

评 Pólya 的代表性著作《数学发现》*

郑毓信

(南京大学哲学系)

George Pólya 是已故的著名美籍匈牙利数学家,在他的一生中,除对分析数学与组合数学作出过杰出贡献外,还曾以数十年的时间潜心研究数学方法论和数学教学,他在这方面的对现代的数学研究和数学教学均有深远的影响.《数学发现》是 Pólya 在数学方法论领域内的代表性著作(全书共两卷,分别出版于62年及65年.现上卷已由内蒙古大学刘景麟等同志译成中文).无论从数学研究或数学教学的角度看,这一著作都是值得一读的.

一、一本成功的方法论教程

正如作者所说,《数学发现》事实上是一本方法论的教程(Ⅱ,P114),其目的在于帮助读者理解、学习解决问题的方法,并最终提高解决问题的能力(作者称之为“理论目的”. I, PVⅡ). Pólya 认为,和基本知识的传授相比,这种能力的培养是更为重要的.那么, Pólya 是怎样来实现这一目标的呢?

1. 由特殊到一般,由感性到理性的认识规律的成功运用.

《数学发现》由两个部份组成:在第一部份——‘模式’——中,作者着重对一些具体的方法论的模式(轨迹交会法、笛卡儿法[代数法]、递归法、迭加法)进行了介绍;然后,在这种特殊的研究的基础上,第二部份——‘向着一般方法’——又从更一般的角度对方法论的问题进行了分析.这样,从总体上说,作者就正确地运用了由特殊到一般的认识规律,使读者逐步加深对于数学方法的认识.

例如,作者在第1章里首先通过一些十分简单的几何作图问题引进了轨迹交会法;然后在第6章中,通过对数学问题的一般分析,轨迹交会法的实质得到了初步的揭示:这是对于问题中条件的分割;其后,借助于符号化,作者把轨迹交会法作了推广,得出了所谓的‘1-轨迹法’,至此,这一方法的应用范围就大大地扩展了.它不仅可以用于几何作图,也可用于其它的数学问题、直至数学以外的其它领域;最后,在对各个具体方法进行分析和推广的基础上,作者指出,轨迹法在实质上只是分割法的一种具体运用(另外,递归法也是分割法的一种运用,但那里不是对条件、而是对未知成份进行分割).这样,经过多次的抽象,读者对这一方法的认识和理解也就逐步得到了深化.

*本文经讨论班成员朱梧槿、袁相碗二位审阅并提出宝贵意见,特此致谢.

1982年3月15日收到.

另外,在《数学发现》一书中,任何一个抽象结论的得出,总是对于某一具体问题的(详尽)分析的结果。这些例题的选择与处理是十分出色的:它们不仅具有所必须的典型性,而且又都选自初等数学的范畴;然而,对于这些初等材料的处理却又反映了作者对于现代问题的经验(I, PV II)。这样,由感性到理性的认识规律在《数学发现》中也得到了成功的运用。

2. 启发性的研究

作为一部方法论的教程,还面临着一个重要的问题,就是如何调动读者的积极性(显然,对方法论的教程来说,这一问题是更为突出的,因为这种教程的最终目的就在于提高读者独立解决问题的能力)。作者对这一问题给予了高度的重视。作者指出:‘我力图向读者挑战,激发他们的好奇心和创造力,并提供面临各种不同的研究情况的充分可能性’(I, PV II);‘我努力应用一切可能的方法来促使读者自己去解决问题,并考虑其在解决过程中所应用的方法’。Pólya把这种研究称为启发性的研究(I, PV II)。

应当指出,作为启发式的一种重要手段,设问的艺术(作者指出,提问和建议可以使思想的产生[II, P10])在《数学发现》一书中得到了突出的应用。在每一问题的讨论中,作者往往不是直接地给出问题,而是通过适当的提问,让读者自己去对问题进行理解、归纳和表述;作者也不是直接地指出解决的方法,而是通过适当的设问或建议来进行启发,以让读者自己去找到所需的方法;而在问题得到解决以后,作者又通过适当的问题来促使读者去考虑从中可以得出哪些方法论上的教益。这样,读者就不是被动地在学习,而是自己在研究;而通过反复的实践,读者解决问题的能力也就不断得到了提高。在每一章后面作者都安排了一定数量的习题,这些习题也为读者提供了很好的研究园地。

另外,作者还不只是把设问的艺术应用于自己的教程,而是希望读者也能掌握这种艺术。作者认为,这是对思维的一种训练。围绕这一主题,作者在第12章中进行了专门的分析。显然,从方法论的角度看,这一讨论是十分有意义的。

一般说来,《数学发现》一书事实上为我们提供了一个启发式教学的典范。出于改进数学教学的考虑(和上述‘理论目的’相对照,作者把这列为《数学发现》的‘具体目的’),作者还专门从一般的角度对学习、教学和数学师资培养的问题进行了分析(第14章)。这不仅反映了作者对于教和学的辩证关系的深刻认识,而且也包含了许多在长期实践基础上总结出来的关于如何改进教学的具体建议。联想到我国数学教学及数学师资培养的现状,我们相信,《数学发现》对于改进我国的数学教学也是有益的。

