Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

独立与m相依变量组列的弱收敛*

陆传荣

(杭州大学)

本文给出了独立随机变量组列所产生的部分和过程弱收敛于Brown运动过程的充要条件的一个直接证明，并运用这一结果对m相依情形给出了一个充分条件。前者推广了Billingsley[1]及Loève[2]提到的Donsker及Lecam的定理，后者改进了Orey[4]有关m相依情形的结果。

定理 1 设$k_n(t)$为[0,1]上任给的整值右连续增加函数，$k_n(0)=0$，$k_n(1)=k_n$。对于独立随机变量组列$\{\xi_{nk}\}$，有常数列$\{a_{nk}\}$，记

$$X_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}(\xi_{nk}-a_{nk}),$$

那么，为使$X_n\Rightarrow W$且$\{\xi_{nk}\}$为无穷小的充要条件是：

(i) $\sum\limits_{k=1}^{k_n}P\{|\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0$，$\forall\varepsilon>0$，

(ii) 对某一$\tau>0$，每一$t\in[0,1]$，

$$\sum_{k=1}^{k_n(t)}\left(\int\limits_{|x|<\tau}x^2dF_{nk}(x)-\left(\int\limits_{|x|<\tau}xdF_{nk}(x)\right)^2\right)\to t,$$

其中$F_{nk}(x)$是ξ_{nk}的分布函数，$W(t)$是标准Brown运动过程。此时可取

$$a_{nk}=\int\limits_{|x|<\tau}x\cdot dF_{nk}(x).$$

证 条件必要是显然的。现证条件充分。对$\tau>0$，令

$$Y_{nk}=\xi_{nk}I(|\xi_{nk}|<\tau)-E\xi_{nk}I(|\xi_{nk}|<\tau),\quad Y_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}Y_{nk}.$$

当取$a_{nk}=E\xi_{nk}I(|\xi_{nk}|<\tau)$时，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|X_n(t)-Y_n(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}|\xi_{nk}|I(|\xi_{nk}|\geqslant\tau).$$

*1981年1月26日收到.

由(i)可知 $\max_k|\xi_{nk}|\to 0(P)$，所以 $\forall\delta>0$

$$P\Big\{\sum_{k=1}^{k_n}|\xi_{nk}|I(|\xi_{nk}|\geqslant\tau)>\delta\Big\}\leqslant P\{\max_k|\xi_{nk}|\geqslant(\tau\wedge\delta)\}\to 0,$$

由此若能证明 $Y_n\Rightarrow W$，就有 $X_n\Rightarrow W$。

由(i)、(ii)可知 $\{Y_n(t)\}$ 的有限维分布弱收敛于 $W(t)$ 所对应的有限维分布。为证 $\{Y_n(t)\}$是紧的，由[1]定理 15.5 只需证

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\{\sup_{|t-s|\leqslant h}|Y_n(t)-Y_n(s)|>\delta\}=0,\quad\forall\delta>0.$$

我们有：

$$P\Big\{\sup_{|t-s|\leqslant h}|Y_n(t)-Y_n(s)|>\delta\Big\}\leqslant\sum_{lh<1}P\Big\{\sup_{lh<t\leqslant(l+1)h}|Y_n(lh)-Y_n(t)|>\delta/4\Big\}$$

$$\leqslant\sum_{lh<1}P\Big\{\sup_{lh<t\leqslant(l+1)h}\Big|\sum_{j=k_n(lh)}^{k_n(t)}Y_{nj}\Big|>\delta/4\Big\}.$$

由 Чебышев 不等式有

$$P\Big\{\Big|\sum_{k=k_n(lh)}^{k_n((l+1)h)}Y_{nk}\Big|>\delta/8\Big\}\leqslant\frac{64}{\delta^2}\sum_{k=k_n(lh)}^{k_n((l+1)h)}DY_{nk}\to 64h/\delta^2.$$

所以由 Ottaviani 不等式及有限维分布收敛性得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}P\Big\{\sup_{|t-s|\leqslant h}|Y_n(t)-Y_n(s)|>\delta\Big\}\leqslant\sum_{lh<1}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\Big\{\sup_{lh<t\leqslant(l+1)h}\Big|\sum_{k=k_n(lh)}^{k_n((l+1)h)}Y_{nk}\Big|\geqslant\delta/4\Big\}$$

$$\leqslant\sum_{lh<1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\delta^2}{\delta^2-64h}\sup_l P\Big\{\Big|\sum_{k=k_n(lh)}^{k_n((l+1)h)}Y_{nk}\Big|>\delta/8\Big\}$$

$$=\sum_{lh<1}\frac{\delta^2}{\delta^2-64h}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{|u|>\delta/8}e^{-\frac{u^2}{2h}}du$$

$$\leqslant C\int_{|u|>\delta/8\sqrt{h}}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du\to 0,\quad(h\to 0).$$

