a\notin A(S)$，则$a\in K^*\backslash S$，$a\notin T(S)$，由S是U-子群知$a^{-1}\in T(S)\subset A(S)$。所以$A(S)$是域K的一个赋值环。

由于$T(S)^{-1}\cap[S\cup T(S)\cup\{0\}]=\varnothing$。所以$\forall 0\neq a\in A(S)$，使$a$，$a^{-1}$都属于$A(S)$的充要条件是$a\in S$，因此得$U_{A(S)}=S$，$\mathscr{M}_{A(S)}=T(S)\cup\{0\}$。

推论 1　设S是K^*的具有对称性的子群，令$A(S)=S\cup T(S)\cup\{0\}$，则S是具有性质U的子群的充要条件是$A(S)$为K的赋值环。

证明　必要性由定理2得到。现设$A(S)$是K的赋值环，对$\forall a\in K^*\backslash S$，若$a\notin T(S)$，则$a\notin A(S)$，因$A(S)$是赋值环，所以$a^{-1}\in A(S)$，但$a^{-1}\notin S\cup\{0\}$，所以$a^{-1}\in T(S)$。因而S是$K^*$的具有性质U的子群。

引理 2　设$M\supset H\supset S$是K^*的三个具有对称性的子群，S是H的U-子群，H是M的U-子群，则S是M的U-子群。

证明　$\forall x\in M\backslash S$。我们应证$x+S\subseteq S$或$x^{-1}+S\subseteq S$成立，分二种情况，(1)当$x\in H$时，由假设必有$x+S\subseteq S$或$x^{-1}+S\subseteq S$成立。(2)当$x\in M\backslash H$时，由于H是M的U-子群，故必有$x+H\subseteq H$或$x^{-1}+H\subseteq H$成立。

当$x+H\subseteq H$，我们断言必有$x+S\subseteq S$。因否则，$\exists a\in S$使$x+a\notin S$，但$a\in H$，故$x+a\in H$。从而$(a+x)+S\subseteq S$或$(a+x)^{-1}+S\subseteq S$成立，若$(a+x)+S\subseteq S$成立，取$-a\in S$则$x=(a+x)-a\in S$这与$x\notin S$相矛盾。若$(a+x)^{-1}+S\subseteq S$成立，取$-a^{-1}\in S$则得$\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a}=\frac{-a^{-1}x}{a+x}\in S$，因$-a\in S$，所以$\frac{x}{a+x}=\frac{-a^{-1}x}{a+x}(-a)\in S\subset H$，但$a+x\in H$，所以$x=\frac{x}{a+x}(a+x)\in H$，这也是一个矛盾。

当$x^{-1}+H\subseteq H$时，同理可得$x^{-1}+S\subseteq S$。这就证明了S是M的U-子群。

引理3 设 $M\supset H\supset S$ 是K^*的三个有对称性的子群，若S是M的U-子群，则$T_M(H)\subseteq T_M(S)$。

证明 若结论不成立，则存在$x\in T_M(H)\backslash T_M(S)$由$x\in T_M(H)$得$x+1\in H$，而$x\in M\backslash H\subset M\backslash S$，再由$x\notin T_M(S)$知$x^{-1}\in T_M(S)$，所以$x^{-1}+1=\frac{x+1}{x}\in S\subset H$，从而$x=\frac{x}{1+x}(1+x)\in H$，这与$x\notin H$相矛盾。

在引理3中，如果S只是M中具有对称性子群，而不是M的U-子群，那么结论不一定成立。例如，$K=Q$，$M=Q^*$，H是P-进赋值环的单元乘法群，$S=\{1,-1\}$，那么$T(H)\neq\emptyset$，而$T(S)=\emptyset$，所以$T(H)\nsubseteq T(S)$。

最后，我们证明一个关于U-子群乘积的结果。

定理3 设M是K^*的子群，H，S是M的两个U-子群，则

(1) SH是M的U-子群；

(2) $T_M(SH)=[T_M(S)\cap T_M(H)]\backslash SH$。

证明 因为M是可换群，所以SH是M的子群，且$\{1,-1\}\subset S\subseteq SH$，所以SH是具有对称性的子群。

a)首先证明

$$\left.\begin{array}{l}T_M(S)\cap T_M(H)^{-1}\subseteq HS\\ T_M(H)\cap T_M(S)^{-1}\subseteq HS\end{array}\right\}\tag{I}$$

事实上，$\forall x\in T_M(S)\cap T_M(H)^{-1}$，有$\frac{1}{x}+1\in H$，$x+1\in S$所以$\left(\frac{1}{x}+1\right)^{-1}=\frac{x}{1+x}\in H$，因此$x=\frac{x}{1+x}(1+x)\in SH$，即$T_M(S)\cap T_M(H)^{-1}\subseteq SH$，同理可得另一式。

b)由假设条件有$M=T_M(S)^{-1}\cup S\cup T_M(S)=T_M(H)^{-1}\cup H\cup T_M(H)$。因为

$M\cap T_M(S)=(T_M(H)\cap T_M(S))\cup(T_M(H)^{-1}\cap T_M(S))\cup(H\cap T_M(S))$,

