第3卷 第1期 数学研究与评论 Vol.3 No.1
1983年 1月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Jan. 1983

右半平面内解析函数的准确零(R)级*

余久曼

(武汉师院汉口分院)

考虑指数级数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

其中 $\{a_n\}$是复数序列，$s=\sigma+it$，σ 及 t 是实变数，

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log n/\lambda_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log|a_n|/\lambda_n) \tag{3}$$

那么级数(1)的收敛横标和绝对收敛横标都是零，于是 $f(s)$ 在右半平面 $\sigma>0$ 内解析. 令

$$M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it)| \quad (\sigma>0) \tag{4}$$

文[1]中研究了 $f(s)$ 在 $\sigma>0$ 内的（R）级. 文[2]中进一步研究了零（R）级. 在本文中，我们引进准确零（R）级的概念，得到了 $f(s)$ 有零（R）级的必要与充分条件(定理1)，并且还得到了 $f(s)$，有完全正规增长准确零（R）级的必要与充分条件（定理2）.

引理1[3]设对于 $r>0$，存在在每一点可导的连续函数 $k(r)$，并且 $\lim\limits_{r\to\infty}k(r)=k$ $(0<k<\infty)$. $\lim\limits_{r\to\infty}k'(r)r\log r=0$，又设 $U(r)=r^{k(r)}$，则

$$\lim_{r\to\infty}(U(ar)/U(r))=a^k,\quad \lim_{r\to\infty}(rU'(r)/U(r))=k$$

其中 a 为任何正数.

引理2 设 c 为一已知数 $(0<c\leqslant\infty)$，$U(r)$ 的定义同引理1，任给 $\beta>0$ 及 $\gamma>0$ $(0<\beta<c)$，存在 $y>0$，使得对于任何满足条件 $\log y''\geqslant(1+\gamma)\log y'$，$y'>Y$ 的 y'、y''，存在 n，使 $y'\leqslant\lambda_n\leqslant y''$，并且 $|a_n|\geqslant[U(\lambda_n)]^{c-\beta}$，又设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log^+|a_n|/\log U(\lambda_n))\leqslant c \tag{5}$$

则存在递增正整数序列 $\{n_\nu\}$，使

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log^+|a_{n_\nu}|}{\log U(\lambda_{n_\nu})}=c,\quad \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log\lambda_{n_{\nu+1}}}{\log\lambda_{n_\nu}}=1$$

证：取 $\beta_j\downarrow 0$ $(0<\beta_j<c)$ 及 $\gamma_j\downarrow 0$，存在 $Y_j>0$，不妨设 $Y_1<Y_2<\cdots<Y_j\uparrow+\infty$，对于任何满足条件

$\log y''\geqslant(1+\gamma_j)\log y'$，$y'>Y_j$ 的 y'、y''，存在 n，使 $y'\leqslant\lambda_n\leqslant y''$，且 $|a_n|\geqslant[U(\lambda_n)]^{c-\beta_j}$ $(j=1,2,\cdots)$

取 $y'=y_{l_1-1}>Y_1$，$y''=y_{l_1}$，$\log y_{l_1}=(1+\gamma_1)\log y_{l_1-1}$，存在 n_{l_1-1}，使 $y_{l_1-1}\leqslant\lambda_{n_{l_1-1}}\leqslant y_{l_1}$，$|a_{n_{l_1-1}}|\geqslant[U(\lambda_{n_{l_1-1}})]^{c-\beta_1}$ $(l_1=2,\cdots m_1)$

*1981年9月2日收到.

取 m_1 充分大，使 $y_{m_1}>Y_2$，

取 $y'=y_{l_2-1}$，$y''=y_{l_2}$，$\log y_{l_2}=(1+\gamma_2)\log y_{l_2-1}$，存在 n_{l_2-1}，使 $y_{l_2-1}\leqslant\lambda_{m_1+l_2-1}\leqslant y_{l_2}$，$|a_{m_1+l_2-1}|\geqslant[U(\lambda_{m_1+l_2-1})]^{c-\beta_2}$ $(l_2=2,\cdots,m_2)$

