1982年 第2卷 第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

n-予加法范畴中的弱上积与极限*

于永溪

(大连工学院)

在Abel范畴的同调代数中，双积和环模的正向系统的正向极限都是重要的基本概念．在那里，由于Abel范畴具有零对象这些概念的讨论就比较简单．本文给出这些概念在n-予加法范畴中的一种推广，我们的困难在于n-予加法范畴只具有终对象．本文的结果表明在n-予加法范畴中这些概念的讨论可以不使用零对象，另一方面也给出在Abel范畴场合中讨论极限时使用零对象的实质的一个解剖．

文中符号沿用[1]的，但与对象A，B对应的态集记为[A,B]，范畴$\mathbb{C}$的对象族记为$ob\mathbb{C}$.

1. 引　理

引理1.1　在n-予加法范畴中，若δ：A⟶B为拟零态，则$(\underbrace{\delta,\cdots,\delta}_{n-1})$为$(n-1)$-价单位元．

事实上，设$\delta=ha$，其中a：A⟶F，h：F⟶B，F为终对象，则由[1]引理3.5知$\bar{\delta}=\overline{ha}=h\bar{a}=ha=\delta$．再由[2]定理1.4(7)得本引理．

本引理在下文讨论中起着基本的作用．当$n=2$时，对予加法范畴引理1.1中的δ事实上是0元素．

应注意：若[A,B]中的任$(n-1)$个拟零态皆组成$(n-1)$-价单位元，则[A,B]中只有一个拟零态．

事实上，设$a_1,a_2\in[A,B]$为拟零态，则$\overbrace{\underbrace{a_1+\cdots+a_1}_{n-1}}^{n-1}+a_2=a_2=a_1$.

若对任何对象A，B皆有上述事实，则所论范畴本质上具零对象．

引理1.2　在n-予加法范畴中当终对象F为拟零终对象时，对任何对象B，$a\in[F,B]$蕴涵$a=\bar{a}$.

* 1981年8月22日收到.

证明　取对象A，设h：A$\longrightarrow$F，有$\bar{a}h=\overline{ah}=a\bar{h}$([1]引理3.5)．但$a\bar{h}=ah$，故$\bar{a}h=ah$．再由$h$的满性知$\bar{a}=a$．

2. n-予加法范畴中的双积与弱上积

本节所论范畴皆为带终对象(F)的n-予加法范畴，恒设$\forall B\ [F,B]\neq\varnothing$．

定义2.1　对象A称为满足条件(o)，若$\widetilde{[F,A]}=\{h|h\in[F,A],\ h=\bar{h}\}$为独点集．

注意　即使每个对象皆满足条件(o)，F也未必是零对象．但，当F拟零时所论范畴在其每个对象皆满足条件(o)的情况下本质上是具零对象的．

事实上，设a：A$\longrightarrow$F，h：F$\longrightarrow$B，$h=\bar{h}$；g：B$\longrightarrow$F，r：F$\longrightarrow$C，但$r\neq\bar{r}$，则复合$(rg)(ha)=r(gh)a=ra$．由条件(o)所带来的$[A,B]$的特定态为ha，其中$h=\bar{h}$．但，ra不为[A,C]的特定态．参看[3]第一章12知所论范畴未必具零对象．

定义2.2　设A；$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$为对象，s为非负整数，a_j：$A_j\longrightarrow F$，若存在h_k：$F\longrightarrow A_k$，使$\bar{h}_k=h_k$且图

$$A_j\underset{p_j}{\overset{i_j}{\rightleftarrows}}A \qquad (*)$$

中$p_ji_j=1_{A_j}$，$p_ki_j=h_ka_j(k\neq j)$，$\sum\limits_{j=1}^{s(n-1)+1}i_jp_j=1_A$，则说$(A,(i_j,p_j)_{j=1,\cdots,s(n-1)+1})$为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的弱双积且称$h_ka_j$属于弱双积$(A,\ (i_j,p_j))$．此时称图(*)为弱双积图．又若$A$满足条件(o)，则弱双积$(A,\ (i_j,p_j))$称为双积．注意，本文的弱与[4] p.231的不同．

容易验证，当A与B同构，τ：A$\longrightarrow$B为同构态，而$(A,\ (i_j,p_j))$为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的(弱)双积时，$(B,\ (\tau i_j,p_j\tau^{-1})_{j=1,\cdots,s(n-1)+1})$亦为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的(弱)双积．

