第3卷 第3期
1983年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.3
July, 1983

人口问题中的妇女临界生育率*

冯德兴 朱广田

（中国科学院系统科学所）

本文通过对连续人口模型半离散化，研究了人口发展过程的稳定性和渐近性质，给出了妇女临界生育率，它与[2]中离散情况下临界生育率公式相一致。证明了当比生育率不超过临界生育率时人口状态渐近稳定，而当超过临界生育率时人口指数发散。

在现代，人口问题已成为人们十分关心的问题。近年来我国已有作者从事人口发展的理论研究（例如见[1—4]）。描述人口发展过程一般采用两种数学模型，即连续模型和离散模型(见[1])。所谓连续模型，就是说一个社会(国家或地区)中人口发展过程用下列一阶偏微分方程描述：

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial r}=-\mu(r,t)p+f(r,t),\quad t\geqslant 0,\quad 0\leqslant r\leqslant m; \tag{1}$$

$$p(r,0)=p_0(r),\quad p(0,t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr;$$

其中 t 表示时间，r 表示年龄，m是社会人口中能活的最大年龄，$p(r,t)$表示社会人口的年龄分布密度，$\beta(t)$表示 t 时刻育龄妇女平均生育率(或比生育率)，$[r_1, r_2]$表示妇女育龄区间，$k(r, t)$表示时间 t 时社会人口中 r 岁妇女人数与同龄人口总数之比，$h(r, t)$为育龄妇女生育模式，要求满足规格化条件

$$\int_{r_1}^{r_2}h(r,t)dr=1; \tag{2}$$

$f(r, t)$表示移民率，$\mu(r, t)$表示社会死亡率函数。从这个连续模型出发可以导出离散模型。在[2]中讨论了人口系统的稳定性，并给出了妇女临界生育率。

在[4]中利用正算子理论对连续模型下妇女临界生育率从理论上给予说明。本文中我们将从连续模型(1)出发推导出时间连续按龄离散的所谓半离散人口发展模型，讨论相应系统解的稳定性和渐近性质，并给出妇女临界生育率，它与[2]中在离散模型下提出的临界生育率公式是一致的。

首先我们对方程(1)按龄离散化。为此我们令 $x_i(t)=\int_i^{i+1}p(r, t)dr$，它表示 t 时刻年满 i 周岁但不足 $i+1$ 周岁的社会人口总数，特别 $x_0(t)$ 表示 t 时刻存留的不满周岁的婴

*1981年6月29日收到。推荐者 $\boxed{\text{关肇直}}$ (系统所)。

儿总数。

于是对方程（1）按龄离散化，不难得到

$$\dot{x}_i(t)=-(1+\eta_i(t))x_i(t)+x_{i-1}(t)+f_i(t),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,m. \tag{3}$$

其中 $\int_i^{i+1}\mu(r,t)p(r,t)dr=\eta_i(t)x_i(t)$，$f_i(t)=\int_i^{i+1}f(r,t)dr$。考虑到婴儿死亡率 $\mu_{00}(t)$，并对（1）中边界条件也按龄离散化，得（见[1]）

$$x_0(t)=(1-\mu_{00}(t))\beta(t)\sum_{i=r_1}^{r_2}k_i(t)h_i(t)x_i(t). \tag{4}$$

今后为方便起见，规定在区间 $[r_1,r_2]$ 之外的 i，$h_i(t)=0$。为了把方程（3）和（4）改写成矢量形式，我们令

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_m(t)\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_m(t)\end{pmatrix}.$$

$$A(t)=\begin{pmatrix}-(1+\eta_1(t)) & 0 & & 0\\ 1 & -(1+\eta_2(t)) & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & -(1+\eta_m(t))\end{pmatrix},$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}b_1(t) & b_2(t) & \cdots & b_m(t)\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$b_i(t)=(1-\mu_{00}(t))k_i(t)h_i(t),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m. \tag{5}$$

自然仅当 $i\in[r_1,\ r_2]$ 时 $b_i(t)\neq 0$。于是方程（3）和（4）可写成

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A(t)\mathbf{x}(t)+\beta(t)B(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t) \tag{6}$$

