Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论

JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

具有给定极点的有理函数的逼近与展开(一)*

沈燮昌

(北京大学)

本文着重介绍具有预先给定极点的有理函数的完备性问题、最佳逼近阶的估计、展开问题以及用有理函数展开的部分和进行逼近时的余项估计等问题。对于用自由极点的有理函数来进行逼近时的阶的估计问题，我们曾在1978年11月在成都召开的中国数学会年会上作过综合介绍，这里不准备再进行介绍了。有关文章已在数学进展上发表[36]。

§1 有理函数系的完备性问题

由 Weierstrass 定理知道，三角多项式系 $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ 在空间 $L^p[0, 2\pi]$，$p\geqslant 1$，上是完备的。若令 $z=e^{ix}$，就得到了函数系$\left\{z^n, \dfrac{1}{z^n}\right\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 在空间 $L^p[|z|=1]$ 上是完备的，即对于任意函数 $f(z)\in L^p[|z|=1]$，$p\geqslant 1$，任给 $\varepsilon>0$，存在有理函数

$$R(z)=\sum_{k=-m}^{n} C_k z^k \tag{1.1}$$

使得

$$\|f(z)-R(z)\|_{L^p[|z|=1]}<\varepsilon \tag{1.2}$$

这里由(1.1)的确定的函数$R(z)$是具有极点在 $z=0$ 及 $z=\infty$ 的有理函数。因此，一般地，若给了二个复数序列$\{\alpha_k\}$，$|\alpha_k|<1$，及$\{\beta_k\}$，$|\beta_k|>1$，其中有些α_k及β_k在相应的序列中也可以相等。对于任意的函数$f(z)\in L^p(|z|=1)$，$p\geqslant 1$。我们要问，任给 $\varepsilon>0$，是否存在具有极点在$\{\alpha_k\}$及$\{\beta_k\}$的有理函数$R(z)$，使得(1.2)成立呢？这里，当$\{\alpha_k\}$或$\{\beta_k\}$中的复数有相同时，在$R(z)$中就认为有相应重数的极点，且今后也就永远按此规定来确定实现逼近的有理函数。

*1981年6月18日收到。

本文曾在1980年在厦门召开的全国第二次逼近论会议上宣读过。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

我们还可以将这个问题提得更一般些．设有二组复数列

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \cdots,\ \alpha_{1,k_1}, & \beta_{11},\ \beta_{12},\ \cdots,\ \beta_{1,l_1}\\
\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \cdots,\ \alpha_{2,k_2}, & \beta_{21},\ \beta_{22},\ \cdots,\ \beta_{2,l_2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_{n1},\ \alpha_{n2},\ \cdots,\ \alpha_{n,k_n}, & \beta_{n1},\ \beta_{n2},\ \cdots,\ \beta_{n,l_n}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\tag{1.3}
$$

其中$k_i\leqslant+\infty$，$l_i\leqslant+\infty$，$i=1,\ 2,\ \cdots$，$|\alpha_{ni}|<1$，$|\beta_{nj}|>1$．设$R_n(z)$是至多以$\alpha_{ni}(i=1,2,\cdots,k_n)$及$\beta_{nj}(j=1,2,\cdots,l_n)$为极点的有理函数．对于任意的函数$f(z)\in L^p(|z|=1)$，$p\geqslant1$，我们要问，任给$\varepsilon>0$，是否存在有理函数$R_n(z)$，使得

$$\|f(z)-R_n(z)\|_{L^p(|z|=1)}<\varepsilon \tag{1.4}$$

显然，当$\alpha_{ni}=\alpha_{mi}$，$k_i-k_{i-1}=1$，$l_j-l_{j-1}=1$时，就是上面的问题．

已知[1]，要使具有极点在$\{\alpha_k\}$，$|\alpha_k|<1$，$\{\beta_k\}$，$|\beta_k|>1$的有理函数在$L^p[|z|=1]$上是完备的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty \tag{1.5}$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{|\beta_k|}\right)=+\infty. \tag{1.6}$$