当$n=2$时，弱双积与双积为予加法范畴情况的双积([4]p.190)．

定义2.3　$(B,\ (f_k:\ A_k\longrightarrow B)_{k\in T})$称为满足条件(o)，若存在$b_0\in[F,B]$使

$\forall k\in T\quad \forall a_k\in\widetilde{[F,A_k]}$　像$f_k(a_k)=b_0$．

其中T为任意的族，像的定义本文采用[3]p.12的．

显然，$(F,\ (f_k:\ A_k\longrightarrow F))$是满足条件(o)的．

定义2.4　图

$$A_k\xrightarrow{i_k}A \qquad (k\in T)$$

称为$(A_k)_{k\in T}$的弱上积，若对每个满足条件(o)的$(B,\ (f_k:\ A_k\longrightarrow B)_{k\in T})$皆存在唯一的$t$：A$\longrightarrow$B使

$$\forall k\in T\qquad ti_k=f_k.$$

容易验证，当A与B同构，τ：A$\longrightarrow$B为同构态，图$A_k\xrightarrow{i_k}A\ (k\in T)$为弱上积时，图$A_k\xrightarrow{\tau i_k}B$亦为弱上积图．

当$n=2$时，弱上积为予加法范畴中的上积．

命题2.5　若$(A,\ (i_j,p_j)_{j=1,\cdots,s(n-1)+1})$与$(A,\ (i_j,p'_j))$为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的弱双积，则$p'_j=p_j$。

证明　已知$\sum\limits_{k=1}^{s(n-1)+1} i_k p'_k=1_A$，故$p_j=p_j(\sum i_k p'_k)=p'_j+\sum\limits_{k(\neq j)} p_j i_k p'_k$。今$p_j i_k=h_j a_k$，故$p_j i_k p'_k=h_j a_k p'_k$。而$a_k p'_k=a$：$\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{F}$，故$p_j i_k p'_k=h_j a$：$\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{A}_j$为拟零态。由引理1.1，$(p_j i_k p'_k)_{k(\neq j)}$为$(n-1)$-价单位元，从而$p_j=p'_j$。

定理2.6　若$\mathrm{A}_k\underset{i_k}{\overset{p_k}{\rightleftarrows}}\mathrm{A}$为弱双积图，则$\mathrm{A}_k\xleftarrow{p_k}\mathrm{A}$为积图。

证明　对任意的$(B,\ (\tau_k\text{: } \mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{A}_k)_{k=1,\cdots,s(n-1)+1})$有$\sum\limits_{k=1}^{s(n-1)+1} i_k\tau_k\text{: }\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{A}$，而$p_j(\sum i_k\tau_k)=\tau_j+\sum\limits_{k(\neq j)} p_j i_k\tau_k$。因$p_j i_k=h_j a_k$，又$a_k\tau_k=a$：$\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{F}$，故$p_j i_k\tau_k=h_j a$：$\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{A}_j$为拟零态。从而，$p_j(\sum i_k\tau_k)=\tau_j$。泛性中的唯一性是明显的。

推论2.7　设$(A,\ (i_j,p_j)_{j=1,\cdots,s(n-1)+1})$与$(A',\ (i'_j,p'_j))$为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的两个弱双积，则存在同构态$\tau$：$\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{A}'$使$p'_k\tau=p_k$。

这样一来，弱双积中的对象A在同构意义下是唯一的。当$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$有弱双积时，记其弱双积中的对象为$\bigoplus\limits_{k=1}^{s(n-1)+1}\mathrm{A}_k$或$\oplus\mathrm{A}_k$。

定理2.8　当F为拟零时，若$\mathrm{A}_k\xleftarrow{p_k}\mathrm{A}$为积图，则存在$i_k$：$\mathrm{A}_k\longrightarrow\mathrm{A}$使$\mathrm{A}_k\underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}}\mathrm{A}$为弱双积图。

证明　取h_k：$\mathrm{F}\longrightarrow\mathrm{A}_k$，由引理1.2，$\bar{h}_k=h_k$。有$a_j$：$\mathrm{A}_j\longrightarrow\mathrm{F}$。由$\mathrm{A}_k\xleftarrow{p_k}\mathrm{A}$为积图，存在$i_j$：$\mathrm{A}_j\longrightarrow\mathrm{A}$使$p_j i_j=1_{A_j}$，$p_k i_j=h_k a_j\ (k\neq j)$。今有$p_k\left(\sum\limits_{j=1}^{s(n-1)+1} i_j p_j\right)=p_k+\sum\limits_{j(\neq k)} p_k i_j p_j=p_k+\sum\limits_{j(\neq k)} h_k a_j p_j$，其中$a_j p_j=a$：$\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{F}$，$p_k i_j p_j=h_k a$：$\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{A}_k$为拟零态。从而，$p_k(\sum i_j p_j)=p_k$。由积的泛性知$\sum i_j p_j=1_A$。

