Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论

JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

数评

五

# Burgers型方程初值问题解的稳定性及孤波解*

王明亮

(兰州大学)

## 摘 要

本文证明 Burgers 型方程初值问题的解在$L_2$意义上的稳定性、唯一性；给出该方程存在扭状孤波解的条件及求扭状孤波解的方法。并指出 Burgers 型方程不存在钟状孤波解。

本文讨论 Burgers 型方程初值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0 \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \tag{2}$$

解的稳定性及方程(1)的孤波解。自变量$x$及$t$的变化范围是：$x=(x_1,x_2,\cdots x_n)\in R_n, 0\leqslant t\leqslant T$，$T$为任何固定的有限正数。我们假定：

$$-U\leqslant u,\frac{\partial u}{\partial x_i}\leqslant U$$

这里

$$U=\max_{\substack{x\in R_n\\ t\in[0,1]}}\left\{|u|,\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|(i=1,2,\cdots,n)\right\}$$

且当$|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\to 0$时，$u$及$\frac{\partial u}{\partial x_i}$均迅速趋于零，$u$及$\frac{\partial u}{\partial x_i}$都平方可积。

*1981年5月29日收到。

推荐人：陈庆益（兰州大学）。

本文曾在81年4月在合肥召开的非线性波讨论会上宣读过。

方程(1)的物理意义是非常明显的。以$n=1$的情形为例，若在某波动现象中，引进某物理量的单位长度的密度$u(x,t)$及单位时间的流量$q(x,t)$，当该波动现象满足守恒性质时，不难推得：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}=0 \tag{3}$$

当$q(x,t)$是$u$及其梯度$\frac{\partial u}{\partial x}$的函数时（这种情况并不乏实例[4]）：

$$q(x,t)=F(u)-\alpha^2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

将(4)代入(3)立得一维的Burgers型方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f(u)\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{5}$$

其中$f(u)=F'(u)$。特别在(5)中的$f(u)=u$时，即得Burgers方程。众所周知，Burgers方程可用cole-Hopf变换[1,2]化为线性热传导方程，从而求出了精确解。

## 一、稳　定　性

本段的论证方法，同[5]中的方法类似。

设$u_i$是满足初值$u_i|_{t=0}=\varphi_i(i=1,2)$，方程(1)的两个解，记$w=u_1-u_2$，则$w$满足线性方程：

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}f_i(u_1)\frac{\partial w}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}(f_i(u_1)-f_i(u_2))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}=0 \tag{6}$$

及初始条件：

$$w|_{t=0}=\varphi_1-\varphi_2=\psi \tag{7}$$

**定理1**　设$f_i(u)$及$f_i'(u)$在$-U\leqslant u\leqslant U$上存在且连续，只要

$$\int_{R_n}\psi^2(x)dx$$

充分小，则对一切$t\in[0,T]$

$$\int_{R_n}w^2(x,t)dx$$

可任意小。即问题(1)—(2)的解在$L_2$意义下是稳定的。

**证明**　以$w$乘(6)的两端，并在$R_n$上积分得：

$$\int_{R_n}ww_t dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{R_n}wf_i(u_1)\frac{\partial w}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}\int_{R_n}(f_i(u_1)-f_i(u_2))w\frac{\partial u_2}{\partial x_i}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\int_{R_n}w\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}dx=0 \tag{8}$$