若$f(z)\in H_p$，$p\geqslant1$[2]，则具有极点在$\{\beta_k\}$，$|\beta_k|>1$，上的有理函数在$L^p[|z|=1]$上是完备的充要条件是成立(1.6)；若$f(z)\in H'_p$，(即$f\left(\frac{1}{z}\right)\in H_p$)，则具有极点在$\{\alpha_k\}$，$|\alpha_k|<1$，上的有理函数在$L^p(|z|=1)$上是完备的充要条件是成立(1.5)[3]．

自然地会问，这些结果能否推广到一般的区域上？

1970年，G.Fichera的结果如下[4-6]：设K是有界闭集，其余集CK是由一个区域组成，函数$f(z)$在K的内点解析，K上连续．设$\{b_k\}$是位于CK中的点列，若b_k到K的距离$d(b_k)\geqslant\delta>0$，$k=1,\ 2,\ \cdots$，则任给$\varepsilon>0$，存在具有极点在$\{b_k\}$的有理函数$R(z)$，使得

$$\|f(z)-R(z)\|_{C(K)}<\varepsilon \tag{1.7}$$

若不假设$d(b_k)\geqslant\delta>0$，则设K是闭区域，其边界$\Gamma\in C^{1,\lambda}$，即Γ切线与正实轴的夹角满足α级Lipschtz条件，$\alpha>0$，则(1.7)成立．

G.Fichera还对$K=[-1,1]$的情况作了研究．

作者在1978年曾经得到了较为一般的结果[7,8]．设区域G的边界是由闭可求长Jordan曲线Γ所构成．我们说区域$G\in K_q$，$q>1$，如果对任意Cauchy型积分所确定的函数

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,\quad z\in G_\infty.$$
$$f(\xi)\in L^q(\Gamma) \tag{1.8}$$

满足$F(z)\in E_q(G)$．已知[8]，若Γ的切线与正实轴夹角$\theta(s)$的连续模$j(h)$满足条件：

$$\int_0\frac{j(h)}{h}dh<+\infty \tag{1.9}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

时，$G\in K_q$，q 是大于 1 的任何数．显然，对于 Fichera 所考虑的区域必满足条件(1.9)，因此K_q类区域是比较一般的区域．

今后设$w=\chi(z)$将G双方单值保角映射到 $|w|<1$ 的函数，$z=g(w)$ 是其反函数；$w=\varphi(z)$是将$C\overline{G}=G_\infty$双方单值保角映射到 $|w|>1$的函数，$z=\psi(w)$是其反函数．

作者的结果如下[7,8]：

1° 设$G\in K_q$，$q>1$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$，$\{b_k\}$是 G_∞ 中点列，要使具有极点在 $\{b_k\}$ 的有理函数系在空间$E_p(G)$中是完备的充要条件是成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{|\beta_k|}\right)=+\infty,\qquad \beta_k=\varphi(b_k).$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots \tag{1.10}$$

这里完备性也是在(1.2)的意义下来理解的．只是代替$L^p(|z|=1)$，考虑$L^p(\Gamma)$．

2° 设 $G\in K_q$，$q>1$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$，$\{a_k\}$是 G 内点列，$\{b_k\}$ 是 G_∞ 中点列，则要使得具有极点在$\{a_k\}$及$\{b_k\}$的有理函数系在空间$L^p(\Gamma)$上是完备的充要条件是同时成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty,\qquad \alpha_k=\chi(a_k)$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots, \tag{1.11}$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{|\beta_k|}\right)=+\infty,\qquad \beta_k=\varphi(b_k)$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots, \tag{1.10}$$

这些结果都容易推广到极点序列具有形式(1.3)的情况．

当条件(1.10)或(1.11)不满足时，由于上述完备性定理，那些仍能被具有极点在$\{a_k\}$及$\{b_k\}$的有理函数所逼近的函数$f(z)$应该具有一些特殊的性质．

考虑极点具有形式(1.3)的情况．令：

$$S_n^+=\sum_{i=1}^{k_n}(1-|\alpha_{n,i}|),$$
$$S_n^-=\sum_{j=1}^{l_n}\left(1-\frac{1}{|\beta_{n,j}|}\right). \tag{1.12}$$