定理2.9　设终对象F为拟零的，则存在p_k使图$\mathrm{A}_k\underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}}\mathrm{A}\ (k=1,\cdots,s(n-1)+1)$为双积图$\Longleftrightarrow i_k$为单的，$A$满足条件(o)，$\mathrm{A}_k\xrightarrow{i_k}\mathrm{A}$为弱上积图。

证明　$\Leftarrow$：因A满足条件(o)，可设$\widetilde{[F,A]}=\{a\}$。今任取$a_k\in\widetilde{[F,A_k]}$，则$\overline{i_k a_k}=i_k\bar{a}_k=i_k a_k\in\widetilde{[F,A]}$，从而$i_k a_k=a$，由$i_k$的单性知$\widetilde{[F,A_k]}$为独点集。

因F为拟零的，由引理1.2，对每个k存在h_k：$\mathrm{F}\longrightarrow\mathrm{A}_k$使$h_k=\bar{h}_k$。设$a_k$：$\mathrm{A}_k\longrightarrow\mathrm{F}$。

对每个k，图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}_k \arrow[r, "1_{A_k}"] & \mathrm{A}_k \\ \mathrm{A}_j \arrow[ur, "h_k a_j"] & (j\neq k) \end{tikzcd} \qquad (a_1)$$

满足条件(o)。

这是因为$\widetilde{[F,A_k]}=\{h_k\}$为独点集．同理，图

$$A_k\xrightarrow{i_k}A \tag{a_2}$$

亦为满足条件(o)的．

今$A_k\xrightarrow{i_k}A$为弱上积图，对图(a_1)，存在p_k：$A\longrightarrow A_k$ 使 $p_ki_k=1_{A_k}$，$p_ki_j=h_ka_j$．

又$\left(\sum_{k=1}^{s(n-1)+1}i_kp_k\right)i_j=i_j+\sum_{k(\neq j)}i_kp_ki_j=i_j+\sum_{k(\neq j)}i_kh_ka_j$．其中$\overline{i_kh_k}=i_k\bar{h}_k=i_kh_k\in\widetilde{[F,A]}=\{a\}$．由引理1.1知$(\sum i_kp_k)i_j=i_j$．这样一来，因图$(a_2)$满足条件(o)由弱上积的泛性知$\sum i_kp_k=1_A$．

$\Rightarrow$：若$A_k\underset{p}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}}A$为双积，由$p_ki_k=1_{A_k}$知$i_k$为上保核收缩，从而$i_k$为单的．(注意：下面的证明并没利用$A$满足条件(o)的假设)设$(B,(n_k:A_k\longrightarrow B))$满足条件(o)，存在$b_o$：$F\longrightarrow B$使$n_k(h_k)=b_o$，其中$h_ka_j$属于弱双积$A_k\underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}}A$．易知复合$n_kh_k=n_k(h_k)$．取$\sum n_kp_k$：

$A\longrightarrow B$，有$(\sum n_jp_j)i_k=n_k+\sum_{j(\neq k)}n_jp_ji_k=n_k+\sum_{j(\neq k)}n_jh_ja_k$．今$n_jh_j=b_o$，由引理1.1，$(\sum n_jp_j)i_k=n_k$．泛性中的唯一性是容易知道的．证毕．

事实上，我们证明了

定理2.10 若$A_k\underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}}A$为弱双积，则$A_k\xrightarrow{i_k}A$为弱上积；又若每个对象皆满足条件(o)，则$A_k\xrightarrow{i_k}A$为上积．

命题2.11 当$(A,(i_j,p_j)_{j=1,\cdots,s(n-1)+1})$与$(A,(i'_j,p_j))$为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的双积时，$i_j=i'_j$．