这就得证紧性。定理 1 证毕。

注　易知此时 $\max_k|a_{nk}|\to 0$。若进一步 $\max_k\Big|\sum_{l=1}^{k}a_{nl}\Big|\to 0$，那么由 $X_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}\xi_{nk}$ 定义的过程有 $X_n\Rightarrow W$。

由定理 1 即可写出[2]中 Lecam 定理的如下变形：

系 1　为对于独立随机变量组列 $\{\xi_{nk}\}$ 有数列 $\{a_{nk}\}$ 及在[0,1]上的整值右连续增加函数列 $\{k_n(t)\}$，$k_n(0)=0$，$k_n(1)=k_n$，对于由(1)定义的 $X_n(t)$，有 $X_n\Rightarrow W$ 且 $\{\xi_{nk}\}$ 无穷小的充要条件是：

(i)
$$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0,\quad\forall\varepsilon>0,$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\int_{|x|<1}x^2dF_{nk}(x)-\big(\int_{|x|<1}xdF_{nk}(x)\big)^2\Big)\to 1.$$

对于序列情形，特别是独立同分布序列有

系 2　设 $\{\xi_n\}$ 是相互独立服从相同分布 $F(x)$ 的随机变量序列，欲有常数 b_n (>0) 及 a_n，使对于

$$X_n(t)=\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{[nt]}(\xi_k-a_n),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

有 $X_n\Rightarrow W$ 成立的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}T^2\int_{|x|>T}dF(x)\Big/\int_{|x|<T}x^2dF(x)=0.$$

定理 2　设 $\{\xi_{nk}\}$ 是 m 相依随机变量组列，若对某 $\tau>0$ 满足条件：

(i)　$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0\quad\forall\varepsilon>0$,

(ii)　$\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{nk}^{\tau}=\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{nk}I(|\xi_{nk}|\leqslant\tau)\to 0$,

(iii)　$E\left\{\sum_{k=1}^{k_n}(\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau})\right\}^2\to 1$,

(iv)　$\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau})^2=O(1)$,

那么对于 $k_n(t)=g(i)m$（其中 $g(i)$在下面给出）记 $W_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}\xi_{nk}$，成立着 $W_n\Rightarrow W$。

证　由[4]的证明可知，不失一般性可设 $m=1$。记

$$\eta_{nk}=\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau},$$
$$\beta_v=E(\eta_{n,v-1}^2+\eta_{nv}^2+\eta_{n,v+1}^2).$$

由[4]的证明知可选 $l=o(n)$，$l\to\infty$ 且

$$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|\xi_{nk}|>\varepsilon/l\}\to 0.$$

令 $K_0=\{0\}$，$g(0)=0$，若 $g(k)$已定义，当 $g(k)+l>k_n$ 时就不再定义 $g(k+1)$；若 $g(k)+l\leqslant k_n$，令

$$K_{k+1}=\{r:\ g(k)+l/2<r\leqslant g(k)+l\},$$
$$g(k+1)=\min\{v:\ \beta_v=\min_{r\in K_{k+1}}\beta_r\}.$$

记 $h-1$ 是所定义 $g(k)$的最大 k 的值，则 $g(h-1)\leqslant k_n$。若 $g(h-1)<k_n$，就令 $g(h)=k_n$，否则 $g(h-1)=g(h)$。以下为简略计，我们省略 n 如简记 ξ_{nk} 为 ξ_k 等。记

$$H_j=\{v:\ g(j-1)<v<g(j)\},\quad j=1,\cdots,h,$$

$$y_j=\sum_{v\in H_j}\xi_v,\quad \tilde{y}_j=\sum_{v\in H_j}\eta_v,\quad j=1,\cdots,h.$$

$$z_j=\xi_{g(j)},\quad j=1,2,\cdots,h-1.$$

$$B_n^2=\sum_{j=1}^{h}E\tilde{y}_j^2,\quad s_i^2=\sum_{j=1}^{i}E\tilde{y}_j^2,\quad i=1,\cdots,h.$$

令 $s_0^2=0$,

$$k_n(t)=g(i),\ \text{若}\ s_i^2/B_n^2\leqslant t<s_{i+1}^2/B_n^2,$$

此时 $k_n(1)=g(h)=k_n$。记

$$W_n'(t)=\sum_{k=1}^{i}y_k,\ W_n''(t)=\sum_{k=1}^{i}z_k\quad \text{当}\ s_i^2/B_n^2\leqslant t<s_{i+1}^2/B_n^2.$$