Г. Ц. Тумаркин 在1954年得到下列结果[9,10]：

设

$$\underline{\lim}S_n^+<+\infty,\ \lim S_n^-=+\infty, \tag{1.13}$$

则要使具有极点在(1.3)的有理函数在$C(|z|=1)$ 上能逼近连续函数 $f(z)$ 的充要条件是：$f(z)$ 是 $|z|<1$ 内有界型亚纯函数 $F(z)$ 的角度边界值．**Г. Ц. Тумаркин** 在 1966 年还对 $L^p(|z|=1)$，$p>1$，的情况进行了研究[11]：

设

$$\underline{\lim}S_n^+<+\infty,\ \underline{\lim}S_n^-<+\infty \tag{1.14}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

则要使具有极点在(1.3)的有理函数能在空间 $L^p(|z|=1)$，$p>1$，上逼近函数 $f(z)$ 的充要条件是：$f(z)$ 分别是圆 $|z|<1$内及圆 $|z|>1$外有界型亚纯函数 $F^+(z)$ 及 $F^-(z)$ 的角度边界值，且

$$F^+(z)B^+(z)\in H_p,$$
$$F^-(z)B^-(z)\in H_p'.$$

这里$B^+(z)$及 $B^-(z)$ 是由下列方法所确定的函数：考虑(1.3)中以$\alpha_{n,i}$为零点的Blaschke 乘积$B_n^+(z)$及以$\beta_{n,i}$为零点的 Blaschke 乘积$B_n^-(z)$，$n=1, 2,\cdots$，考虑$\{B_n^+(z)\}$中 $|z|<1$内闭一致收敛的子序列的极限函数集合，其强函数记作$B^+(z)$；类似地可以定义$B^-(z)$[10].

§2 有理函数系在加权逼近意义下的完备性问题

这里介绍有理函数系在加权逼近意义下的完备性方面的几个结果. 设 $\sigma(\theta)\uparrow$，$\sigma(\theta)=\sigma(\theta-0)$以$2\pi$为周期，对任意$f(z)\in L^p(|z|=1, d\sigma(\theta))$，即

$$\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^p d\sigma(\theta)\text{存在}, \ p>0. \tag{2.1}$$

考虑量

$$\inf_{\{R_n\}}\left[\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})-R_n(e^{i\theta})|^p d\sigma(\theta)\right]^{\frac{1}{p}}=$$
$$=\rho_n^{(p)}(f,d\sigma(\theta)). \tag{2.2}$$

其中$R_n(z)$为具有极点在(1.3)的n行上点列中的有理函数. 如果任给 $\varepsilon>0$，存在数 n，使得

$$\rho_n^{(p)}(f,d\sigma(\theta))<\varepsilon,$$

则称具有极点在 (1.3) 上的有理函数系在空间 $L^p(|z|=1, d\sigma(\theta))$ 上是完备的，即在加权逼近意义下是完备的.

这里所牵涉到的问题，除了由 (1.12) 所确定的量 S_n^+，S_n^-，是否趋向于无穷之外，还与

$$\int_0 \ln\sigma'(\theta)d\theta=-\infty \tag{2.3}$$

还是

$$\int_0 \ln\sigma'(\theta)d\theta>-\infty \tag{2.4}$$

密切相关.

Г. Ц. Тумаркин 得到下列结果[9, 10]:

在条件(2.3)下，具有极点在(1.3)的有理函数系在加权逼近意义下，在空间 $L^p(|z|=1,d\sigma(\theta))$，$p>0$，中是完备的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}(S_n^+ + S_n^-)=+\infty \tag{2.5}$$

在条件(2.4)下，具有极点在(1.3)的有理函数系在加权逼近意义下，在空间$L^p(|z|=1, d\sigma(\theta))$，$p>0$，中是完备的充要条件是

$$\lim S_n^+=+\infty, \ \lim S_n^-=+\infty \tag{2.6}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

若(2.6)中有一个条件不满足，例如：

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n^+ < +\infty,\quad \lim_{n\to\infty} S_n^- = +\infty. \tag{2.7}$$