证明 $i_j=(\sum i'_kp_k)i_j=i'_j+\sum_{k(\neq j)}i'_kp_ki_j=i'_j$．

命题2.12 双积在同构意义下是唯一的．

证明 设$(A,(i_j,p_j))$与$(B,(i'_j,p'_j))$为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的双积．由推论2.7，存在同构态τ：$A\longrightarrow B$使$p_j=p'_j\tau$．又容易验证$(A,(\tau^{-1}i'_j,p_j))$为$A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1}$的双积，由命题2.11，$i_j=\tau^{-1}i'_j$．证毕．

$n=2$时，上述结果包括了予加法范畴情况的熟知结果([4]p.190)，但我们的讨论在一定程度上避开了零对象并且产生了予加法范畴所没有的问题．

由定理2.6，当范畴$\mathbb{C}$有弱双积时，存在弱双积函子$\oplus$：$\underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{s(n-1)+1}\longrightarrow\mathbb{C}$：

设$A_j\in\mathbb{C}$，$j=1,\cdots,s(n-1)+1$，

$$(A_1,\cdots,A_{s(n-1)+1})\longmapsto\oplus A_j,$$

$$(f_1,\cdots,f_{s(n-1)+1})\longmapsto\oplus f_j,$$

其中f_j：$A_j\longrightarrow A'_j$，$\oplus f_j$按积而被唯一地(在同构意义下)确定，如下图所示：

$$\begin{tikzcd} A_j & \oplus A_i \arrow[l, "p_j"'] \\ A'_j \arrow[from=u, "f_j"'] & \oplus A'_i \arrow[l, "p'_j"'] \arrow[from=u, "\oplus f_i"] \end{tikzcd} \qquad (**)$$

$\oplus f_i$ 由 $p'_j \oplus f_i = f_j p_j$ 而定。

定义2.13 设$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2$为n-予加法范畴，若(共变或逆变)函子T：$\mathscr{A}_1 \longrightarrow \mathscr{A}_2$使对任何对象$A,B \in ob\mathscr{A}_1$及$f_i \in [A,B]$，$i=1,\cdots,n$，有$T(f_1+\cdots+f_n)=Tf_1+\cdots+Tf_n$，则说$T$为弱加法的，又若当$ha$为属于某弱双积的拟零态时$T(ha)$为零拟零态，则说弱加法函子$T$为加法函子。拟零态$ha$称为零拟零态，若$h$：$F \longrightarrow A$满足$h=\bar{h}$。属于弱双积的拟零态一定是零拟零的。

由定理2.10，当$A \in ob\mathbb{C}$ A满足条件(o)时，在有弱双积的范畴$\mathbb{C}$中存在上对角映射$\check{\delta}^A$([4]p.192)，而任何一个有弱双积的范畴中总有对角映射δ_A，这由定理2.6知。这样一来，参看[4]p.192的讨论得

命题2.14 设$\mathbb{C}$的每个对象皆满足条件(o)，$\mathbb{C}$有弱双积，f_j：$A \longrightarrow B$，$j=1,\cdots,n$，则

$$f_1+\cdots+f_n=\check{\delta}^B \oplus f_j \delta_A\text{：}A \longrightarrow B. \qquad (***)$$

事实上，设 $A_k \underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} \oplus A$为弱双积图，$k=1,\cdots,n$，$A_k=A$；$B_k \underset{p'_k}{\overset{i'_k}{\rightleftarrows}} \oplus B$为弱双积图，$B_k=B$。由于$B$满足条件(o)，从而$B_k \xrightarrow{1_B} B$满足条件(o)。于是，存在$\check{\delta}^B$使

$$\forall k \qquad \check{\delta}^B i'_k = 1_B.$$

今又有

$$\forall k \qquad p_k \delta_A = 1_A.$$

现做下列运算：

$$\check{\delta}^B \oplus f_j \delta_A = \check{\delta}^B\left(\sum_{k=1}^{n} i'_k p'_k\right) \oplus f_j \delta_A$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n} \check{\delta}^B i'_k p'_k\right) \oplus f_j \delta_A = \left(\sum_{k=1}^{n} p'_k\right) \oplus f_j \delta_A = \sum_{k=1}^{n} p'_k \oplus f_j \delta_A.$$

由(**)知

$$\sum_{k=1}^{n} p'_k \oplus f_j \delta_A = \sum_{k=1}^{n} f_k p_k \delta_A = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

命题2.15 若$g_i \in [A,B]$，$i=1,\cdots,(n-1)$，使$(g_1,\cdots,g_{n-1})$为$(n-1)$-价单位元，T为弱加法函子，则$(Tg_1,\cdots,Tg_{n-1})$亦为$(n-1)$-价单位元。

