第3卷 第1期 1983年 1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.1 Jan. 1983

左模张量积函子 I*

胡述安

（南京大学数学系）

§1 引　　言

设 $K=\{0,1,\alpha,\beta,\cdots\}$ 是一个有么元可换环，$R=\{0,1,r_1,r_2,\cdots\}$ 与 $S=\{0,1,s_1,s_2,\cdots\}$ 均为K-环．$A=\{0,a_1,a_2,\cdots\}$ 是左酉R-模，$C=\{o,c_1,c_2,\cdots\}$ 是左酉S-模．在文献［1］中，周伯壎教授定义了A与C的左模张量积 $A\otimes C$，它是一个左 $R\otimes S$-模．本文中的 K、R、S、A、C 均如上定义；除非有特别的声明，模均表示左模；如环有么元，模就表示左酉模．

在文献[2;P95-96]中，有古典张量积（Kronecker product）的定义：如R是一环，$A\in\mathscr{M}_R$，$C\in{}_R\mathscr{M}$，则 $A\otimes_R C$ 是一个加群，它既不是左 R-模，也不是右R-模．此后，左模张量积记为～⊗～，而古典张量积记为～$\otimes_R$～．

在本文的 §2 中，研究了函子～$\otimes C$：${}_R\mathscr{M}\to{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$ 的性质，证明了左模张量积情况下的伴随同构定理，它以一些熟知的结果作为其推论．还证明了左模张量积与古典张量积的结合律同构．这两个同构是研究左模张量积的有用的工具．在§3中，定义了zh-平坦模与zh^R-平坦模，并给出了它的一些基本性质、判别法则与应用．

§2 函子～⊗C

取定K、R、S、$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$，则容易验证～$\otimes C$：${}_R\mathscr{M}\to{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$ 是一共变函子．称为左模张量积函子．

$A\in{}_R\mathscr{M}$与$C\in{}_S\mathscr{M}$，当然都可以被看成是双边K-模，故可构作古典张量积 $A\otimes_K C$．在文献[3]中，周伯壎教授对 $A\otimes_K C$ 赋以 $R\otimes S$-模结构，并证明了

命题2.1 ［3.命题1］：取定K、R、S，$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$，有 $R\otimes S$-模同构$A\otimes C\cong A\otimes_K C$．

下面的伴随同构定理给出了Hom函子与左模张量积函子～$\otimes C$的联系，它与上述命题2.1一样，是研究函子～$\otimes C$ 的有用工具．

定理 2.1 （伴随同构定理）$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$，$\forall M\in{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$，有加群的同构：

$$\tau:\ \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,M)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M)).$$

*1982年2月20日收到.

而且它对三个变量A、C、M，都是自然的．

证明　M是左$R\otimes S$-模，当然可以看成是（左R-、左S-）双模，因而$\mathrm{Hom}_S(C,M)\in{}_R\mathscr{M}$．故右边是有意义的．左边当然是有意义的．

$\forall f\in \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,M)$，$\forall a\in A$，定义$f_a: C\to M$为$c\longmapsto f(a\otimes c)$．容易验证$f_a\in \mathrm{Hom}_S(C,M)$．

定义$\bar{f}: A\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(C,M)$为$a\longmapsto f_a$．容易验证$\bar{f}\in \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M))$．而且还可以验证$\tau: \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M))$，它由$\tau: f\longmapsto \bar{f}$给出，是加群的同态．

$\forall \varphi\in \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M))$，考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
A\times C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & M \\
A\otimes C \arrow[ur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

其中$\psi(a,c)\longmapsto[\varphi(a)](c)$．容易验证$\psi$是文献[1]所称的一个$R\otimes S$-映射．故由$A\otimes C$的泛性质，存在唯一的$R\otimes S$-模同态$g$，使$g(a\otimes c)=\psi(a,c)=[\varphi(a)](c)$．定义$\sigma: \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M))\longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,M)$，它由$\sigma: \varphi\longmapsto g$给出．