那么

$$W_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}\xi_{nk}=\sum_{k=1}^{g(i)}\xi_{nk}$$

$$=\sum_{k=1}^{i}y_k+\sum_{k=1}^{i}z_k=W_n'(t)+W_n''(t).$$

由[4]已知$\sum_{i=1}^{k-1}\sigma_{g(i)g(i)}^{\tau}\to 0$,且不妨设$\Sigma|E\xi_{nk}^{\tau}|\to 0$,所以由(i)及Колмогоров不等式,我们有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W''(t)|=\max_{1\leqslant k\leqslant h-1}\left|\sum_{j=1}^{k}z_j\right|=\max_{1\leqslant k\leqslant h-1}\left|\sum_{j=1}^{k}\xi_{g(j)}\right|,$$

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W''(t)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant h-1}\left|\sum_{j=1}^{k}(\xi_{g(j)}^{\tau}-E\xi_{g(j)}^{\tau})\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}+$$

$$+P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant h-1}\left|\sum_{j=1}^{k}E\xi_{g(j)}^{\tau}\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{\bigcup_{k=1}^{h-1}(|\xi_{g(k)}|\geqslant\tau)\right\}$$

$$\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{h-1}\sigma_{g(k)g(k)}^{\tau}+\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{h-1}|E\xi_{g(k)}^{\tau}|+\sum_{k=1}^{h-1}P\{|\xi_{g(k)}|\geqslant\tau\}\to 0.$$

这样,为证 $W_n\Rightarrow W$,只需证明 $W_n'\Rightarrow W$。

对于 $W_n'(t)$,它是由独立随机变量组列 $\{y_{nk},\ k=1,\cdots,h\}$ 所产生的部分和过程,我们来验证它满足定理1的条件。由[4]中(c-2)式可知 $B_n^2\to 1$,所以据[4]的证明就有

$$\sum_{k=1}^{h}P\{|y_k|\geqslant\varepsilon\}\to 0\quad(\forall\varepsilon>0),$$

$$s_i^2=\sum_{k=1}^{i}E\tilde{y}_k^2=\sum_{k=1}^{i}\left\{\int_{|y_k|<\tau}y_k^2dP-\left(\int_{|y_k|<\tau}y_kdP\right)^2\right\}\to t,$$

$$\sum_{k=1}^{h}\int_{|y_k|<\tau}y_kdP\to 0,$$

即定理1的条件均被满足,由定理1的注得证 $W_n'\Rightarrow W$。定理2证毕。

系3 若 $\{\xi_n\}$ 是 m 相依的强平稳随机变量序列,满足条件

(i) $$M^2\int_{|\xi_1|>M}dP\Big/\int_{|\xi_1|<M}\xi_1^2dP\to 0\quad(M\to\infty),$$

(ii) $$\int_{\substack{|\xi_1|<M\\|\xi_i|<M}}\xi_1\xi_idP\Big/\int_{|\xi_1|<M}\xi_1^2dP\to 0\quad(M\to\infty,\ i=2,\cdots,m).$$

对适当选取的常数 $B_n(>0)$，A_n，记

$$W_n(t)=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{[nt]}\xi_k-A_{[nt]},$$

我们有 $W_n\Rightarrow W$。此时可取

$$A_{[nt]}=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{[nt]}E(\xi_k I(|\xi_k|<\tau))\qquad(\tau\text{ 为某正实数}).$$

证　我们来验证定理 2 的条件被满足。由[5]§35 定理 1 已知在(i)成立时有 $C_n\to\infty$ 使

$$n\int_{|\xi_1|>C_n}dP\to 0,\qquad \frac{n}{C_n^2}\left(\int_{|\xi_1|<C_n}\xi_1^2dP-\left(\int_{|\xi_1|<C_n}\xi_1dP\right)^2\right)\to\infty.$$

由[5]§26 定理 4，若记

$$B_n^2=n\left(\int_{|\xi_1|<C_n}\xi_1^2dP-\left(\int_{|\xi_1|<C_n}\xi_1dP\right)^2\right),$$

则 $C_n=o(B_n)$，即 $C_n=\varepsilon_nB_n$，$(\varepsilon_n\to 0)$。记 $\xi_{nk}=\xi_k/B_n$，由 [5] §26定理 4 的证明知对任给 $\tau>0$

$$\sum_{k=1}^{n}E(\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau})^2=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|\xi_k|<\tau B_n}\xi_k^2dP-\left(\int_{|\xi_k|<\tau B_n}\xi_kdP\right)^2\right\}\to 1,$$