记
$$\|w\|^2(t)=\int_{R_n} W^2(x,t)dx \tag{9}$$
则
$$\int_{R_n} ww_t dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t) \tag{10}$$
注意当$|x|\to\infty$时，$w\to 0$，分部积分易得：
$$\int_{R_n} wf_i(u_1)\frac{\partial w}{\partial x_i}dx=\frac{1}{2}\int_{R_n} w^2 f_i'(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}dx \tag{11}$$
$$\int_{R_n} w(f_i(u_1)-f_i(u_2))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}dx=\frac{1}{2}\int_{R_n} w^2\frac{2(f_i(u_1)-f_i(u_2))}{u_1-u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}dx \tag{12}$$
$$\int_{R_n} w\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}dx=-\int_R\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 dx \tag{13}$$
将(10—(13)代入(8)得：
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t)+\frac{1}{2}\int_{R_n} w^2\left[\sum_{i=1}^n\left(\frac{2(f_i(u_1)-f_i(u_2))}{u_1-u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+f'(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)\right]dx$$
$$+\sum_{i=1}^n\alpha_i^2\int_{R_n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 dx=0$$
由于
$$\sum_{i=1}^n\alpha_i^2\int_{R_n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 dx\geqslant 0,$$
故由上式可得：
$$\frac{d}{dt}\|w\|^2(t)+\int_{R_n} w^2\left[\sum_{i=1}^n\left(\frac{2(f_i(u_1)-f_i(u_2))}{u_1-u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+f_i'(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)\right]dx\leqslant 0 \tag{14}$$
由于 $f_i'(u)$在$-U\leqslant u\leqslant U$ 上连续及我们对 $u$ 的假定，可得如下的不等式：
$$\left|\int_{R_n} w^2\left[\sum_{i=1}^n\left(\frac{2(f_i(u_1)-f_i(u_2))}{u_1-u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+f_i'(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)\right]dx\right|$$
$$\leqslant\int_{R_n} w^2\sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{2(f_i(u_1)-f_i(u_2))}{u_1-u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|+\left|f_i'(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|\right)dx.$$
$$\leqslant 3nUK\|w\|^2(t) \tag{15}$$
其中
$$K=\max_{\substack{-U\leqslant u\leqslant U\\1\leqslant i\leqslant n}}|f_i'(u)|$$
由(14)及(15)得：
$$\frac{d}{dt}\|w\|^2(t)-3nUK\|w\|^2(t)\leqslant 0\quad t\in[0,T]$$
由此，
$$0\leqslant\|w\|^2(t)\leqslant\|w\|^2(0)e^{3nUKt}$$
$$\leqslant\|w\|^2(0)e^{3nUKT}$$

由(7)和(9)知：

$$\|w\|^2(0)=\|\psi\|^2=\int_{R_n}\psi^2(x)dx$$

故
$$\int_{R_n}w^2(x,t)dx\leqslant e^{3^*UKT}\int_{R_n}\psi^2(x)dx \tag{16}$$

由(16)知，只要$\int_{R_n}\psi^2(x)dx$充分小，对一切$t\in[0,T]$

$$\int_{R_n}w^2(x,t)dx$$

可任意的小。定理1证毕。

由定理1的证明过程，易知问题(1)—(2)的解也是唯一的。

完全类似于[5]中的论证方法，可证Burgers型方程组初值问题解的稳定性(从略)。

## 二、孤 波 解*)

我们讨论方程(1)存在孤波解的条件以及求孤波解的方法。所谓孤波解，是局部化的行波解[3]：

$$u(x,t)=s(\xi)\qquad \xi=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i-V_0t \tag{17}$$

$$\text{当}\quad|\xi|\to\infty\text{时},\qquad s(\xi)\to 0 \tag{18}$$

也不排除下述情形：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{当}\quad \xi\to-\infty\text{时}, & s(\xi)\to c^-\\ \text{当}\quad \xi\to+\infty\text{时}, & s(\xi)\to c^+\end{array}\right\} \tag{18'}$$

因为这时$s'(\xi)$满足(18)。这里的$k_i(i=1,2,\cdots,n)$及$c^\pm$均为常数。$V_0$是待定常数，表示波速。

满足条件(18)时，孤波的形状如图$a$或图$b$所示，称为钟状孤波；满足条件(18′)时，孤波的形状如图c所示，称为扭状孤波。

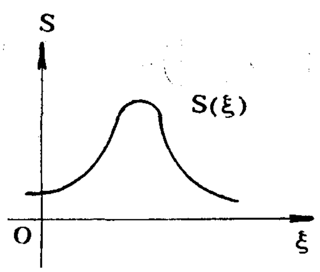


图 $a$.