容易验证下列事实：σ是完全确定的加群同态，而且σ与τ互为逆映射．

下面验证τ对变量C是自然的，对其余两个变量的自然性容易类似地验证．

$\forall f\in \mathrm{Hom}_S(C,C')$，其中$C$、$C'\in{}_S\mathscr{M}$，我们要验证下图的可换性：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C', M) \arrow[r, "\tau_{C'}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(1\otimes f,1)"] & \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C',M)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(1,\mathrm{Hom}(f,1))"] \\
\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,M) \arrow[r, "\tau_C"] & \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M))
\end{tikzcd}$$

$\forall g\in \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C',M)$，$\forall a\in A$，$\forall c\in C$，有

$$[\mathrm{Hom}(1,\mathrm{Hom}(f,1))\circ\tau_{C'}](g)=\mathrm{Hom}(f,1)\circ[\tau_{C'}(g)]，\text{而}$$

$$[(\mathrm{Hom}(f,1)\circ[\tau_{C'}(g)])(a)](c)=[\mathrm{Hom}(f,1)([\tau_{C'}(g)](a))](c)$$

$$=[(\mathrm{Hom}(f,1))(g_a)](c)=(g_a\circ f)(c)=g_a[f(c)]=g(a\otimes f(c)).$$

另一方面，我们有

$$[\tau_C\circ\mathrm{Hom}(1\otimes f,1)](g)=\tau_C[g\circ(1\otimes f)],$$

而
$$(\tau_C[g\circ(1\otimes f)](a))(c)=[g\circ(1\otimes f)]_a(c)=[g\circ(1\otimes f)](a\otimes c)$$

$$=g(a\otimes f(c)).$$

可换性证完．因此τ是自然的同构．▮

根据[4.§37]的定义与证得的定理2.1，立得

定理 2.2　函子$\sim\otimes C$：${}_R\mathscr{M}\to{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$ 与 $\mathrm{Hom}_S(C,\sim)$：${}_{R\otimes S}\mathscr{M}\to{}_R\mathscr{M}$ 是一对伴随函子.

再由定理2.2与熟知结果[4:Theorem2:14]，立得

推论 1（周伯壎[3.命题2]）：$\sim\otimes C$ 是右正合函子.

由定理 2.2 与熟知结果[4:Theorem2.19]，立得

推论 2　$\sim\otimes C$ 保持正向极限.

作为推论 2 的一个特别情况，有

推论 3（周伯壎[1,定理5]）：$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ 是一族 R-模，$\{C_\mu\}_{\mu\in\Omega}$ 是一族 S-模，Γ、Ω 均为指标集，则有

$$(\bigcup_{\lambda\in\Gamma}A_\lambda)\otimes(\bigcup_{\mu\in\Omega}C_\mu)\cong\bigcup_{\lambda\in\Gamma,\mu\in\Omega}(A_\lambda\otimes C_\mu).$$

事实上直和是正向极限，而且左模张量积函子$\sim\otimes C$ 与 $A\otimes\sim$具有相同的性质，故可以两次应用推论 2 .

定理 2.3（左模张量积与古典张量积的结合律同构）：$\forall M\in\mathscr{M}_{R\otimes S}$，$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$，有同构：

$$M\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)\cong(M\otimes_R A)\otimes_S C.$$

而且这个同构对三个变量 M、A、C 都是自然的.

证明　首先解释记号，左边当然有定义. M 作为右 $R\otimes S$-模，当然可以被看成是（右 R-、右 S-）双模，这样 $M\otimes_R A$ 有定义，而且是右 S-模，故右边也是有定义的.

其次对特殊的右 $R\otimes S$-模 $R\otimes S$ 进行证明：

$$
\begin{aligned}
\text{右边}&=[(R\otimes S)\otimes_R A]\otimes_S C\overset{①}{\cong}[(R\otimes_K S)\otimes_R A]\otimes_S C\\
&\overset{②}{\cong}[(S\otimes_K R)\otimes_R A]\otimes_S C\overset{③}{\cong}[S\otimes_K(R\otimes_R A)]\otimes_S C\\
&\overset{④}{\cong}(S\otimes_K A)\otimes_S C\overset{⑤}{\cong}(A\otimes_K S)\otimes_S C\\
&\overset{⑥}{\cong}A\otimes_K(S\otimes_S C)\overset{⑦}{\cong}A\otimes_K C\overset{⑧}{\cong}A\otimes C,
\end{aligned}
$$

$$\text{左边}=(R\otimes S)\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)\overset{⑧}{\cong}A\otimes C.$$

其中①是环的张量积之定义；②、⑤是由可换环上的模的张量积的可换性[4;Theorem 1;13]；③、⑥是由古典张量积的结合律[4,Exercise 1,10]；④、⑦、⑨是由熟知结果[4;Theorem 1;12]；⑧是由前述命题 2.1.