证明 任取$g \in [A,B]$，有$g=g+g_1+\cdots+g_{n-1}$，故$T(g)=T(g)+T(g_1)+\cdots+T(g_{n-1})$。由[2]引理1，$(T(g_1),\cdots,T(g_{n-1}))$为$(n-1)$-价单位元。

命题2.16 设T：$\mathscr{A}_1\longrightarrow\mathscr{A}_2$为弱加法函子，$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2$为$n$－予加法范畴，则对$\mathscr{A}_1$的任何态$h$成立着

$$T(\bar{h})=\overline{T(h)}.$$

证明 今有

$$\underbrace{h+\cdots+h}_{n-2}+\bar{h}+\bar{h}=\bar{h},\text{ 故}$$

$$T(\bar{h})=T(h+\cdots+h+\bar{h}+\bar{h})=T(h)+\cdots+T(h)+T(\bar{h})+T(\bar{h}).$$

从而，$(\underbrace{T(h),\cdots,T(h)}_{n-2},T(\bar{h}))$为$(n-1)$-价单位元，由"$^-$"的唯一性和$T(\bar{h})=\overline{T(h)}$.

定理2.17 设$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2$为n－予加法范畴，$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2$的对象皆满足条件(o)，$\mathscr{A}_1$有弱双积，则(共变或逆变)函子T：$\mathscr{A}_1\longrightarrow\mathscr{A}_2$为加法的$\Longleftrightarrow T$保持弱双积.

证明 在证明"$\Rightarrow$"部份时应注意：由于$\mathscr{A}_2$的对象满足条件(o)，$\mathscr{A}_2$中的零拟零态$h_ka_j(j\neq k)$中的h_k对k是唯一的.

在证明"$\Leftarrow$"部份时应注意：由命题2.14，(***)式对$\mathscr{A}_1$是成立的.

式(***)的证得用到：1)$(A_k|A_k=A,\ k=1,\cdots,n)$与$(B_k|B_k=B,\ k=1,\cdots,n)$有弱双积，2)$B$满足条件(o)．因而，当$\mathscr{A}_2$的对象满足条件(o)且共变函子$T$保持弱双积时，成立着

$$\sum_{k=1}^{n}Tf_k=\check{\delta}^{TB}(\oplus Tf_j)\delta_{TA}:\ TA\longrightarrow TB.$$

对于逆变函子的讨论是完全类似的，有

$$\sum_{k=1}^{n}Tf_k=\check{\delta}^{TA}(\oplus Tf_j)\delta_{TB}:\ TB\longrightarrow TA.$$

同时，$T\delta_A=\check{\delta}^{TA}$，$T\check{\delta}^B=\delta_{TB}$．由于积的泛性，$T(\oplus f_j)=\oplus Tf_j$．证毕.

今设$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2$为范畴，s：$\mathscr{A}_1\longrightarrow\mathscr{A}_2$为(共变或逆变)函子．令$A_1\in ob\mathscr{A}_1$，$A_2\in ob\mathscr{A}_2$，$u$：$A_2\longrightarrow sA_1$，若对于每个满足某条件(c)的对$\langle D_1,f\rangle$(其中，$D_1\in ob\mathscr{A}_1$，$f$：$A_2\longrightarrow sD_1$)恒有唯一的态$f'$：$A_1\longrightarrow D_1$使$(sf')u=f$，则说对$\langle A_1,u\rangle$为从$A_2$到$s$的(c)弱泛矢(参看[4] p.55, p.231).

现令$\mathscr{B}$为一小范畴，$\mathscr{A}$为任一范畴．$\mathscr{A}^{\mathscr{B}}$为函子范畴 (functor category)，Δ：$\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}^{\mathscr{B}}$为对角函子 (diagonal functor) ([4]p.67)．设$E\in ob\mathscr{A}^{\mathscr{B}}$，则称从E到$\Delta$的(c)弱泛矢为E的(c)弱上极限.

当取$\mathscr{B}$为对象集为$\{1,\cdots,s(n-1)+1\}$的离散范畴而$\mathscr{A}$为n－予加法范畴时，令$\mathscr{A}_1=\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_2=\mathscr{A}^{\mathscr{B}}$，$\langle D_1,f\rangle$满足条件(o)的定义可由定义2.3给出．这样一来，弱上积为(o)弱上极限.