则在条件(2.4)下，要使 $f(z)\in L^p(|z|=1,\ d\sigma(\theta))$，$p>0$，能被具有极点在(1.3)的有理函数逼近的充要条件是$f(z)$是 $|z|<1$内有界型亚纯函数的角度边界值，即$F(z)B(z)\in D^{[10]}$，其中 $B(z)$是具有零点在α_{ni}的 Blaschke 乘积序列 $\{B_n(z)\}$ 中任意的在 $|z|<1$中内闭一致收敛的子序列的极限函数，$B(z)\not\equiv 0$. 这个结果对$p=+\infty$时，即连续函数的加权逼近情况下也成立。

若(2.7)成立，但在条件(2.5)下，则对于任意一个函数$f(z)\in L^p(|z|=1, d\sigma(\theta))$，及圆 $|z|<1$ 内任意解析函数 $F(z)$，必存在具有极点在 (1.3) 的有理函数序列 $R_n(z)$，它在 $L^p(|z|=1,\ d\sigma(\theta))$意义下收敛到$f(z)$，且在 $|z|<1$内闭一致收敛到 $F(z)$。

若

$$\underline{\lim} S_n^+ < +\infty,\quad \underline{\lim} S_n^- < +\infty \tag{2.8}$$

且满足条件(2.4)，且 $f(z)\in L^p(|z|=1,\ d\sigma(\theta))$，$p\geqslant 1$，能被具有极点在(1.3)的有理函数逼近，则 $f(z)$ 分别是圆 $|z|<1$ 内及圆 $|z|>1$ 外有界型亚纯函数 $F^+(z)$ 及 $F^-(z)$ 的角度边界值，且

$$F^+(z)B^+(z)\Omega^+(z)\in H_p$$

其中$B^+(z)$同上面一样定义

$$\Omega^+(z)=\exp\left(\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln\sigma'(\theta)d\theta\right), \tag{2.9}$$

及

$$F^-(z)B^-(z)\Omega^-(z)\in H_p',$$

其中 $B^-(z)$ 与 $B^+(z)$ 定义是类似的，$\Omega^-(z)$ 定义与$\Omega^+(z)$也是类似的. 当 $p>1$时，反过来也对。

用保角变换方法，可以将上述结果推广到闭可求长的 Jordan 曲线上或实轴上. 例如，在实轴上，代替S_n^+及S_n^-为：

$$\sum\frac{\operatorname{Im}\alpha_n^j}{1+|\alpha_n^j|^2} \tag{2.10}$$

其中$j=1$表示在上半平面的极点，$j=2$表示在下半平面的极点；而代替$\int_0 \ln\sigma'(\theta)d\theta$，用

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\sigma'(x)}{1+x^2}dx,$$

这里在实轴上权函数为 $d\sigma(x)$。

§3　有理函数的最佳逼近问题

大家知道，在实轴上用三角多项式逼近周期为2π的连续函数的Jackson 定理[1]的复数形式为：设 $f(z)$ 在 $|z|=1$上连续且具有直到 k 级连续微商，则对任何自然数 n，存在 z 与 $\frac{1}{z}$的多项式$P_n(z)=\sum_{i=-n}^{n} d_i z^i$，使得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$$\|f(z)-P_n(z)\|_{C(|z|=1)}<$$
$$<\frac{C_1}{n^k}\omega\left(f^{(k)},\frac{1}{n}\right), \tag{3.1}$$

其中C_1为绝对常数（以后绝对常数都用C_1来表示），$\omega(f^{(k)},\delta)$为$f^{(k)}(z)$在$|z|=1$上的连续模.此外还有逆定理.象在§1中一样，我们可以考虑具有极点在$\{\alpha_i\}$, $|\alpha_i|<1$, $\{\beta_i\}$, $|\beta_i|>1$, $i=1, 2, \cdots, n$. 或$\{\alpha_{n_i}\}$, $|\alpha_i|<1$, $\{\beta_{n_i}\}$, $|\beta_{n_i}|>1$, $i=1, 2, \cdots, n$, 的有理函数$R_n(z)$的最佳逼近问题，即考虑

$$\rho_n(f, |z|=1)=\inf_{\{R_n\}}\|f(z)-R_n(z)\|_{C(|z|=1)} \tag{3.2}$$

趋向于零的速度以及从趋于零的速度来导出被逼近函数$f(z)$的结构性质.

现在叙述 С. Н. Мергелян 及 М. М. Джрбашян 的工作[12].