如 M 是任一自由右 $R\otimes S$-模，由于古典张量积保持直和，因而所要求的同构由上段显然可得，而且此同构由 $m\otimes_{R\otimes S}(a\otimes c)\longmapsto(m\otimes_R a)\otimes_S C$ 给出.

$\forall M\in\mathscr{M}_{R\otimes S}$，取正合列 $F_1\to F_0\to M\to O$，其中 F_1、F_0 均为右 $R\otimes S$- 自由模. 显然可得下列可换图，其中两行正合，这是由于古典张量积函子均右正合.

$$
\begin{array}{ccccccc}
F_1\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C) & \longrightarrow & F_0\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C) & \longrightarrow & M\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C) & \to & 0\\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \vdots\downarrow{\scriptstyle f} & & \\
(F_1\otimes_R A)\otimes_S C & \longrightarrow & (F_0\otimes_R A)\otimes_S C & \longrightarrow & (M\otimes_R A)\otimes_S C & \to & 0
\end{array}
$$

f_1、f_0 都是前段给出的同构．由五引理（Five Lemma），它们诱导出唯一的映射 f，使图可换，而且 f 也是同构．f 是由 f_1、f_0 诱导出来的，显然它也由 $f: m\otimes_{R\otimes S}(a\otimes c)\longmapsto(m\otimes_R a)\otimes_S c$ 给出．由此表达式容易验证它对三个变量 M、A、C 都是自然的． ▌

推论 如 A 是左 R-平坦模．C 是左 S-平坦模，则 $A\otimes C$ 是左 $R\otimes S$-平坦模．

证明 对 $\mathscr{M}_{R\otimes S}$ 中任一正合列 $O\to M'\to M$，它也可看成是 $\mathscr{M}_R$ 中正合列，由 A 之平坦性，$O\to M'\otimes_R A\to M\otimes_R A$ 是 $\mathscr{M}_S$ 中正合列．再由 C 的平坦性，知 $O\to(M'\otimes_R A)\otimes_S C\to(M\otimes_R A)\otimes_S C$ 是加群正合列．再由定理 2.3 给出的自然的同构，得到新的加群正合列 $O\to M'\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)\to M\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)$．故 $A\otimes C$ 是左 $R\otimes S$-平坦模． ▌

文献[1]已证明，两个投射模的左模张量积仍是投射模．上述推论说明平坦模也如此．我们有理由要问：内射模是否也如此呢？答案是否定的．我们将在另一篇文章中举出一个反例．

还需要指出，如果附加一定的条件，则上述推论的逆命题也是成立的，即

命题2.2 K 为域，如 $0\neq A\otimes C$ 是左 $R\otimes S$-平坦模，则 A 是左 R-平坦模，C 是左 S-平坦模．

证明 只证 C 为左 S-平坦模，A 的平坦性可以对称地得出．由[4;Theorem 3;5 3]，只要证明 $\sigma\otimes 1_{\bar{c}}: I\otimes_S C\to S\otimes_S C\cong C$，为单射即可．其中 I 是 S 的任一右理想，$\sigma: I\to S$ 为嵌入映射．

K 上张量积 $R\otimes_K I$ 当然是环 $R\otimes S$ 的一个右理想，故由 $A\otimes C$ 的平坦性，知映射

$$(1_R\otimes\sigma)\otimes(1_A\otimes 1_C): (R\otimes I)\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)\to(R\otimes S)\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)$$