$M\cap T_M(S)^{-1}=(T_M(H)\cap T_M(S)^{-1})\cup(T_M(H)^{-1}\cap T_M(S)^{-1})\cup(H\cap T_M(S)^{-1})$,

$M\cap S=S\cup(S\cap H)$,

所以

$$M=M\cap M=(M\cap T_M(S))\cup(M\cap T(S)^{-1})\cup(M\cap S)$$
$$=(T_M(H)\cap T_M(S))\cup(T_M(H)^{-1}\cap T_M(S)^{-1})\cup(T_M(H)^{-1}\cap T_M(S))\cup(T_M(H)\cap T_M(S)^{-1})\cup[(H\cap T_M(S))\cup(H\cap T_M(S)^{-1})\cup(H\cap S)]\cup S$$
$$=(T_M(H)\cap T_M(S))\cup(T_M(H)^{-1}\cap T_M(S)^{-1})\cup(T_M(H)^{-1}\cap T_M(S))\cup(T_M(H)\cap T_M(S)^{-1})\cup H\cup S.$$

再由$H\subseteq SH$，$S\subseteq SH$和(I)得到：

$$M\subseteq(T_M(H)\cap T_M(S))\cup(T_M(H)^{-1}\cap T_M(S)^{-1})\cup SH$$
$$=[(T_M(H)\cap T_M(S)\backslash SH]\cup[T_M(H)^{-1}\cap T_M(S)^{-1})\backslash SH]\cup SH$$
$$=[(T_M(H)\cap T_M(S))\backslash SH]\cup[(T_M(H)\cap T_M(S))\backslash SH]^{-1}\cup SH\subseteq M$$

所以

$$M=[(T_M(H)\cap T_M(S))\backslash SH]\cup[(T_M(H)\cap T_M(S))\backslash SH]^{-1}\cup SH.$$

因此，要证SH是M的U-子群只要证明结论(2)成立即可。

c)现在我们来证明结论(2)。因为$S\subseteq SH$，$H\subseteq SH$，又S，H是M的U-子群，由引理3得$T_M(SH)\subseteq T_M(S)\cap T_M(H)$，又由于$T_M(SH)\cap SH=\emptyset$，所以$T_M(SH)\subseteq(T_M(S)\cap T_M(H))\backslash SH$。反过来$\forall x\in(T_M(S)\cap T_M(H))\backslash SH$。我们要证明$x+SH\subseteq SH$。若这个事实不成立，那么存在$y\in SH$，使$x+y\notin SH$；由于$y\in SH$，所以存在$a\in S$，$b\in H$使$y=ab\neq 0$，由$x+ab\notin SH$得$x/b+a\notin S$，所以$x/b\in M\backslash T_M(S)$。由$x\notin SH$知$x/b\in M\backslash S$。因为S是M的U-子群，所以必定有$b/x\in T_M(S)$。另一方面，由于$x\in T_M(H)$和$1/b\in H$，得到$x/b\in H\cdot T_M(H)\subseteq T_M(H)$。所以$x/b\in T_M(S)^{-1}\cap T_M(H)$。这样，再用(I)式得$x/b\in SH$，而$b\in H\subseteq SH$，所以$x=x/b\cdot b\in SH$，这与$x\notin SH$相矛盾。因此必有$x+SH\subseteq SH$。由$x$的任意性得$(T_M(S)\cap T_M(H))\backslash SH\subseteq T_M(SH)$，从而结论(2)成立。于是定理3获证。

推论2　设A，B是域K的赋值环，$C=AB$，则$U_C=U_AU_B$；$\mathscr{M}_C=(\mathscr{M}_A\cap\mathscr{M}_B)\backslash U_C$。

证明　令$M=U_AU_B$由定理1和定理3知M是K^*的U-子群，且$T(M)=[T(U_A)\cap T(U_B)]\backslash M$，因M包含$U_A$和$U_B$可推出K的赋值环$A(M)$包含$A(U_A)=A$和$A(U_B)=B$，所以$A(M)\supseteq AB=C$，从而知$M\supseteq U_C$。另一方面，因为A和B含于C，所以$U_A$和$U_B$含于$U_C$。因而$U_C\supseteq U_AU_B=M$。从而证明了$U_C=U_AU_B$，由定理1知$\mathscr{M}_C=T(U_C)\cup\{0\}$，$\mathscr{M}_A=T(U_A)\cup\{0\}$，$\mathscr{M}_B=T(U_B)\cup\{0\}$，再由$T(U_C)=(T(U_A)\cap T(U_B)\backslash U_C$，就得到$\mathscr{M}_C=(\mathscr{M}_A\cap\mathscr{M}_B)\backslash U_C$。

参考文献

[1] Endler, O., Valuation Theory, Springer-Verlag(1972).

On Groups of Units of a Valuation Ring

By *Chen Binghui* (陈炳辉) and *Qi Zhinan* (漆芝南)

Abstract

Let K be a field, K* be the multiplicative group of nonzero elements of K and S be a subgroup of K*. In this paper we show that S is a group of units of a valuation ring of K if and only if S satisfies the following conditions:

1. $a \in S$ implies $-a \in S$;

2. for any $a \in K^* \setminus S$, either $a + S \subseteq S$ or $a^{-1} + S \subseteq S$.

Additional properties of such groups are included.