第3卷 第1期 数学研究与评论 Vol.3 No.1
1983年 1月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Jan. 1983

拟序定向集最小共尾部分的结构

王尚志 李伯渝

（西北大学）

$(Q,\leqslant)$ 表示任意拟序定向集．对于 $A,B\subset Q$，若任意 $a\in A$，都有 $b\in B$，使 $a\leqslant b$，则记为 $A\leqslant B$。$cf(Q)=\min\{|A|:Q\leqslant A\}$ 称为 Q 的共尾数．Q 的最小共尾部分是指 Q 的一个共尾子集且它的势为 $cf(Q)$．本文讨论的中心问题是最小共尾部分的结构．作为它的特殊情况，我们还讨论了 Q 中有共尾链的充要条件．

$a,b\in Q$，$a<b$ 意指 $a\leqslant b$ 且 $a\not\geqslant b$．$A\subset Q$ 是一个链意指不同 $a,b\in A$，$a<b$ 和 $b<a$ 有一个且仅有一个成立．若存在 $a\in Q$，使 a 大于 A 中每个元素，则称 A 是可伸长的，否则就称为不可伸长的．

$$\mu(Q)=\min\{tp(A)\text{：}A\text{是}Q\text{中不可伸长的良序链}\}$$

称为 Q 的一级序数，它是一个正则基数。集合

$$D(Q)=\{A^1:A^1\text{是}Q\text{中不可伸长的良序链且}\ tp(A^1)=\mu(Q)\}$$

按照 Q 中子集的序关系 $\leqslant$ 构成拟序定向集，称为 Q 的一级定向集，记为 $\mathscr{D}_1(Q)$．所以 D 实际上是全体拟序定向集的类到其自身的一个映射．$\mathscr{D}_1(Q)$ 中元素 A^1 称为 Q 的一级链．它作为 Q 的子集称为 A^1 的 0 级原集，记为 $\underset{0}{\cup}A^1$．我们证明了，以下命题是等价的：

(1) Q 中有序型为 $\mu(Q)$ 的共尾链；(2) $\mathscr{D}_1(Q)$ 中有最大元，(3) $\mu_2(Q)\leqslant\mu_1(Q)$，这里 $\mu_1(Q)=\mu(Q)$，$\mu_2(Q)=\mu(\mathscr{D}_1(Q))$；(4) $\mu_2(Q)=1$；(5) $\mu_1(Q)=cf(Q)$．

若 $\mu_2(Q)\neq1$，对于自然数 $n\geqslant2$，定义 n 级定向集 $\mathscr{D}_n(Q)=D(\mathscr{D}_{n-1}(Q))$，$\mathscr{D}_n(Q)$ 中元素 A^n 称为 Q 的 n 级链，$\mu_n(Q)=\mu(\mathscr{D}_{n-1}(Q))$ 称为 n 级序数，$\underset{0}{\cup}A^n=\cup\{\underset{0}{\cup}A^{n-1}:A^{n-1}\in A^n\}$ 称为 A^n 的 0 级原集．我们证明了，若 $\mu_n(Q)\neq1$，那么下列命题是等价的：

(6) 存在 n 级链 A^n，使 $\underset{0}{\cup}A^n$ 是 Q 的最小共尾部分；(7) $\mathscr{D}_n(Q)$ 中存在最大元；(8) $\mu_{n+1}(Q)\leqslant\mu_n(Q)$；(9) $\mu_{n+1}(Q)=1$；(10) $\mu_n(Q)=cf(Q)$．

若对任意 n，$\mu_n(Q)\neq1$，那么

$$\mu_1(Q)<\mu_2(Q)<\cdots<\mu_n(Q)<\cdots.$$

这时我们定义 ω 级链 A^ω 是一个序列：$A^0,A^1,\cdots,A^n,\cdots$，这里 A^n 是 n 级链（A^0 是 Q 中元素，称为 0 级链），且 A^n 是 A^{n+1} 的首元．$\underset{0}{\cup}A^\omega=\cup\{\underset{0}{\cup}A^n:n\in\omega\}$ 称为 A^ω 的 0 级原集．$\mathscr{D}_\omega(Q)$ 是所有 ω 级链的集合，其中序关系 $\leqslant$ 定义为：$A^\omega\leqslant B^\omega$ 当且仅当 $\underset{0}{\cup}A^\omega\leqslant\underset{0}{\cup}B^\omega$．可以证明这时 $\mathscr{D}_\omega(Q)$ 仍是拟序定向集，称为 Q 的 ω 级定向集．$\mu_\omega(Q)=\sup\{\mu_n(Q):n\in\omega\}$ 称为 ω 级序数．我们证明了下列命题是等价的：

(11) 存在 ω 级链 A^ω，使 $\underset{0}{\cup}A^\omega$ 是 Q 的最小共尾部分；(12) $\mathscr{D}_\omega(Q)$ 中有最大元；(13) $\mu_{\omega+1}(Q)\leqslant\mu_\omega(Q)$，这里 $\mu_{\omega+1}(Q)=\mu(\mathscr{D}_\omega(Q))$；(14) $\mu_{\omega+1}(Q)=1$；(15) $\mu_\omega(Q)=cf(Q)$．