二、一部具有相当深度的方法论专著

作为一部方法论的专著,《数学发现》的成功之处还在于它所达到的深度。这种深度不仅表现在对于各个具体模式的分析上(参见一, 1 的评论),而且更突出地表现于对解题过程中的思维活动的一般分析。通过这种分析,作者引出了思想方法上的普遍结论(这是第二部份的主要内容[第7章——第13章])。事实上,这种分析就是对于解题过程中的思维活动的辩证性的揭示,而思想方法上的普遍结论则正是辩证思维在数学领域内的具体运用。

1. 思维活动的辩证性的深刻揭示

西方有这样一种传统观念,就是认为数学发现的过程是一种涉及到数学家的心灵,从而不能作客观分析的事情。然而,Pólya 并没有为这种观念所束缚,在长期实践的基础上,他对数学发现过程中(更精确一点说,是解决问题过程中)的思维活动进行了理性分析。这种分析集中地表现于第11章。作者指出,这种思维活动可以借助于动员与组织、辩认与回忆、补充与重新组合、孤立与结合这样几组概念来进行描述(II, P66)。这里每组概念中的两个侧面是互相对立的,但它们又是互相补充、互相依赖的;另外,在各组概念之间也存在着互相补充、互相依赖的关系。如动员是由辩认和回忆所构成的,而补充与重新组合则是组织的重要手段等 (§11, 12)。这样,在《数学发现》一书中解决问题过程中的思维活动的辩证性就得到了深刻的揭示。

除对思维活动的分析以外,解题过程的辩证性还从其它方面得到了揭示。如对分析与综合的论述 (§8.1),对由内部出发及由外部出发的解题方法的分析 (§12.6) 等。

2. 辩证思维的具体运用

正确的分析必然导致正确的结论。就思想方法而言,这就是第13章中所讨论的发现规则:作者指出:我们应当在无法言语的感觉与明确陈述的理由之间进行平衡;应当力求经济但又不要加上任何限制;既要坚持、又要善变。另外,在方法的选择中,较容易的应先于较困难的,较熟悉的应先于不那么熟悉的;而就问题的处理而言,整体应先于局部,主要部份应先于其它部份,不那么远的部份应先于较远的部份;……。显然,这些法则正是辩证思维在方法论领域内的具体运用。

就辩证思维在数学中的具体运用而言,我们还可以看《数学发现》一书中对辅助问题和问题本身的变形问题的分析。作为解决问题的一种有效手段,辅助问题的分析在《数学发现》一书中占有一个突出的地位,作者不仅对此进行了一般分析(第9章),而且在很多章节中也都穿插了有关的论述。例如,作者指出 (§12.4),在解决问题的过程中,我们应当注意考虑有关的问题,考虑类似的问题,考虑较为一般或较为特殊的问题;……。由此,我们就不能以孤立的观点来看问题,而应看到事物(问题)的相互联系。另外,和辅助问题直接相关的是变形的问题。对此,作者指出 (§12.5),在解决问题的过程中,我们应当善于对未知成份进行变形,对已知数据或条件进行变形,或对整个问题进行变形,……。由此,我们就不应以静止的观点来看问题,而应看到问题的可变性。

当然,《数学发现》一书中对辩证思维的运用只是一种自发的运用;然而,由于这种辩证的认识是作者在自己的数学实践中总结出来的,它又渗透在数学和方法论的研究之中,因此这就不是空洞的教条,而是辩证法的生动的运用。《数学发现》一书的成功的重要原因也就在此。

三、不足之处*

*应当指出,就以下三个方面而言,徐利治教授的小册子《浅谈数学方法论》是一本较出色的著作。由于徐利治教授能够自觉地运用唯物辩证法的哲学思想来指导自己的研究,因此,对有关问题的分析就较为深刻(如关于类比与归纳法的实质的分析等),理论和实践的关系的处理也较为正确。(另外,《浅谈》的篇幅也精炼得多)。我们认为,参照《浅谈数学方法论》来阅读《数学发现》是一种可取的方法。

1. 突出重点与面面俱到。从总体上说,《数学发现》一书的论述是重点突出的——突出了解题的理解、学习与教学;然而,在有些章节、特别是在关于思维活动的分析中,有时也给人以一种力求面面俱到的感觉。例如,书中包括了一些没有分析的描述(如第10章关于决定性思想的出现的描述),这样就在一定程度上冲淡了主题。如果删除这些部份的话,全书可能会显得更加精炼。

2. 解决问题与发现问题。就数学发现而言,问题的发现与问题的解决具有同样的重要性(甚至更为重要);但是在《数学发现》一书中,虽然也对问题的发现(特别是类比与归纳法的应用)作了一定的分析(第15章),但从整体上说,对此是重视不够的。另外,对于怎样由实际问题去抽象出相应的数学问题,作者也有所忽视。

3. 自发与自觉。由于作者对辩证思维只是一种自发、而不是自觉的运用,因此也就势必有一定的局限之处;具体地说,在方法论(特别是思想方法)的分析中,有时就未能上升到应有的高度。

《数学杂志》征订征稿启事

《数学杂志》是数学综合性学术刊物,主要刊登创造性学术论文。读者对象:数学科研工作者、大学理工科教师和高年级学生。

《数学杂志》为季刊,于1981年下半年创刊,每期定价八角。全国各地邮局均可订阅,欢迎订阅。本编辑部还存有1981年(共两期)以及1982年(共四期)本刊,如需要者,请直接汇款我部。开户银行:武汉市武昌珞珈山办事处,帐号:89—048。《数学杂志》编辑部地址:武汉大学数学研究所。

《数学杂志》编辑部