正定理．设函数$f(z)$在$|z|=1$上连续且具有直到k级微商，$f^{(k)}(z)\in Lip\alpha$, $\alpha>0$，则对任意n，有

$$\rho_n(f, |z|=1)\leqslant C_1(\varepsilon_n|\ln\varepsilon_n|)^{k+\alpha}. \tag{3.3}$$

其中

$$\varepsilon_n=\left[1+\sum_{i=1}^{n}(1-|\alpha_i|)\right]^{-1}+$$
$$+\left[1+\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\beta_i|}\right)\right]^{-1}. \tag{3.4}$$

逆定理．若

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-|\alpha_i|)\ \text{及}\ \sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{|\beta_i|}\right)$$

中至少有一个发散，且$|z|=1$上有一段弧l不包有$\{\alpha_i\}$及$\{\beta_i\}$的极限点，且对任意n，有

$$\rho_n(f, |z|=1)\leqslant C_1\varepsilon_n^{k+\alpha},$$
$$0<\alpha<1 \tag{3.5}$$

K为非负整数．那么则在l上$f(z)$有k级微商，且$f^{(k)}(z)\in \mathrm{Lip}\alpha$.

比较正定理与逆定理的(3.3)与(3.5)，可以看出，右边相差一个因子$|\ln\varepsilon_n|^{k+\alpha}$，因此正定理是不精确的．此外，在逆定理中，要求$\{\alpha_i\}$及$\{\beta_i\}$在$|z|=1$上没有极限点的条件也是比较苛刻的.

1964年作者与娄元仁在第二次全国函数论会议上曾报告了下列结果[13]：

正定理．设函数$f(z)$在$|z|=1$上连续，且具有直到k级连续微商，则对任意自然数n与m，存在有理函数

$$R_{n+m}(z)=\sum_{i=0}^{n+m}d_iz^i\Big/\prod_{i=1}^{n}\left(z-\alpha_i\right)\prod_{j=1}^{m}\left(z-\beta_j\right) \tag{3.6}$$

使得在$|z|=1$上有：

$$|f(z)-R_{n+m}(z)|\leqslant C_1\{\varepsilon_n(\alpha)^k\omega(f^{(k)},\varepsilon_n(\alpha))+$$
$$+\varepsilon_m(\beta)^k\omega(f^{(k)},\varepsilon_n(\beta))+q^{1/\varepsilon n(\alpha)}+q^{1/\varepsilon m(\beta)}\} \tag{3.7}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 q 是绝对常数，$0<q<1$。

$$\varepsilon_n(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(1-|\alpha_i|),$$

$$\varepsilon_m(\beta)=\sum_{j=1}^{m}\left(1-\frac{1}{|\beta_j|}\right) \tag{3.8}$$

A. A. Пекарский[38]、Andersson 与 Ganelius 在1977年也得到类似结果[14]。

对于逆定理，我们设 $\{\alpha_i\}\in w[\mu、\nu]$，即

$$\overline{\lim}\frac{\ln 1/\Delta_n}{\ln\varepsilon_n(\alpha)}=\mu,\qquad \Delta_n=\min_{1\leqslant i\leqslant n}(1-|\alpha_i|) \tag{3.9}$$

且当 $\mu\neq\infty$ 时，

$$\overline{\lim}1/\Delta_n[\varepsilon_n(\alpha)]^{\mu}=\nu \tag{3.10}$$

且$\left\{\frac{1}{\beta_i}\right\}\in\omega[\mu',\nu']$，$\mu<+\infty$，$\nu<+\infty$，$\varepsilon_n(\alpha)\to 0$，$\varepsilon_n(\beta)\to 0$。设对任意 n 及 m 成立

$$\begin{aligned}&\inf_{\{R_{n+m}\}}\|f-R_{n+m}\|_{C(|z|=1)}\leqslant\\&\leqslant C[\varepsilon_n(\alpha)^{(2\mu+1)(k+\alpha)}+\varepsilon_m(\beta)^{(2\mu'+1)(k+\alpha)}]\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $k\geqslant 0$ 整数，$0<\alpha\leqslant 1$，则