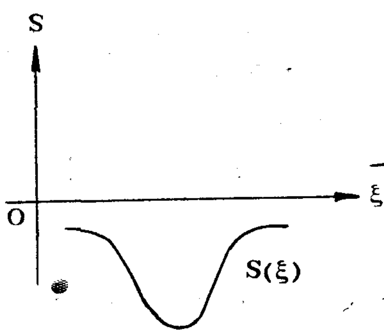


图 $b$.

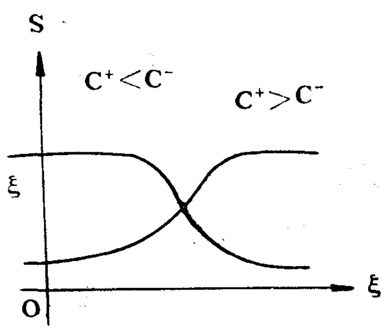


图 c.

*) 在写本段时，曾与牛培平同志进行过讨论，深表谢意。

为求方程(1)的扭状孤波解，将(17)代入(1)得：

$$-V_0\frac{ds}{d\xi}+\sum_{i=1}^{n}f_i(s)k_i\frac{ds}{d\xi}-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i k_i)^2\frac{d^2s}{d\xi^2}=0 \tag{19}$$

积分一次得：

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i k_i)^2\frac{ds}{d\xi}=\sum_{i=1}^{n}k_i\int_0^s f_i(\eta)d\eta-V_0 s+C \tag{20}$$

其中$C$为积分常数。

注意到条件(18′)，由(20)得：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}k_i\int_0^{c^+}f_i(\eta)d\eta-V_0c^++C=0\\&\sum_{i=1}^{n}k_i\int_0^{c^-}f_i(\eta)d\eta-V_0c^-+C=0\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

由(21)解得：

$$\left.\begin{aligned}&C=\frac{c^-\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\int_0^{c^+}f_i(\eta)d\eta-c^+\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\int_0^{c^-}f_i(\eta)d\eta}{C^+-C^-}\\&V_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\int_{c^-}^{c^+}f_i(\eta)d\eta}{C^+-C^-}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

将(22)代入(20)得：

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(k_i\alpha_i)^2\right]\frac{ds}{d\xi}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\left(c^+\int_{c^-}^{s}+c^-\int_s^{c^+}-s\int_{c^-}^{c^+}\right)f_i(\eta)d\eta}{C^+-C^-} \tag{23}$$

为解(23)，设$s|_{\xi=0}=s_0$，$c^+>c^-$，将(23)分离变量并积分得：

$$\int_{s_0}^{s}\frac{(c^+-c^-)\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i\alpha_i)^2ds}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\left(c^+\int_{c^-}^{s}+c^-\int_s^{c^+}-s\int_{c^-}^{c^+}\right)f_i(\eta)d\eta}=\xi \tag{24}$$

由于(24)中的分母作为$s$的函数，当$s=c^\pm$时为零。故只要假定在区间$(c^-, c^+)$上$\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\cdot f_i'(s)>0$或$\sum\limits_{i=1}^{n}k_if_i'(s)<0$，就保证其图形向下凸或向上凸，从而在$(c^-, c^+)$内无零点。因而(24)中的积分有意义。故若方程(1)有满足(18′)的解存在，则该解必满足(24)。

**定理2** 若方程(1)中的$f_i(u)$一次连续可微，满足下列条件之一：

1) $\sum_{i=1}^{n} k_i f_i'(u) > 0$，$c^- \leqslant u \leqslant c^+$，$k_i$ 为常数；

2) $\sum_{i=1}^{n} k_i f_i'(u) < 0$，$c^- \leqslant u \leqslant c^+$，$k_i$ 为常数，

则方程(1)满足条件(18′)的扭状孤波解其波形 $s(\xi)$ 必满足(24)，且必具波速

$$V_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \int_{c^-}^{c^+} f_i(\eta)\,d\eta}{C^+ - C^-}.$$