[8]中已证得左R—n模的范畴$_R\mathrm{M}_n^l$为n－予加法范畴．当取$\mathscr{B}$为定向集 (directed set) 时，我们来证明存在从$E(E\in ob(_R\mathrm{M}_n^l)^{\mathscr{B}})$到$\Delta(\Delta$：$_R\mathrm{M}_n^l\longrightarrow(_R\mathrm{M}_n^l)^{\mathscr{B}})$的泛矢，即E的上极限．这事实上是$R$—$n$模的正向系统的正向极限.

关于R—n模的系统的极限有较丰富的内容，我们将另文讨论.

3. R-n模的正向系统的正向极限

设G为交换n-群，R为具单位元的环，我们完全可仿[5]p.12那样引进左R—n模与右R—n模。R—n模同态仿通常R-模同态来定义。我们将只讨论左R—n模。

本节的一切讨论对n-群也适用，并有完全类似的结果。

设Λ为有向集，$\Lambda_1=\{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda;\ \alpha\leqslant\beta\}$([6]p.3)。$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},\ (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$为左$R$—$n$模正向系统，$\rho_{\alpha\beta}$：$M_\alpha\longrightarrow M_\beta$为模同态。

命题3.1　对每个R—n模的正向系统$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},\ (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$恒存在满足下列条件的正向极限$(M,\ (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$：

(i)对每个$m\in M$，存在$\alpha\in\Lambda$使$m\in I_m(\tau_\alpha)$，

(ii)对任意的$\alpha,\beta\in\Lambda$，$\tau_\alpha(m_\alpha)=\tau_\beta(m_\beta)\Longleftrightarrow$存在$\gamma$使$\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)=\rho_{\beta\gamma}(m_\beta)$。

证明　令$S=\{(m_\alpha)\,|\,\alpha\in\Lambda,\ m_\alpha\in M_\alpha\}$，在S中界定关系～为

$(m_\alpha)\sim(m_\beta)\Longleftrightarrow\exists\gamma\in\Lambda\ni\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)=\rho_{\beta\gamma}(m_\beta)$。显然，～为等价关系。记$(m_\alpha)$所在的等价类为$[m_\alpha]$。令$M=s/\sim$，在$M$中界定$n$元运算如下：

$[m_{\alpha_1}]+\cdots+[m_{\alpha_n}]=[\rho_{\alpha_1\beta}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\beta}(m_{\alpha_n})]$，其中$\beta$使$\alpha_i\leqslant\beta$，$i=1,\cdots,n$，

现证上述n-元运算是有意义的：

(a)与β的选取无关。事实上，若$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\leqslant\beta_1,\beta_2$，则存在$\beta$使$\beta_i\leqslant\beta$，$i=1,2$。今有$\rho_{\beta_1\beta}(\rho_{\alpha_1\beta_1}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\beta_1}(m_{\alpha_n}))=\rho_{\alpha_1\beta}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\beta}(m_{\alpha_n})=\rho_{\beta_2\beta}(\rho_{\alpha_1\beta_2}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\beta_2}(m_{\alpha_n}))$，故$\rho_{\alpha_1\beta_1}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\beta_1}(m_{\alpha_n})\sim\rho_{\alpha_1\beta_2}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\beta_2}(m_{\alpha_n})$。

(b)与代表元选取无关。事实上，若$(m_{\alpha_1})\sim(m_{\beta_1}),\cdots,(m_{\alpha_n})\sim(m_{\beta_n})$，则存在$\gamma$使$\rho_{\alpha_i\gamma}(m_{\alpha_i})=\rho_{\beta_i\gamma}(m_{\beta_i})$，$i=1,\cdots,n$。故$\rho_{\alpha_1\gamma}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\gamma}(m_{\alpha_n})=\rho_{\beta_1\gamma}(m_{\beta_1})+\cdots+\rho_{\beta_n\gamma}(m_{\beta_n})$。

明显地，上述的n-元运算是结合的。故M已经为n-半群。今证对任何$[m_\alpha]\in M$，存在$\overline{[m_\alpha]}$。事实上，因$\underbrace{\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)+\cdots+\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)}_{n-2}+\rho_{\alpha\gamma}(\overline{m}_\alpha)+\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)=\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)$，故$\rho_{\alpha\gamma}(\overline{m}_\alpha)=\overline{\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)}$。于是，对任意的$[m_\beta]\in M$有