为单射．

由前述命题2.1给出的左模张量积与 K 上古典张量积的同构、古典张量积的结合律、可换环上的张量积的可换性、以及定理 2.3，有可换图

$$\begin{array}{ccc}
(R\otimes_K I)\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C) & \xrightarrow{(1_R\otimes\sigma)\otimes(1_A\otimes 1_C)} & (R\otimes S)\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
A\otimes_K(I\otimes_S C) & \xrightarrow{1_A\otimes(\sigma\otimes 1_C)} & A\otimes_K(S\otimes_S C)
\end{array}$$

其中两个竖直的箭头都是同构．这样 $1_A\otimes(\sigma\otimes 1_{\bar{c}})$ 为单射．但是 $1_A\otimes(\sigma\otimes 1_c)$ 首先是域 K 上的线性空间的线性变换，故由[3.引理2]，有

$$0=\mathrm{Ker}(1_A\otimes(\sigma\otimes 1_{\bar{c}}))=\mathrm{Ker}1_A\otimes_K(I\otimes_S C)+A\otimes_K(\mathrm{Ker}(\sigma\otimes 1_c))=A\otimes_K\mathrm{Ker}(\sigma\otimes 1_c).$$

由于 K 是域，A 当然是 K 上的非 0 自由模，因而是 K 上的忠实平坦模（faithfully flat module[4;P249]）．立得 $Ker(\sigma\otimes 1_c)=0$，即 $\sigma\otimes 1_c$ 是单射． ▌

§3 Zh^R-平坦模

定义3.1 取定 K、S，S- 模 C 称为一个 Zh-平坦模，如对于任何 K-环 R 与任何 R-模正合列

$$0\to A'\to A\to A''\to 0,\ {}_{R\otimes S}\mathscr{M} \text{ 中的列 } 0\to A'\otimes C\to A\otimes C\to A''\otimes C\to 0$$

也正合．

由于$\sim\otimes C$已是右正合函子，故定义中的条件可以减弱成保持单射。

S-模C的Zh-平坦性实质上并不依赖于C的S-模结构，而只是依赖于C的K-模结构。即有

命题3.1 S-模C是Zh-平坦的充要条件是：C作为K-模是古典的平坦模。

证明 必要性。取R为K，对K-模之间的任何单同态σ：$A'\to A$，由条件知$\sigma\otimes 1_c$：$A'\otimes C\to A\otimes C$也是单同态。但左模张量积就是$K$上取的古典张量积，故$C$是$K$-平坦模。

充分性。如C是K-平坦模，则对任何K-环R与任何单R-模同态σ：$A'\to A$，考虑${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的同态$\sigma\otimes 1_c$：$A'\otimes C\to A\otimes C$。再由前述命题2.1，$\sigma\otimes 1_c$作为$K$-模同态是单射，作为$R\otimes S$-模同态当然也是单射。 ▌

这样，Zh-平坦模就与古典的K-平坦模完全是一回事，所以此后就不再提Zh-平坦模，而只提K-平坦模。它的一些简单的性质与判别法则都不赘述。但必须强调指出，并不是所有的S-投射模都是Zh-平坦的。实际上有这样的K-环S，所有的非$0S$-模都不是Zh-平坦的。

定义3.2 固定K、R、S，$C\in{}_S\mathscr{M}$，如对${}_R\mathscr{M}$中任何正合列$0\to A'\xrightarrow{\sigma}A\xrightarrow{\pi}A''\to 0$，有${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中正合列$0\to A'\otimes C\xrightarrow{\sigma\otimes 1_c}A\otimes C\xrightarrow{\pi\otimes 1_c}A''\otimes C\to 0$。则$C$称为一个$Zh^R$-平坦模。

当然可以把条件减弱成保持单射。

比较以上两个定义，可以看出，Zh-平坦性即K-平坦性是Zh^R-平坦性的充分条件，而不是必要条件。这是由于定义3.2中的A'、A、A''不能取遍任意的K-模，而只能取那些具有R-模结构的K-模。

以下讨论Zh^R-平坦模的判别法则，先给出

引理 如M是${}_R\mathscr{M}$的一个内射上生成子(injective cogenerator)，则下列二条件等价：

i) $0\to A'\xrightarrow{\sigma}A\xrightarrow{\pi}A''\to 0$ 正合。

ii) $0\to \mathrm{Hom}_R(A'',M)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi,1_M)}\mathrm{Hom}_R(A,M)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\sigma,1_M)}\mathrm{Hom}_R(A',M)\to 0$ 正合。