取 m_2 充分大，使 $y_{m_2}>Y_3$，重复以上步骤，我们有：存在递增正整数序列 $\{n_\nu\}$，使

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\log y_{n+1}}{\log y_n}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log\lambda_{n_{\nu+1}}}{\log\lambda_{n_\nu}},\quad \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log^+|a_{n_\nu}|}{\log U(\lambda_{n_\nu})}\geqslant c$$

结合（5），引理2得证。

定理1 设对指数级数（1）、（2）、（3）及

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}(n/\log U(\lambda_n))=E<+\infty \tag{6}$$

成立，则

$$\varlimsup_{\sigma\to0^+}\frac{\log^+M(\sigma)}{\log U(1/\sigma)}=c\Longleftrightarrow\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log^+|a_n|}{\log U(\lambda_n)}=c\quad(0\leqslant c\leqslant\infty)$$

其中 $U(r)$ 的定义如引理1．

证 必要性。当 $0<c<\infty$ 时，1° 由条件，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\sigma_0>0$，对任何 $\sigma\in(0,\sigma_0)$，$M(\sigma)<[U(1/\sigma)]^{c+\varepsilon}$. 由于（3），对每一 $\sigma>0$ 和任意正整数 n [4]，$|a_n|<M(\sigma)e^{\lambda_n\sigma}$，取 $\sigma=\frac{1}{\lambda_n}k(c+\varepsilon)(1+o(1))$，$(n\to\infty)$，由引理1及上两式得

$$\log^+|a_n|<(c+\varepsilon)\log U(\lambda_n)+\log\left[\frac{1+o(1)}{k^k(c+\varepsilon)^k}\right]^{c+\varepsilon}$$
$$+k(c+\varepsilon)(1+o(1)),\quad(n\to\infty).$$

由此即得 $\varlimsup_{n\to\infty}(\log^+|a_n|/\log U(\lambda_n))\leqslant c$.

2°若 $\varlimsup_{n\to\infty}(\log^+|a_n|/\log U(\lambda_n))<c'<c$，则存在正整数 N，对于任何 $n>N$，$|a_n|<e^{c'\log U(\lambda_n)}$，从而存在 c_1 使 $|a_n|<c_1e^{c'\log U(\lambda_n)}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，对任意 $\sigma>0$ 及任意 $\varepsilon>0$，我们有：

$$M(\sigma)<c_1\sum_{n=0}^{\infty}\exp\Big[(c'+\varepsilon)\log U(\lambda_n)-\lambda_n\sigma\Big]\cdot\exp\Big[-\varepsilon\log U(\lambda_n)\Big]$$

$$\leqslant c_1\sup_{y>0}\Big\{\exp\Big[(c'+\varepsilon)\log U(y)-y\sigma\Big]\Big\}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\exp\Big[-\varepsilon\log U(\lambda_n)\Big]$$

因为(5)，所以，对以上 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，对任何 $n>N_1$，$\log U(\lambda_n)>n/(E+\varepsilon)$，从而 $\sum_{n=N_1+1}^{\infty}\exp\Big[-\varepsilon\log U(\lambda_n)\Big]<\sum_{n=N_1+1}^{\infty}\exp\Big(\frac{-\varepsilon}{E+\varepsilon}\Big)=A(\varepsilon)$，其中 $A(\varepsilon)$ 是与 ε 有关的常数，于是存在 $c_2>0$，使 $\sum_{n=0}^{\infty}\exp[-\varepsilon\log U(\lambda_n)]<c_2A(\varepsilon)$ 又取 $y=\frac{1}{\sigma}k(c'+\varepsilon)(1+o(1))$，$(y\to+\infty)$，由引理1，并结合以上不等式，我们有：

$$M(\sigma)<c_1\exp\Big\{(c'+\varepsilon)\log U\Big(\frac{1}{\sigma}\Big)+\log\Big[k^k(c+\varepsilon)^k$$
$$(1+0(1))\Big]^{c'+\varepsilon}-k(c'+\varepsilon)(1+0(1))\Big\}c_2A(\varepsilon),(\sigma\to0^+)$$

由此即得：$$\varlimsup_{\sigma\to0^+}\frac{\log^+M(\sigma)}{\log U(1/\sigma)}\leqslant c'<c$$