在一般情况下我们用超限归纳法．设 λ 是序数，对于每个 $\alpha\in\lambda$，α 级链 A^α，它的 0 级原集 $\underset{0}{\cup}A^\alpha$，$\alpha$ 级定向集 $\mathscr{D}_\alpha(Q)$，α 级序数 $\mu_\alpha(Q)$ 均已定义．若 $\lambda=\alpha+1$ 是后继序

数，定义 $\mathscr{D}_\lambda(Q)=D(\mathscr{D}_\alpha(Q))$ 为 λ 级定向集，$A^\lambda\in\mathscr{D}_\lambda(Q)$ 称为 Q 的 λ 级链。$\mu_\lambda(Q)=\mu(\mathscr{D}_\alpha(Q))$ 称为 λ 级序数。$\bigcup\limits_{\cdot} A^\lambda=\bigcup\{\bigcup\limits_{\cdot} A^\alpha; A^\alpha\in A^\lambda\}$ 称为 A^λ 的 0 级原集。

若 λ 是极限序数，定义 λ 级链 A^λ 是具有下列形式的超限列：

$$A^\lambda: A^0, A^1, \cdots, A^{\omega+1}, \cdots, A^{\alpha+1}, \cdots, \alpha\in\lambda.$$

这里的上标总是后继序数，当 α 是后继序数时，A^α 是 $A^{\alpha+1}$ 的首元；当 α 为极限序数时，α 级链 $A^0, A^1, \cdots, A^{\beta+1}, \cdots(\beta\in\alpha)$ 是 $A^{\alpha+1}$ 的首元。所有 λ 级链构成的集合记为 $\mathscr{D}_\lambda(Q)$。$\bigcup\limits_{\cdot} A^\lambda=\bigcup\{\bigcup\limits_{\cdot} A^{\alpha+1}; \alpha\in\lambda\}$ 称为 A^λ 的 0 级原集。$\mathscr{D}_\lambda(Q)$ 中顺序 $\leqslant$ 定义如下：$A^\lambda, B^\lambda\in\mathscr{D}_\lambda(Q)$，$A^\lambda\leqslant B^\lambda$ 当且仅当 $\bigcup\limits_{\cdot} A^\lambda\leqslant\bigcup\limits_{\cdot} B^\lambda$。可以证明，这时 $\mathscr{D}_\lambda(Q)$ 是一个拟序定向集，称为 Q 的 λ 级定向集。$\mu_\lambda(Q)=\sup\{\mu_\alpha(Q); \alpha\in\lambda\}$ 称为 Q 的 λ 级序数。

我们用超限归纳法证明了，在 $\mu_\lambda(Q)\neq 1$ 时下列命题是等价的：

(16) 存在 λ 级链 A^λ，使 $\bigcup\limits_{\cdot} A^\lambda$ 是 Q 中最小共尾部分；(17) $\mathscr{D}_\lambda(Q)$ 中有最大元；(18) $\mu_{\lambda+1}(Q)\leqslant\mu_\lambda(Q)$，这里 $\mu_{\lambda+1}(Q)=\mu(\mathscr{D}_\lambda(Q))$；(19) $\mu_{\lambda+1}(Q)=1$；(20) $\mu_\lambda(Q)=cf(Q)$。

最后，我们证明了本文的主要结果：

定理：对于任意拟序定向集 Q，存在一个序数 λ，使 $\mu_{\lambda+1}(Q)=1$，$\mu_1(Q)<\mu_2(Q)<\cdots<\mu_\lambda(Q)=cf(Q)$，而 Q 的任意共尾子集中都包含一个形如 $\bigcup\limits_{\cdot} A^\lambda$ 的最小共尾部分，这里 A^λ 是 Q 的 λ 级链。

作者对我们的老师王戌堂教授表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] S. Ginsburg and J. Isbell (1965), The Cafegory of cofinal types I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 116, 386—393.

[2] J. Isbell (1965), The Category of cofinal types II., *Trans.* Amer. Math. Soc., 116, 394—416.

[3] E. C. Milner and K. prikry (1980), The cofinality of a partially ordered set, U. of Calgary, Research paper No. 474 (To appear in *Journal. London Math. Soc.*)

[4] E. C. Milner and N. Sauer (1981), Remarks on the cofinality of a partially ordered set and a generalization of köning's lemma, *Discrete Math.* 35, 165—171.

[5] E. C. Milner and M. pouzet (1982), On the cofinality of partially ordered sets, I. Rival, (ed.), Ordered sets, 279—298, D. Reidel.

[6] M. pouzet (1980), Parties cofinales des ordres partiels ne contenant pas d'antichaines intinies, (to appear in *J. Londou Math. Soc.*).

On the Minimal Cofinal Subsets of a Directed Quasi Ordered Set

by Wang Shang-zhi & Li Bo-yu

(North West University)

ABSTRACT

It is shown that for any directed quasi ordered set $(Q, \leqslant)$, there is a minimal ordinal number λ such that every cofinal subset of Q contains a cofinal subset which is the o-th class original set of a λ-th class chain of Q. A special case of our results gives necessary and sufficient conditions for a direeted set to contain a cofinal chain.