即定理 2 的条件(iv)被满足。对于定理 2 的(i)，由于

$$\sum_{k=1}^{n}P\{|\xi_{nk}|>\varepsilon_n\}=n\int_{|\xi_1|>C_n}dP\to 0.$$

对于定理 2 的(iii)，写

$$E\left\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau})\right\}^2=\sum_{k=1}^{n}E(\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau})^2+$$

$$+2\sum_{i=2}^{m}(n-i+1)\frac{1}{B_n^2}\left\{\int_{\substack{|\xi_1|<\tau B_n\\|\xi_i|<\tau B_n}}\xi_1\xi_idP-\int_{|\xi_1|<\tau B_n}\xi_1dP\int_{|\xi_i|<\tau B_n}\xi_idP\right\}$$

$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

由(iv)知 $\mathrm{I}_1\to 1$。对于 I_2 由系 3 的条件及 $\left(\int_{|\xi_1|<\tau B_n}\xi_1dP\right)^2=o\left(\int_{|\xi_1|<\tau B_n}\xi_1^2dP\right)$，所以

$$\mathrm{I}_2=2\sum_{i=2}^{m}\frac{n-i+1}{n}\left(\frac{\int_{\substack{|\xi_1|<\tau B_n\\|\xi_i|<\tau B_n}}\xi_1\xi_idP-\left(\int_{|\xi_1|<\tau B_n}\xi_1dP\right)^2}{\int_{|\xi_1|<\tau B_n}\xi_1^2dP-\left(\int_{|\xi_1|<\tau B_n}\xi_1dP\right)^2}\right)\to 0.$$

由于我们的假设，此时已不需要定理 2 的条件(ii)，这样由定理 2 有 $W_n\Rightarrow W$。又从定理 2 中 $k_n(t)$ 的取法知 $k_n(t)=[nt]$。证毕。

参　考　文　献

[1] Billingsley, P. Convergence of Probability measures. Wiley, New York, 1968.

[2] Loève, M, Probability theory (4th ed.) Vol. 2. Springer-Verlag, New York, 1980.

[3] 林正炎，一类弱相依序列的不变原理，数学年刊，3(1982) 33-44.

[4] Orey, S. A central limit theorem for m-dependent random variables. *Duke Math. J.* Vol. 25, (1958) 543-546.

[5] Колмогоров, А. Н. и Гнеденко, Б. В., Предельные Распределения для сумм независимых случайных величин. Гостехиздат, 1949 (王寿仁译).

Weak Convergence of Array of Independent and m-Dependent Random Variables

By Lu Chuanrong (陆传荣)

Abstract

In this paper, we give a necessary and sufficient condition for partial sum process generated by array of independent random variables converges to Brown motion process weakly: i. e.,

Theorem 1 Let $k_n(t)$ be an integral valued, increasing function on $[0.1]$, right continuous in t, $k_n(0)=0$, $k_n(1)=k_n$ and $\{\xi_{nk}\}$ be an array of independent random variables, $\{a_{nk}\}$ be an array of constants. Put

$$X_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}(\xi_{nk}-a_{nk}).$$

Then in order that $X_n \Rightarrow W$ and the summand ξ_{nk} is infinitesimal if and only if that the following conditions are satisfied:

(i) $$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0 \quad \forall \varepsilon>0,$$

(ii) For some $\tau>0$, every $t\in[0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{k_n(t)}\left\{\int_{|x|<\tau}x^2dF_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\tau}xdF_{nk}(x)\right)^2\right\}\to t,$$

here $F_{nk}(x)$ is the distribution function of ξ_{nk}.

We improve a result of Orey[4] by using theorem 1, and prove the following:

Theorem 2 Let $\{\xi_{nk}\}$ be an array of m-dependent random variables. If for some $\tau>0$, every $\varepsilon>0$, the following conditions are satisfied:

(i) $$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0,$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{nk}^{\tau}=\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{nk}I(|1\xi_{nk}|\leqslant\tau)\to 0,$$

(iii) $$E\left\{\sum_{k=1}^{k_n}(\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau})\right\}^2\to 1,$$

(iv) $$\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{nk}^{\tau}-E\xi_{nk}^{\tau})^2=O(1).$$

then $W_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}\xi_{nk}$ converges to $W(t)$ weakly, for $k_n(t)=g(i)m$, here $g(i)$ is a nonnegative integral valued function.