与题设矛盾。故当 $0<c<\infty$ 时，必要性得证。

充分性由以上证明不难推导出来。

定理 2　设对级数（1），（2）（3）及（6）成立，则

$\varliminf\limits_{\sigma\to0^+}\dfrac{\log^+M(\sigma)}{\log U(1/\sigma)}=c\Longleftrightarrow$ i) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log^+|a_n|}{\log U(\lambda_n)}=c$； ii) 存在递增正整数序列 $\{n_\nu\}$，使

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log^+|a_{n_\nu}|}{\log U(\lambda_{n_\nu})}=c,\quad \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log\lambda_{n_{\nu+1}}}{\log\lambda_{n_\nu}}=1\ (0<c\leqslant\infty)$$

证　充分性，当 $0<c<\infty$ 时，由 ii)，任给 $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<c$)，对充分大的 ν，$|a_{n_\nu}|>[U(\lambda_{n_\nu})]^{c-\varepsilon}$，取 σ_ν，使 $\lambda_{n_\nu}=\dfrac{1}{\sigma_\nu}k(c-\varepsilon)(1+o(1))$ ($\nu\to+\infty$)，由引理 1 得：

$$|a_{n_\nu}|e^{-\lambda_{n_\nu}\sigma_\nu}>\exp[A_1(\varepsilon)+(c-\varepsilon)\log U(1/\sigma_\nu)]\ (\nu\to+\infty),$$

其中 $A_1(\varepsilon)$ 是与 ε 有关的常数，当 $\sigma_{\nu+1}\leqslant\sigma\leqslant\sigma_\nu$ 时，显然有：

$$1=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log\lambda_{n_{\nu+1}}}{\log\lambda_{n_\nu}}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log(1/\sigma_{\nu+1})}{\log(1/\sigma_\nu)}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log U(1/\sigma)}{\log U(1/\sigma_\nu)}.$$

因此，对充分大的 ν，当 $\sigma_{\nu+1}\leqslant\sigma\leqslant\sigma_\nu$ 时，

$M(\sigma)\geqslant m(\sigma)\geqslant m(\sigma_\nu)>\exp[A_1(\varepsilon)+(c-\varepsilon)\log U(1/\sigma_\nu)]$,

其中，$m(\sigma)=\max\limits_{n>0}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}$ ($\sigma>0$)，由此即得：

$$\varliminf_{\sigma\to0^+}\frac{\log^+M(\sigma)}{\log U(1/\sigma)}\geqslant c,$$

于是，结合定理 1，当 $0<c<+\infty$ 时，充分性得证。

当 $c=+\infty$ 时，不难导出结果。

必要性定理 1 中已证，i) 成立，当 $0<c<\infty$ 时，假定 ii) 不成立，由引理 2，存在 $\beta\left(0<\beta<\dfrac{c}{2}\right)$ 及 $\gamma>0$，使对于任何 $Y>0$，存在满足条件 $\log y''_\nu\geqslant(1+\gamma)\log y'_\nu$，$y'_\nu>Y$ 的 y'_ν，y''_ν，$y''_\nu<y'_{\nu+1}$，使对任何满足 $y'_\nu\leqslant\lambda_n\leqslant y''_\nu$ 的 n，有 $|a_n|<[U(\lambda_n)]^{c-2\beta}$。于是，当 $y'_\nu\leqslant\lambda_n\leqslant y''_\nu$ 时，仿定理 1 必要性证明2°，我们有：

$$|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}<\exp[B_1(\beta)+(c-\beta)\log U(1/\sigma)]\cdot\exp[-\beta\log U(\lambda_n)],\ (n\to\infty)$$

其中 $B_1(\beta)$ 是与 β 有关的常数。

由于 i)，任给 $\varepsilon>0$，存在 $Y_0>0$，对任何 $\lambda_n\geqslant Y_0$，$|a_n|<\exp[(c+\varepsilon)\log U(\lambda_n)]$，取 σ'_ν，使 $(y'_\nu)^{1+\gamma/2}=\dfrac{1}{\sigma'_\nu}k(c+2\varepsilon)(1+o(1))$，($\nu\to+\infty$)，又取 $\varepsilon>0$，使 $(c+2\varepsilon)/(1+\gamma/2)<c-\eta$，($0<\eta<c$) 则当 $Y_0\leqslant\lambda_n\leqslant y'_\nu$ 时，(取 ν 充分大)，