这就是时间连续按龄离散的所谓半离散人口发展方程。注意，如果再对方程（6）按时间离散化，则得标准的 **Leslie** 离散人口模型（见[1]）。

事实上，对方程（3）按时间离散化，取 $\Delta t=1$，得

$$x_i(t)-x_i(t-1)=-(1+\eta_i(t))x_i(t)+x_{i-1}(t)+f_i(t), \tag{7}$$

但比较这里的近似过程与[1]中的近似过程不难发现 $x_i(t)-x_{i-1}(t-1)=2x_i(t)-x_i(t-1)-x_{i-1}(t)$。从而（7）可以写成

$$x_i(t)-x_{i-1}(t-1)=-\eta_i(t)x_i(t)+f_i(t), \tag{8}$$

由此可见在离散情况下，$\eta_i(t)$ 正是后向死亡率，它与前向死亡率 $\mu_i(t)$ 之间的关系是（见[1]）

$$(1+\eta_i(t))^{-1}=1-\mu_{i-1}(t), \tag{9}$$

利用（9），式（8）可改写成

$$x_i(t)=(1-\mu_{i-1}(t))x_{i-1}(t-1)+f_i(t). \tag{10}$$

这正是熟知的离散人口模型。

今后我们将看到，采用半离散模型（6）能得到离散模型下的结果。从而半离散模型（6）为我们近似地研究连续人口模型（1）提供了又一种近似的方法。这正是讨论半离散模型的意义所在。

现在我们来讨论半离散模型（6）。假定（6）中一切系数与时间 t 无关，这相当于我们所考察的社会是一个相对安定的社会。这时（6）可写成

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\beta B\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t). \tag{11}$$

为了讨论稳定性，我们略去移民项 $\mathbf{f}(t)$ 的影响，也就是说，我们考察齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\beta B\mathbf{x}(t), \tag{12}$$

式中 A，B 为常值 $m\times m$ 阵

$$A=\begin{pmatrix} -(1+\eta_1) & & & 0 \\ 1 & -(1+\eta_2) & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & -(1+\eta_m) \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

首先容易算出阵 $A+\beta B$ 的特征多项式

$$\Delta(\lambda)\triangleq\det(\lambda-(A+\beta B))=\prod_{k=1}^{m}(\lambda+1+\eta_k)-[b_m+b_{m-1}(\lambda+\eta_m+1)$$
$$+\cdots+b_1(\lambda+\eta_2+1)\cdots(\lambda+1+\eta_m)].$$

令

$$\beta_0=\frac{(1+\eta_1)(1+\eta_2)\cdots(1+\eta_m)}{b_m+b_{m-1}(1+\eta_m)+\cdots+b_1(1+\eta_2)+\cdots+(1+\eta_m)}, \tag{13}$$

数 β_0 叫做妇女临界生育率。注意到前向死亡率 μ_i 和后向死亡率 η_i 之间的关系（9）以及这里的 b_i 的定义，从（13）看出我们这里定义的妇女临界生育率与[1]中离散模型下临界生育率的定义完全一致。

引理 1　0是 $A+\beta_0B$ 的代数单本征值。

证　依 β_0 的定义，显然 $\det(A+\beta_0B)=0$，故0是 $A+\beta_0B$ 的本征值。现在我们先证0是 $A+\beta_0B$ 的几何单本征值。事实上，设 $\mathbf{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_m)^T$ 为相应的本征矢，则

$$b_1\xi_1+\cdots+b_m\xi_m=(1+\eta_1)\xi_1,\ \xi_1=(1+\eta_2)\xi_2,\ \cdots,\ \xi_{m-1}=(1+\eta_m)\xi_m.$$

显然 $\xi_m\neq0$（否则 $\mathbf{x}=0$！），而别的座标由 ξ_m 一意决定，这表明0的几何重数是1．特别取 $\xi_m=1$，则本征矢取

$$\widetilde{\mathbf{x}}=(\nu_2\cdots\nu_m,\ \nu_3\cdots\nu_m,\ \cdots,\ \nu_m,\ 1)^{\tau}, \tag{14}$$

其中 $\nu_k=1+\eta_k$, $k=1, 2, \cdots, m$.