1° 当 $\nu<+\infty,\nu'<+\infty$ 时，$f^{(k)}(z)$ 在 $|z|=1$ 上连续，且当 $0<\alpha<1$ 时，$f^{(k)}(z)\in \mathrm{Lip}\alpha$，而当 $\alpha=1$ 时，$\omega(f^{(k)},\delta)=O(\delta|\ln\delta|)$。

2° 当 ν 与 ν' 中至少有一个为 $+\infty$ 时，则 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上连续，且有直到 k 级微商，$\omega(f^{(k)},\delta)\in \mathrm{Lip}(\alpha-\varepsilon)$，$\varepsilon>0$ 是任意数。

对于圆 $|z|<1$ 内解析、$|z|\leqslant 1$ 上连续的函数，也有类似结果，只是在(3.7)及(3.11)中不出现 $\varepsilon_n(\alpha)$ 而已。

以后，我们又在文章[15]中，将这些结果推广到 $H_p(p\geqslant 1)$ 空间中及 $L_p(|z|=1)$ 空间中。

至于在一般的以光滑曲线为边界的区域 G 上用具有极点在 $\{b_k\}\subset C\overline{G}=G_\infty$ 的有理函数的最佳逼近问题，目前也有一些工作。H. M. Elliotl 与 J. L. Walsh 只是在具有解析曲线为边界的区域上进行研究[16, 17]，且实现逼近的有理函数的极点在区域的边界上没有极限点，这些条件显然是太强了。此外 Г. С. Кочарян 对于 С. Я. Альпер 区域[18]也考虑这一类问题[19]，但是正如我们在前面已经指出的那样，由于 С. Н. Мергелян 及 М. М. Джрбашян 在单位圆上的结果[12]是不精确的，而 Г. С. Кочарян 正是引用了他们两人的结果才得到一些估计式，因此他的估计式也是不精确的。

我们在文章[20]中考虑了比 С. Я. Альпер 区域[18]更广的一类区域，称为 j_λ 区域：设区域 G 的边界 Γ 是闭光滑曲线，Γ 的切线与正实轴夹角 $\theta(s)$ 的连续模 $j(h)$ 满足条件：

$$\int_0\frac{j(h)}{h}|\ln h|^{\lambda}dh<+\infty,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1, \tag{3.12}$$

当 $\lambda=0$ 时，就认为满足条件

$$\int_0\frac{j(h)}{h}|\ln|\ln h||dh<+\infty \tag{3.13}$$

С. Я. Альпер 区域就是 j_1 类区域。我们在 1964 年第二次全国函数论会议上介绍了下列定理：

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

设区域G是j_λ类区域，函数$f(z)$在G内解析、$\bar{G}$上连续且有直到k级连续微商．设$\omega(f^{(k)},\delta)\leqslant\omega_0(\delta)$，其中$\omega_0(\delta)$是某个函数的连续模，且当$t\to0$时，$\omega_0(t)|\ln t|^{1-\lambda}\downarrow 0$．设$\{b_k\}$是$G_\infty=C\bar{G}$上的任意复数列，且满足条件：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-1/_{|\beta_k|})}<\frac{1}{2},\quad \beta_k=\varphi(b_k) \tag{3.14}$$

则对任何自然数n，存在形如

$$Q_n(z)=\sum_{i=0}^{n}c_iz^i\Big/\prod_{i=1}^{n}(z-b_i) \tag{3.15}$$

的有理函数，使得在$\bar{G}$上成立

$$\begin{aligned}&|f(z)-Q_n(z)|\leqslant\\&\leqslant C_1[\varepsilon_n(\beta)^k\omega(f^{(k)},\ \varepsilon_n(\beta))\,|\ln\varepsilon_n(\beta)|^{(k+1)(1-\lambda)}+\\&+r^{1/\varepsilon_n(\beta)}],\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中r是绝对常数，$0<r<1$，

$$\varepsilon_n(\beta)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\beta_i|}\right)\right]^{-1}.$$