$\underbrace{[m_\alpha]+\cdots+[m_\alpha]}_{n-2}+[\overline{m}_\alpha]+[m_\beta]=[\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)+\cdots+\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)+\rho_{\alpha\gamma}(\overline{m}_\alpha)+\rho_{\beta\gamma}(m_\beta)]=[\rho_{\beta\gamma}(m_\beta)]=[m_\beta]$。

另一方面，若$\underbrace{[m_\alpha]+\cdots+[m_\alpha]}_{n-2}+[m_\delta]+[m_\alpha]=[m_\alpha]$，则存在$\gamma$使$\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)+\cdots+\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)+\rho_{\delta\gamma}(m_\delta)+\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)=\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)$，故由$M_\gamma$为$R$—$n$模知$\rho_{\delta\gamma}(m_\delta)=\overline{\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)}$，于是$\rho_{\delta\gamma}(m_\delta)=\rho_{\alpha\gamma}(\overline{m}_\alpha)$，从而$[\overline{m}_\alpha]=[m_\delta]$。这就证明了[2]定理1.4(7)，故$M$为$n$-群。

对$r\in R$，定义$r[m_\alpha]=[rm_\alpha]$。易知定义是有意义的且M为R—n模。

令n_α：$M_\alpha\longrightarrow M$：$m_\alpha\longmapsto[m_\alpha]$则$n_\alpha$为自然同态：$n_\alpha(m_\alpha^1+\cdots+m_\alpha^n)=[m_\alpha^1+\cdots+m_\alpha^n]=[\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha^1+\cdots+m_\alpha^n)]=[\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha^1)+\cdots+\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha^n)]=[m_\alpha^1]+\cdots+[m_\alpha^n]=n_\alpha(m_\alpha^1)+\cdots+n_\alpha(m_\alpha^n)$；$n_\alpha(rm_\alpha)=[rm_\alpha]=r[m_\alpha]=rn_\alpha(m_\alpha)$。

又$n_\alpha(m_\alpha)=[m_\alpha]=[\rho_{\alpha\beta}(m_\alpha)]=n_\beta(\rho_{\alpha\beta}(m_\alpha))$，故$(M,\ n=(n_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为靶(target)([6]p.4)。明显地$(M,\ (n_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$满足(i)与(ii)。

下面我们证明一个一般的事实：

设$(M, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为$R$—$n$模正向系统$((M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha;\beta)\in\Lambda_1})$的靶且满足(i)与(ii)，则$(M, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为该系统的正向极限。

事实上，设$(M', (\eta_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为该系统的任一靶，任取$m\in M$，由(i)，存在$m_\alpha\in M_\alpha$使$\tau_\alpha(m_\alpha)=m$。若$\tau_\beta(m_\beta)=m$，则由(ii)知存在$\gamma$使$\alpha\leqslant\gamma$，$\beta\leqslant\gamma$且$\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha)=\rho_{\beta\gamma}(m_\beta)$。故$\eta_\alpha(m_\alpha)=\eta_\gamma(\rho_{\alpha\gamma}(m_\alpha))=\eta_\gamma(\rho_{\beta\gamma}(m_\beta))=\eta_\theta(m_\beta)$。令$f: M\longrightarrow M': m\longmapsto\eta_\alpha(m_\alpha)$，其中$\tau_\alpha(m_\alpha)=m$。

设$m_1,\cdots,m_n\in M$，而$\tau_{\alpha_i}(m_{\alpha_i})=m_i$，$i=1,\cdots,n$。令$\rho_{\alpha_1\alpha}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\alpha}(m_{\alpha_n})=m_\alpha\in M_\alpha$，$\alpha$是存在的。有$\tau_\alpha(m_\alpha)=\tau_{\alpha_1}(m_{\alpha_1})+\cdots+\tau_{\alpha_n}(m_{\alpha_n})=m_1+\cdots+m_n$。从而，$f(m_1+\cdots+m_n)=\eta_\alpha(m_\alpha)=\eta_\alpha(\rho_{\alpha_1\alpha}(m_{\alpha_1})+\cdots+\rho_{\alpha_n\alpha}(m_{\alpha_n}))=\eta_{\alpha_1}(m_{\alpha_1})+\cdots+\eta_{\alpha_n}(m_{\alpha_n})=f(m_1)+\cdots+f(m_n)$。又若$\tau_\alpha(m_\alpha)=m\in M$，则当$r\in R$时$\tau_\alpha(rm_\alpha)=r\tau_\alpha(m_\alpha)=rm$，故$f(rm)=\eta_\alpha(rm_\alpha)=r\eta_\alpha(m_\alpha)=rf(m)$。于是，$f$: $M\longrightarrow M'$为R—n模同态。明显地有$f\tau_\alpha=\eta_\alpha$，泛性中的唯一性是明显的。因而，$(M, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为该系统的正向极限。于是，命题得证。