证明 i)$\Rightarrow$ii) 由M的内射性显然。

ii)$\Rightarrow$i) 只要证明在条件$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(\sigma,1_M))=\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(\pi,1_M))$之下，可以推出$\mathrm{Ker}\pi=\mathrm{Im}\sigma$，而不用到$\mathrm{Hom}_R(\sigma,1_M)$的满性质与$\mathrm{Hom}_R(\pi,1_M)$的单性质，就足够了。

由$\mathrm{Hom}_R(\sigma,1_M)\cdot\mathrm{Hom}_R(\pi,1_M)=\mathrm{Hom}_R(\pi\sigma,1_M)=0$，我们断言$\pi\sigma=0$。如若不然，则$\exists a'\in A'$，$\ni 0\neq\pi\sigma(a')\in A''$。由$M$是${}_R\mathscr{M}$的上生成子，$\exists f\in\mathrm{Hom}_R(A'',M)$，$\ni f[\pi\sigma(a')]\neq 0$。则$f\cdot\pi\cdot\sigma=\mathrm{Hom}_R(\pi\sigma,1_M)(f)\neq 0$，这与$\mathrm{Hom}_R(\pi\sigma,1_M)=0$相违。故得包含关系$\mathrm{Im}\sigma\subseteq \mathrm{Ker}\pi$。

反过来，如$\mathrm{Ker}\pi\subsetneqq\mathrm{Im}\sigma$，则$\exists a\in A$，$\ni\pi a=0$，但$a\bar{\in}\mathrm{Im}\sigma$。取$\eta$：$A\to A/\mathrm{Im}\sigma$是自然同态。这样$\eta(a)=a+\mathrm{Im}\sigma\neq 0$。再由$M$是上生成子，故$\exists g\in\mathrm{Hom}_R(A/\mathrm{Im}\sigma,M)$，$\ni g[\eta(a)]\neq 0$。故$0\neq g\eta\in\mathrm{Hom}_R(A,M)$。但是$\mathrm{Hom}_R(\sigma,1_M)(g\eta)=g\eta\sigma=0$，即$g\eta\in\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(\sigma,1_M))=\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(\pi,1_M))$。所以$\exists h\in\mathrm{Hom}_R(A'',M)$，$\ni g\eta=\mathrm{Hom}_R(\pi,1_M)(h)=h\pi$。但是$0=h\pi(a)=g\eta(a)\neq 0$，这不可能。故$\mathrm{Ker}\pi\subseteq\mathrm{Im}\sigma$。 ▌

定理3.1 取定K、R、S，$C\in{}_S\mathscr{M}$，则以下三条件是等价的：

i）C是Zh^R-平坦模；

ii)对于任何$R\otimes S$-内射模M，$\mathrm{Hom}_S(C,M)$是R-内射模；

iii)对$_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的某一个内射上生成子X，$\mathrm{Hom}_S(C,X)$是R-内射模。

证明 i)⇒ii)．对$_R\mathscr{M}$中任一正合列

$$0\to A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0, \tag{1}$$

由于C是Zh^R-平坦的，可得$_{R\otimes S}\mathscr{M}$中正合列

$$0\to A'\otimes C\longrightarrow A\otimes C\longrightarrow A''\otimes C\longrightarrow 0, \tag{2}$$

由M是$R\otimes S$-内射模，便有加群正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A''\otimes C,M)\to \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,M)\to \mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A'\otimes C,M)\to 0, \tag{3}$$

但由定理2.1，得到新的加群正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(A'',\mathrm{Hom}_S(C,M))\to \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M))\to \mathrm{Hom}_R(A',\mathrm{Hom}_S(C,M))\to 0 \tag{4}$$

这就是说$\mathrm{Hom}_S(C,M)$是R-内射模。

ii)⇒iii) 当然。

iii)⇒i) 把上述四个正合列中M换成$_{R\otimes S}\mathscr{M}$中取定的内射上生成子X，故由(1)可得(4)，由定理2.1可得(3)，再用引理得到(2)，即得所证。 ∎

