Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

关于周期环与Jacobson环的几个定理*

谢 邦 杰

（吉林大学）

设R是一个环．如果对每个$x\in R$恒有正整数$m(x)$，$n(x)$ 使

$$x^{m(x)}=x^{n(x)},\ m(x)\neq n(x) \tag{1}$$

则说R是一个周期环(参看[1])；又若进一步对每个$x\in R$恒有正整数$n(x)$使

$$x^{n(x)}=x,\ n(x)>1 \tag{2}$$

则说R是一个 Jacobson环(参看[2])．由于满足(2)的环恒满足(1)，故Jacobson环必为周期环．但反之则不然．因由(2)式知 Jacobson 环中的非零元素都不是幂零元素，故非零的诣零环或含有非零幂零元素的有限环(例如有限域上的n阶（$n>1$)全阵环)都不是 Jacobson环，但这些环又都满足（1)，从而都是周期环．

由上所述，Jacobson环必为一个不含非零的幂零元素的周期环．不仅如此，我们将证任意一个不含非零的幂零元素的周期环必为Jacobson环，即得

定理1 任意一个环R是 Jacobson 环的充要条件为它是一个不含非零的幂零元素的周期环．

证明 必要性已如上述．今证充分性如下：设R是一个不含非零的幂零元素的周期环．在R中任取一个元素x来看．由(1)知有正整数$m(x)\neq n(x)$ 使$x^{m(x)}=x^{n(x)}$．现在不妨设$m(x)$是具有这样性质的最小正整数，于是有

$$x^{m(x)}=x^{n(x)},\ m(x)<n(x) \tag{3}$$

今断言(3)中的$m(x)$必为1．假若不然，则$m(x)>1$，$n(x)>1$，从而$x^{m(x)-1}$与$x^{n(x)-1}$均有意义而且由(3)立得

$$(x^{m(x)-1}-x^{n(x)-1})x=x^{m(x)}-x^{n(x)}=0$$

从而有

$$\begin{aligned}&(x^{m(x)-1}-x^{n(x)-1})(x^{m(x)-1}-x^{n(x)-1})\\=&(x^{m(x)-1}-x^{n(x)-1})x^{m(x)-1}-(x^{m(x)-1}-x^{n(x)-1})x^{n(x)-1}\\=&0-0=0.\end{aligned}$$

*1981年8月12日收到．

因为R不含非零的幂零元素，故由上式可得 $x^{m(x)-1}-x^{n(x)-1}=0$，于是有

$$x^{m(x)-1}=x^{n(x)-1},\quad (m(x)-1)<(n(x)-1)$$

此与（3）式中$m(x)$的最小性矛盾。故必有$m(x)=1$，从而(3)式便化为(2)式，即知R为Jacobson环。证毕。

把此定理与Jacobson定理(参看[3])结合起来便得熟知的结果：

系1 不含非零幂零元的有限环必为交换的。特别地，有限体必为域。

此外，定理1也可陈述为等价的

定理1′ 一个周期环R为Jacobson环的充要条件是它不含非零的幂零元素。

如果把条件加强一点则有

定理2 一个周期环R($\neq 0$)为域的充要条件是它无零因子。

证明 必要性是显然的，只证充分性。设R是一个无零因子的周期环。先由定理1′知R为Jacobson环。再由R$\neq 0$知R含有非零元素。现在任取R的一个非零元素a来看，由(2)式知有整数$n(a)>1$使$a^{n(a)}=a^1$。今将证$e=a^{n(a)-1}$必为R的单位元素。首先看

$e^2=a^{n(a)-1}\ a^{n(a)-1}=a^{n(a)+(n(a)-2)}=a^{1+(n(a)-2)}=a^{n(a)-1}=e$ 即知e为R的一个等方元素。其次由R无零因子及$a\neq 0$知$e\neq 0$。最后对R中任意元素x看

$$e(ex-x)=e^2x-ex=ex-ex=0$$

及$e\neq 0$知$ex-x=0$即$ex=x$，故e为R的左单位元素。同理看$(xe-x)e=0$知e为R的右单位元素。总之，$e=a^{n(a)-1}$是R的单位元素，其中a为R中任意非零元素。由此又看出$a^{n(a)-2}$为a的逆元素(当$n(a)=2$时，有$a=e$，而a^{-1}即e)。总起来便知R为体。然后由Jacobson定理即知R为域。证毕。

由定理2立即可得

定理3 一个Jacobson环R($\neq 0$)为域的充要条件是它无零因子。

改换一下条件又有

定理4 一个Jacobson环R为域的充要条件是它恰含一个非零的等方元素。

证明 条件的必要性是显然的，故只证条件是充分的。设Jacobson环R恰含一个非零的等方元素e，于是R$\neq 0$，而由定理3只要证R无零因子即可。假若不然，在R中有$a\neq 0$，$b\neq 0$而$ab=0$。首先由(2)式知有整数$n(a)>1$及整数$n(b)>1$使$a^{n(a)}=a$，$b^{n(b)}=b$。试看$a^{n(a)-1}\neq 0$及

$$a^{n(a)-1}a^{n(a)-1}=a^{n(a)+(n(a)-2)}=a^{1+(n(a)-2)}=a^{n(a)-1}\qquad (4)$$

即知必有$a^{n(a)-1}=e$。同理有$b^{n(b)-1}=e$。

于是$b^{n(b)-1}=a^{n(a)-1}$，从而有

$b=b^{n(b)}=b^{n(b)-1}b=a^{n(a)-1}b=0$,

此为矛盾。证毕。

把定理1′与定理4结合起来可得

定理5　一个周期环 R 为域的充要条件是它不含非零的幂零元素且恰含一个非零的等方元素。

由于有限环恒为周期环，故由定理 1 及定理 5 立即可得[4]中问题的又一个解答。即有

系2　一个有限环 R($\neq 0$)为域的充要条件是它只含一个幂零元素且至多含两个等方元素。

因为R满足所设条件时即由定理 1 知它是一个非零的Jacobson环，再由(4)式便知R含非零的等方元素，因此它就只能恰含一个非零的等方元素。

参　考　文　献

[1] Bell, H. E., Acta Math. Acad. Sci. Hungar 28(1976), no. 3-4, p.279.

[2] Lucke, J. B., Pacific J. Math. 32(1970), p. 187.

[3] Jacobson, N., Structure of Rings, 1956, p. 217.

[4] McWoter, W. A., Amer. Math. Monthly, 1967, p. 207; 1968, p. 203.

Some Theorems Concerning Periodic Rings and Jacobson Rings

By Xie Bangjie (谢邦杰)

Abstract

A ring R is called a periodic ring, if for every $x \in R$ there exist two distinct positive integers $m(x)$ and $n(x)$ such that $x^{m(x)} = x^{n(x)}$ (cf. [1]). in particularly, if $m(x) = 1$ for any $x \in R$, then this periodic ring is called a Jacobson ring (cf. [2]).

In this paper, a necessary and sufficient condition for a ring to be a Jacobson ring is given and some necessary and sufficient conditions for a periodic ring or a Jacobson ring to be a field are also given.