由于正向极限在R—n模同构意义下的唯一性证明可仿[6]p.5，而(i)与(ii)又是同构不变性质，因此我们已经证明了。

定理3.2　设$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$为$R$—$n$模的正向系统，则$(M, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为该系统的正向极限$\Longleftrightarrow(M, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为该系统的靶且满足(i)与(ii)。

关于R—n模的反向系统([7]p.213)，我们仿[6]p.4的方法定义其反向极限为具有泛性的反靶。设$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\beta\alpha})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$为$R$—$n$模的反向系统，其中$\rho_{\beta\alpha}$: $M_\beta\longrightarrow M_\alpha$为$R$—$n$模同态，$\alpha\leqslant\beta$。$(M, (\tau_\alpha: M\longrightarrow M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$称为该系统的反靶，若$M$为$R$—$n$模，$\tau_\alpha$为$R$—$n$模同态且满足下面的相容性条件：

$$\forall\alpha\leqslant\beta\quad\begin{tikzcd} M_\beta \arrow[d, "\rho_{\beta\alpha}"'] & \\ M_\alpha & M \arrow[ul, "\tau_\beta"'] \arrow[l, "\tau_\alpha"] \end{tikzcd}\quad\text{为交换的。}$$

对反向系统$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\beta\alpha})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$，令$M_\infty=\{m=(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\mid\forall\alpha\leqslant\beta\ \ m_\alpha=\rho_{\beta\alpha}(m_\beta)\}$([7]p.215)，则容易证明

命题3.3　对R—n模反向系统$\{(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\beta\alpha})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\}$，$M_\infty\neq\emptyset\Longleftrightarrow$有反靶$\Longleftrightarrow$有反向极限；当$M_\infty\neq\emptyset$时，$(M_\infty, (n_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$为该系统的反向极限，其中$n_\alpha$: $M_\infty\longrightarrow M_\alpha$: $(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\longmapsto m_\alpha$。

应注意，M_∞按熟知的方法为一R—n模。

参 考 文 献

[1] 于永溪，n-予加法范畴中的拟核，数学研究与评论，创刊号(1981), p. 7—15.

[2] Monk, J. D., Sioson, F. M., On the general theory of m—groups, Fund. Math., 72(1971), p. 233—244.

[3] Mitchell, B., Theory of categories, New york, 1965.

[4] Maclane, S., Categories for the Working Mathematician, New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1971.

[5] Hilton, P. J., Stammbach, U., A course in Homological Algebra, New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1971.

[6] Tennison, B. R., Sheaf Theory, Cambridge University Press, 1975.

[7] Eilenberg, S., Steenrod, N., Foundations of Algebraic Topology, Princeton University press, 1952.

[8] 于永溪，左R-n模的范畴与Hom函子，数学研究与评论，(将于下期刊登).

The Weak-Coproducts and Limits in an n-preadditive Category

By Yu Yonghsi (于永溪)

Abstract

In this note, We discuss (o) weak-coproducts and biproducts in an n-preadditive category and construct a direct limit of a direct system of R-n modules. The difficulty is that the n-preadditive category does not possess any null objects. The main theorems are Th. 2. 6, Th. 2. 8 and Th. 2. 9.

Th.2.6. A diagram $A_k \underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} A$ is a weak-biproduct diagram, then the diagram $A_k \xleftarrow{p_k} A$ is a product diagram.

Th.2.8. If the terminal object F is a quasi-null terminal object and a diagram $A_k \xleftarrow{p_k} A$ is a product diagram, then there are morphisms i_k: $A_k \longrightarrow A$ with the diagram $A_k \underset{p^k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} A$ is a weak-biproduct diagram.

Th.2.9. If the terminal object F is a quasi-null terminal object, then there are p_k: $A \longrightarrow A_k$ $(k=1,\cdots,s(n-1)+1)$ with the diagram $A_k \underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} A$ is a biproduct diagram iff for each k $(k=1,\cdots,s(n-1)+1)$ i_k is monic, and the object A satisfies the condition (o) and the diagram $A_k \xrightarrow{i_k} A$ is a (o) weak-coproduct diagram.