在那篇文章中，我们还得到了逆定理．

1979年，作者与娄元仁[21]将这些结果推广到$E_p(p>1)$类函数中．设区域G的边界Γ满足条件：

$$\int_0\frac{j(h)}{h}dh<+\infty^{[22]} \tag{3.17}$$

若$f(z)\in E_p(p>1)$，则对任意自然数n，存在形如(3.15)的有理函数$Q_n(z)$，使得

$$\begin{aligned}&\|f(z)-Q_n(z)\|_{L_p(\Gamma)}\leqslant\\&\leqslant c_1(\omega_p(f,\varepsilon_n(\beta))+r^{1/\varepsilon_n(\beta)}),\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中$\omega_p(f,\delta)$为函数$f(z)$在Γ上$L_p(\Gamma)$意义下的连续模，r为绝对常数，$0<r<1$．

当$f(z)$在G内解析，$f^{(k)}(z)\in E_p(p>1)$，为了要得到更高的逼近阶，即

$$\begin{aligned}&\|f(z)-Q_n(z)\|_{L_p(\Gamma)}\leqslant\\&\leqslant C_1[\varepsilon_n(\beta)^k\omega_p(f^{(k)},\varepsilon_n(\beta))+r^{1/\varepsilon_n(\beta)}]\end{aligned} \tag{3.19}$$

就需要对极点的分布加上条件(3.14)．

在这篇文章中也得到了逆定理．

在作者的文章[23]中，对于j_λ区域，对于极点的分布，作了更弱的假设

$$(1-\lambda)\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\ln n}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-1/_{|\beta_i|})}<1,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant1 \tag{3.20}$$

对具有高级微商的连续函数，得到了形为(3.16)的估计式．显然，当$\lambda=1$时，对极点分布就没有加任何条件了．

顺便指出，在J. L. Walsh书的俄译本[24]上有一个附录，这是由C. H. Мергелян所写的，那里对有理函数的极点分布也加上一些条件，这些条件在本质上就是我们的条件(3.20)，但条件(3.20)比C. H. Мергелян的条件要弱一些，且他没有考虑用有理函数进行逼近时最佳逼近的阶的估计问题．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

1980年，我们对于满足条件(3.17)的区域，当考虑在$E_p(1<p<+\infty)$上有理函数进行具有高阶微商的函数时，完全取消了加在实现逼近的有理函数的极点上的条件(3.14)，仍然得到了估计式(3.19)[25]。

后来，作者又将这些结果推广到更为一般的区域上，即k_q类区域上。这些结果曾在1978年中国数学会年会上作了介绍[7,8]。

Pycak, B. H. 在 1979 年曾在实轴上研究有理函数的 Féjer 核、Vallee-Poussin 核、Jackson核的最佳逼近问题，得到了逼近的阶的估计式[38]。

参考文献*

[1] Ахиезер. Н. И., Лекции по теории аппроксимации, "*Наука*", М. 1965.

[2] Привалов. И. И., Граничные своиства аналитических функций, ГИТЛ, 1950.

[3] Walsh. J. L., Interpolation and approximation by rational functions in the complex plane. *A. M. S. Colloquinm publication*. vol. xx, 1956.

[4] Fichera. G., Approximation of analytic functions by rational functions with prescribed poles, *Comm. Pure Appl. Math.* 23(1970), 359-370.

[5] Fichera G., On the approximation of analytic functions by rational functions. "Topic in analysis", *Lec. Notes in Math.* 419, 1970, 79-108.

[6] Fichera G., Uniform approximation of continuous functions by rational functions, *Ann. Math. Pura Appl.* (4) 84(1970), 375-386.

[7] 沈燮昌，科学通报，25:3(1980)，97-101.

[8] 沈燮昌，论一类区域上有理函数的逼近，中国科学，1980，第11期，961-971.

[9] Тумаркин Г. Ц. Приближение функций рациональными дробями с заданмыми полюсами, ДАН. СССР. 98:6(1954), 909-912.

[10] Тумаркин Г. Ц., Приближение в резличных метриках функций, заданных на окружности последовательностями рациональных дробей с фиксированными полюсами, *Изв, АН СССР* с. м. 30:4(1966), 721-766.

[11] Тумаркин Г. Ц., Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными, полюсами, *Изв. АН Арм. ССР. Матем.* 1:2 (1966), 89-105.

[12] Мергелян С. Н., Джрбащян М. М. О наилучших приближениях рациональными функциями, *ДАН. СССР*. 99:5 (1954), 673-675.