推论 固定K、R、S，则下列四条件等价：

i) S作为左S-模是Zh^R-平坦的；

ii)任何S-投射模是Zh^R-平坦的；

iii)任何$R\otimes S$-内射模都是R-内射模；

iV)存在一个$_{R\otimes S}\mathscr{M}$的内射上生成子X是R-内射模。

命题3.2 I是一个有向指标集[4,p44]，$\{C_i,\varphi_i^j,i\in I\}$是$I$上的一个正向系统，其中$C_i\in{}_S\mathscr{M}$，均是$Zh^R$-平坦模．则其正向极限$\varinjlim C_i$也是$Zh^R$-平坦模。

证明 如σ: $A_1\to A_2$是一个单R-模同态．由C_i是Zh^R-平坦的，得到单$R\otimes S$-模同态$A_1\otimes C_i\xrightarrow{\sigma\otimes 1_{C_i}}A_2\otimes C_i$．容易验证$\{A_k\otimes C_i,\ 1_{A_k}\otimes\varphi_i^j,\ i\in I\}$，$k=1,2$，是$I$上的、模范畴$_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的两个正向系统．由[4, Theorem 2.18]，$\{\sigma\otimes 1_{C_i},i\in I\}$诱导了$\varinjlim(A_1\otimes C_i)\longrightarrow\varinjlim(A_2\otimes C_i)$的一个单$R\otimes S$-模同态，记为$\varinjlim(\sigma\otimes 1_{C_i})$．再由定理2.2的推论2的对称结果，$A_k\otimes\sim$都保持正向极限，得到下列可换图．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim(A_1\otimes C_i) \arrow[r, "\varinjlim(\sigma\otimes 1_{C_i})"] \arrow[d, "\wr"] & \varinjlim(A_2\otimes C_i) \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & A_1\otimes(\varinjlim C_i) \arrow[r, "\sigma\otimes 1_{\varinjlim C_i}"] & A_2\otimes(\varinjlim C_i)
\end{tikzcd}$$

由第一行正合立得第二行正合，即得$\varinjlim C_i$是Zh^R-平坦模。 ∎

推论1 $C_i\in{}_S\mathscr{M}$均为Zh^R-平坦模，$i\in I$，(注意不要求I是有向的)则$\bigcup_{i\in I}C_i$也是Zh^R-平坦模。

推论2 $C\in{}_S\mathscr{M}$，如C的每个有限生成子模都是Zh^R-平坦的，则C也是Zh^R-平坦模。

下面的命题给出了Zh^R-平坦模的另一判别法则，它类似于内射模的Bear判别法则。

命题3.3 取定K、R、S，$C\in{}_S\mathscr{M}$，则下列三条件等价：

i) C为Zh^R-平坦模；

ii)对于R的任何左理想L及嵌入映射$L\xrightarrow{\sigma}R$，$\sigma\otimes 1_c$：$L\otimes C\longrightarrow R\otimes C$也是单射；

iii)上述条件ii)中的L限制为有限生成左理想。

证明 i)$\Rightarrow$ii)$\Rightarrow$iii) 是当然的。

iii)$\Rightarrow$ii) 如L是R的任一左理想，记$\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是$L$作为左$R$-模的生成元集。$\Gamma$的有限子集$\lambda$的集合记为$\Lambda$。将$\Lambda$的元素、即$\Gamma$的有限子集按包含关系定义半序。显然$\Lambda$是有向集。用$L_\lambda$表示由$\{x_{\gamma;\gamma\in\lambda}\}$生成的$L$的子左理想，$L_\lambda$当然是$R$的有限生成左理想。如$\lambda_1\leqslant\lambda_2$，定义$\varphi_{\lambda_1}^{\lambda_2}$：$L_{\lambda_1}\to L_{\lambda_2}$，为嵌入映射。这样$\{L_\lambda,\varphi_{\lambda_1}^{\lambda_2},\lambda\in\Lambda\}$构成${}_R\mathscr{M}$中的$\Lambda$上的一个正向系统。容易验证$L$就是这个正向系统的正向极限$\varinjlim L_\lambda$。同样$\{L_\lambda\otimes C,\varphi_{\lambda_1}^{\lambda_2}\otimes 1_c,\lambda\in\Lambda\}$构成${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的$\Lambda$上的正向系统，其正向极限记为$\varinjlim(L_\lambda\otimes C)$。