$$|a_n|e^{-\lambda_n\sigma'_\nu}<c_1\exp\left\{B_2(\varepsilon)+\frac{c-\eta}{1+\gamma/2}\log\left[U\left(\frac{1}{\sigma_\nu}\right)^{\frac{1}{1+\gamma/2}}\right]\right\}$$

$$\cdot\exp\Big[-\varepsilon\log U(\lambda_n)\Big],$$

其中，$B_2(\varepsilon)$ 是与 ε 有关的常数，c_1 见定理 1 必要性证明2°。当 $\lambda_n\geqslant y''_\nu$ 时，取 $Y''=(y'_\nu)^{1+\gamma}<y''_\nu$，则

$$|a_n|e^{-\lambda_n\sigma'_\nu}<\exp[B_1(\varepsilon)+(c-\beta)\log U(1/\sigma)]\cdot\exp[-\varepsilon\log U(\lambda_n)].$$

因此，

$$M(\sigma_\nu')\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma_\nu'}=\sum_{0<\lambda_n<y_\nu'}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma_\nu'}$$

$$+\sum_{y_\nu'<\lambda_n<y_\nu''}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma_\nu'}+\sum_{\lambda_n>y_\nu''}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma_\nu'}<\max\Big\{c_1\exp\Big(B_2(\varepsilon)$$

$$+\frac{c-\eta}{1+\gamma/2}\log\Big[U\Big(\frac{1}{\sigma_\nu'}\Big)^{\frac{1}{1+\gamma/2}}\Big]\Big),\ \exp\Big[B_1(\beta)$$

$$+(c-\beta)\log U\Big(\frac{1}{\sigma_\nu'}\Big)\Big]\Big\}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\Big[-\varepsilon_1\log U(\lambda_n)\Big]$$

由此即得：

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log^+M(\sigma_\nu')}{\log U(1/\sigma_\nu')}\leqslant\max(c-\eta,\ c-\beta)<c$$

从而得到与题设矛盾的结果。于是，当 $0<c<\infty$ 时，充分性得证。

当 $c=+\infty$时，不难导出结果。

在定理 1 及定理 2 中取 $U(r)=r$，及 $U(r)=r^k(\log r)^k$ 立即可得到[2]中的结果及其他相应的结果。

参考文献

[1] 余家荣，数学学报，21 (1978)，97—118.

[2] 余家荣单复变函数论会议上的报告提要 (1979)，昆明.

[3] Valiron G., *Fonctions entiéres dórdre finie et fonctions méromophes*, Genève, L' Enseignement Mathématique (1960).

[4] Mandlbrojt, S. Séries de Dirichlet. Principes et methodes, Paris, Gauthier—Villars (1969).

The Proximate Zero Order (R) of the Functions Analytic in the Right—half plane

By Yu Jeou-man

Abstract

Let $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-\lambda_ns}$ $(s=\sigma+it)$, $0<\lambda_n\uparrow+\infty)$, where $\overline{\lim_{n\to\infty}}(n/\log U(\lambda_n))=E<+\infty$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n}{\lambda_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log|a_n|/\lambda_n)=0$.

$U(r)=r^{k(r)}$, $k(r)$ being a continuous and derivable function satisfing $\lim_{r\to\infty}k(r)=k(0<k<+\infty)$, $\lim_{r\to\infty}k'(r)r\log r=0$, then

1. $\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\log^+M(\sigma)}{\log U(1/\sigma)}=c\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^+|a_n|}{\log U(\lambda_n)}=c$ $(0\leqslant c\leqslant\infty)$,

2. $\lim_{\sigma\to0^+}\frac{\log^+M(\sigma)}{\log U(1/\sigma)}=c\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^+|a_n|}{\log U(\lambda_n)}=c$, and where exists an increasing sequence of positive integers $\{n_\nu\}$ such that

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log^+|a_{n_\nu}|}{\log U(\lambda_{n_\nu})}=c,\ \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\log\lambda_{n_{\nu+1}}}{\log\lambda_{n_\nu}}=1\ (0<c\leqslant\infty).$$

where $M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it)|$ $(\sigma>0)$.