附带指出：方程(1)不存在在某点 $\xi=\xi_0$ 处具性质：$\left.\frac{ds}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0$ 及 $\left.\frac{d^2 s}{d\xi^2}\right|_{\xi=\xi_0} < 0$ $\left(\text{或} \left.\frac{d^2 s}{d\xi^2}\right|_{\xi=\xi_0} > 0\right)$

的钟状孤波解。因若孤波解具这种性质时，(19)不可能成立。

**例** 求 Burgers 型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial u}{\partial x} + u^2\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\alpha_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

的扭状孤波解：

$$u(x,y,t) = s(\xi),\quad \xi = k_1 x + k_2 y - V_0 t$$

$$s \to c \qquad \text{当 } \xi \to -\infty,$$

$$s \to 0 \qquad \text{当 } \xi \to +\infty.$$

**解** 由公式(22)可算出波速：

$V_0 = \frac{c^2}{3}(k_1 + k_2)$ (为确定计，设 $k_1, k_2$ 均为正)

由公式(24)可得：

$$\int_{s_0}^{s} \frac{c(\alpha_1^2 k_1^2 + \alpha_2^2 k_2^2)\,ds}{\frac{1}{3}c(k_1+k_2)s^3 - \frac{1}{3}c^3(k_1+k_2)s} = \xi.$$

或者改写上式为：

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{s(c^2 - s^2)} = -\frac{k_1 + k_2}{3(k_1^2\alpha_1^2 + k_2^2\alpha_2^2)}\xi$$

积分出上式得：

$$\frac{1}{2c^2}\log\frac{s^2}{c^2 - s^2} = -\frac{k_1 + k_2}{3(\alpha_1^2 k_1^2 + \alpha_2^2 k_2^2)}\xi + \frac{1}{2c^2}\log\frac{s_0^2}{c^2 - s_0^2}$$

由此解得：

$$u(x,y,t) = s(\xi) = c\sqrt{\frac{c_0 e^{-\frac{2(k_1+k_2)c^2}{3(\alpha_1^2 k_1^2 + \alpha_2^2 k_2^2)}\left(k_1 x + k_2 y - \frac{c^2}{3}(k_1+k_2)t\right)}}{1 + c_0 e^{-\frac{2(k_1+k_2)C^2}{3(\alpha_1^2 k_1^2 + \alpha_2^2 k_2^2)}\left(k_1 x + k_2 y - \frac{c^2}{3}(k_1+k_2)t\right)}}}$$

其中 $c_0 = \frac{s_0^2}{c^2 - s_0^2}$ 为常数，显然，$0 < c_0 < \infty$。

特别在一个空间变量的情形，方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

有扭状孤波解：

$$u(x,t)=\pm c\sqrt{\frac{c_0 e^{-\frac{2c^2}{3\alpha^2}\left(x-\frac{C^2}{3}t\right)}}{1+c_0 e^{-\frac{2c^2}{3\alpha^2}\left(x-\frac{c^2}{3}t\right)}}}$$

作者对陈庆益教授审阅此文深表感谢。

## 参　考　文　献

[1] Hopf, The partial differential equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$, *Comm Pure Appl Math*, 3(1950), 201—230.

[2] Cole, J. D., On quasilinear Parabolic equation occurring in aerodynamics. *Q, Appl Math.* 9(1951). 225—236.

[3] Scott, A. C. Chu, F. Y. E. and Mclaughlin. D. W, The soliton: A new concept in applied science, *Proc. IEEE*, 61(1973), pp. 1443—1483.

[4] Whitham, G. B. Linear and nonlinear waves (1973).

[5] 王明亮，一类非线性偏微分方程（组）Cauchy 问题解的唯一性及孤波解，兰州大学学报第 1 期，(1981), 11—19,

# Stability of Solutions of Initial-Value Problem for Burgers' Type Eguation and Solitary Wave Solutions

*By Wang Mingliang*（王明亮）

## Abstract

We have proved the stability of solutions of initial value problem for Burgers' type equation in $L_2$ Sense; have given the conditions of existence of kink solitary wave solutions and a technique of looking for kink solitary wave solutions for Burgers' type equation. And we point out there are no bell solitary wave solutions for Burgers' type equation.