由于$L_\lambda\xrightarrow{\sigma_\lambda}R$为单射，由条件得$\sigma_\lambda\otimes 1_c$:$L_\lambda\otimes C\longrightarrow R\otimes C$，也是单射．再由[4,Theorem 2.18]，得到

$\varinjlim(L_\lambda\otimes C)\xrightarrow{\varinjlim(\sigma_\lambda\otimes 1_c)}R\otimes C$，也是单射．但由定理2.2的推论2，$\sim\otimes C$保持正向极限，故得下列可换图：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim(L_\lambda\otimes C) \arrow[r, "\varinjlim(\sigma_\lambda\otimes 1_c)"] \arrow[d, "\wr"] & R\otimes C \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & (\varinjlim L_\lambda)\otimes C \arrow[r, "(\varinjlim\sigma_\lambda)\otimes 1_c"] & R\otimes C
\end{tikzcd}
$$

其中两个竖直的箭头是同构，第一行正合，故第二行也正合．但是$\varinjlim L_\lambda$就是L，$\varinjlim\sigma_\lambda$就是σ:$L\to R$，为嵌入映射，这样$\sigma\otimes 1_c$也是单射。

ii)$\Rightarrow$i) 取X为${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$的一个内射上生成子，考虑嵌入映射$0\longrightarrow L\xrightarrow{\sigma}R$，其中$L$为$R$的任一左理想，由条件得正合列：$0\longrightarrow L\otimes C\xrightarrow{\sigma\otimes 1_c}R\otimes C$，立得加群的正合列$\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(R\otimes C,X)\to\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(L\otimes C,X)\to 0$，再由定理2.1给出的伴随同构，得到新的加群正合列：

$\mathrm{Hom}_R(R,\mathrm{Hom}_S(C,X))\to\mathrm{Hom}_R(L,\mathrm{Hom}_S(C,X))\to 0$。由Bear判别法知$\mathrm{Hom}_S(C,X)$是$R$-内射模。再由定理3.2，即得$C$是$Zh^R$-平坦模。 ▌

本文是在周伯壎教授的指导下完成的。严栋开教授、丁石孙教授、佟文庭付教授详细地审阅了本文的初稿，并提出了很多宝贵的意见，作者谨在此致谢。

参 考 文 献

[1] 周伯壎，左环模的张量积与范畴，南京大学学报，自然科学版I(1979).

[2] Jacobson, N., Structure of Rings (1956).

[3] 周伯壎，左模的张量积与同调维数，数学研究与评论，创刊号(1981).

[4] Rotman, J. J., An Introduction to Homological Algebra(1979)

On the functor of the tensor product of left modules I

By Hu Shuan (胡述安)

Abstract

Let K be a commutative ring, R and S be K-rings, A and C be left R- and S-modules respectively. In[1], Professor Zhou Boxun has defined the tensor product of A and C, written $A\otimes C$. $\sim\otimes C$: ${}_R\mathscr{M}\longrightarrow{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$ is a right exact functor.

In §2, we prove the Adjoint Isomorphism Theorem in the case of the tensor product of left modules: $\forall A\in{}_R\mathscr{M}$, $\forall C\in{}_S\mathscr{M}$, $\forall M\in{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$, then there exists a natural isomorphism τ: $\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,M)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,M))$. Some well known results are its corollaries. In this section we also prove the natural isomorplism: $M\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)\cong(M\otimes_R A)\otimes_S C$, where $M\in\mathscr{M}_{R\otimes S}$, $A\in{}_R\mathscr{M}$, $C\in{}_S\mathscr{M}$. As its corollary, we obtain that the tensor product of two left flat modules is a left flat modules too.

In §3, we define Zh-flat module and Zh^R-flat module. Some criterions and fudamental properties of such modules are proved.