[13] 沈燮昌、娄元仁，关于单位圆上有理函数的最佳逼近，数学学报，20:3(1977)，232-235.

[14] Andersson Jan-Erik and Ganelius T., The degree of approximation by rational functions with fixed poles, *Math. Zeitschrift.* 153 (1977), 161-166.

[15] 沈燮昌、娄元仁，$H_p(p\geqslant1)$ 空间中有理函数的最佳逼近，北京大学学报，自然科学版，22:1 (1979)，58-72.

[16] Elliotl H. M., On approximation to analytic functions by rational functions, *Pro. Amer. Math. Soc.*, 4:1 (1953), 161-167.

* 本文全文分（一）、（二）两半发表，文献均附在（一）之后。——编辑部注

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[17] Walsh J. L., Note on degree of approximation to analytic functions by rational functions with preassigned poles, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 42:12 (1956), 927-930.

[18] Альпер. С. Я., О равномерных приближениях функций комплексной переменной в замкнутой области, *Изв. АН СССР* с. м. 19(1955), 423-444.

[19] Кочарян Г. С., О приближении рациональными функцями в комплексной области, *Изб. АН Арм. ССР* м.-ф. 11:4 (1958), 53-77.

[20] 沈燮昌、娄元仁，复平面区域上有理函数的最佳逼近，数学学报，20:4(1977)，301-303.

[21] 沈燮昌、娄元仁，关于函数空间$E_p(p>1)$中有理函数的最佳逼近，北京大学学报，自然科学版，2 (1979)，1-18.

[22] Альпер С. Я., О приближении в среднем аналитических функций класса Ep, “Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного”, *ГИФМЛ. М.*, 1960, 273-286.

[23] 沈燮昌，关于具有预先给定极点的有理函数的最佳逼近问题，数学学报，21:1(1978),86-90.

[24] Уолш дж. Л. (Walsh. J. L.), Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, *Изв, Инос, лит. М.*, 1961.

[25] 沈燮昌,$E_p(1<p\leqslant+\infty)$中具有给定极点的有理函数最佳逼近问题,数学年刊,1:1 (1980),51-62.

[26] М. М. Джрбашян, Разлотения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, *ДАН СССР* 143:1 (1962), 17-20.

[27] Джрбашян М. М., К теории рядов Фуръе по рациональным функциям, *Изв. АН Арм. ССР с. м.-ср.* 9:7 (1956), 3-28.

[28] Китбалян А. А., Разложения по обобщённым тригонометрическим системам, *Изв. АН Арм. ССР*, с. ф.-м. 16:6 (1963), 3-24.

[29] Лукацкий А. М., Разложения в ряды по системе рациональных функций, *Матем. СБ.*, 90(132):4 (1973), 544-557.

[30] Джрбашян М. М., Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, *Изв. АН Арм. ССР* с. м. 2:1 (1967), 3-51.

[31] Джрбашян М. М., О разложении аналитических функций в ряд по рациональными функциями с заданным множеством полюсов, *Изв. АН Арм. ССР*, с. ф.-м., 10:1 (1957), 21-29.

[32] Лукацкий А. М., О системе рациональных функций М. М. Джрбашяна для произвольного континуума, *Сибирекий Матем. ж.* 15:1 (1974), 205-211.

[33] Тумаркин Г. Ц., Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, *Изв. АН Арм. ССР*, с.ф.-м., 14:1(1961), 9-31.

[34] 沈燮昌 $E_p(1<p\leqslant+\infty)$中有理函数展开的余项估计，数学年刊，1981，№3.

[35] 沈燮昌 论一类区域上的有理函数展开，中国科学，1981，第3期，257-264.

[36] 沈燮昌 任意极点的有理函数最佳逼近，数学进展，10:1(1981).

[37] Пекарский А. А., О скорости рациональной аппроксимации с фиксированными полюсами, *ДАН БССР* 21:4 (1977), 302-304.

[38] Русак В. Н., Рациональные функции как аппарат приближения, *Минск. ИзД-во БГЎ* 1979.

[39] 苏兆龙 E' 类中多项式和有理函数的最佳逼近,数学研究与评论,第二卷(1982)第三期(总第六期)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.