注意，如果0的代数重数大于1，则必有 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m$ 使 $(A+\beta_0 B)\mathbf{z}=\widetilde{\mathbf{x}}$. 为此必须且只须 $\widetilde{\mathbf{x}}$ 与 $(A+\beta_0 B)^*$ 的零空间 $N(A+\beta_0 B)^*$ 直交. 但不难看出，$(A+\beta_0 B)^*$ 的零空间 $N(A+\beta_0 B)^*$ 由元

$$\widetilde{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix} 1 \\ b_2\nu_2^{-1}+b_3\nu_2^{-1}\nu_3^{-1}+\cdots+b_m\nu_2^{-1}\cdots\nu_m^{-1} \\ \vdots \\ b_m\nu_m^{-1} \end{pmatrix}$$

张成. 显然 $\langle\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}}\rangle\neq 0$, 这里 $\langle\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}}\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的欧氏内积. 因此 $(A+\beta_0 B)\mathbf{z}=\widetilde{\mathbf{x}}$ 无解，从而引理得证.

引理 2 当 $\beta>\beta_0$ 时，$A+\beta B$ 恰有一个正本征值，且此本征值的代数重数等于1.

证 事实上，特征多项式

$$\Delta(\lambda)=(\lambda+\nu_1)\cdots(\lambda+\nu_m)[1-\beta(b_1(\lambda+\nu_1)^{-1} +\cdots+b_m(\lambda+\nu_1)^{-1}+\cdots+(\lambda+\nu_m)^{-1})]$$

为 $\lambda\geqslant 0$ 的严格递增函数. 另一方面，当 $\beta>\beta_0$ 时，$\Delta(0)=\nu_1\cdots\nu_m(1-\beta\beta_0^{-1})<0$, 且当 $\lambda\to+\infty$ 时 $\Delta(\lambda)\to+\infty$. 从而依数学分析中连续函数的基本性质知 $\Delta(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 中恰有一根 $\lambda_1(\beta)>0$. 至于证明 $\lambda_1(\beta)$ 是 $A+\beta B$ 的代数单本征值，证明与引理1雷同，从略.

引理 3 设 $0<\beta<\beta_0$, 则 $A+\beta B$ 的每个本征值 λ 都有 $\mathrm{Re}\lambda<0$; 而 $A+\beta_0 B$ 的每个非零本征值 λ 也有 $\mathrm{Re}\lambda<0$.

证 1) 设 $0<\beta<\beta_0$, $\lambda=\mu+\sigma i$ 为 $A+\beta B$ 的本征值，则 β 必等于

$$\beta=\frac{(\lambda+\nu_1)(\lambda+\nu_2)\cdots(\lambda+\nu_m)}{b_m+b_{m-1}(\lambda+\nu_m)+\cdots+b_1(\lambda+\nu_2)+\cdots+(\lambda+\nu_m)}.$$

令
$$\lambda+\nu_k=\rho_k e^{i\varphi_k},\quad \rho_k=\sqrt{(\nu_k+\mu)^2+\sigma^2},\quad 0\leqslant\varphi_k<\frac{\pi}{2},$$

这里不妨设 $\sigma\geqslant 0$. 于是 β 可表示成

$$\beta=\frac{1}{b_m\rho_1^{-1}\cdots\rho_m^{-1}e^{-i(\varphi_1+\cdots+\varphi_m)}+b_{m-1}\rho_1^{-1}\cdots\rho_{m-1}^{-1}e^{-i(\varphi_1+\cdots+\varphi_{m-1})}+b_1\rho_1^{-1}e^{-i\varphi_1}},$$

或者通过取实部可知

$$\beta=1/[b_1\rho_1^{-1}\cos\varphi_1+b_2\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\cos(\varphi_1+\varphi_2)+b_3\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\rho_3^{-1}\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) +\cdots+b_m\rho_1^{-1}\cdots\rho_m^{-1}\cos(\varphi_1+\cdots+\varphi_m)].$$

如果 $\mu>0$ 或者 $\mu=0$, $\sigma>0$ ($\mu=\sigma=0$ 是不可能的！)，则必

$$\beta>\frac{1}{b_1\nu_1^{-1}+b_2\nu_1^{-1}\nu_2^{-1}+\cdots+b_m\nu_1^{-1}\cdots\nu_m^{-1}}=\beta_0,$$

这与假设 $\beta<\beta_0$ 矛盾. 因此只能 $\mu<0$, 即 $\mathrm{Re}\lambda<0$.

2) 当 $\beta=\beta_0$ 时，只须证明 $A+\beta_0 B$ 无纯虚本征值，事实上，如果 $i\sigma(\sigma>0)$ 为其本征

值，则

$$\beta_0=\frac{1}{b_1\rho_1^{-1}\cos\varphi_1+b_2\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cdots+b_m\rho_1^{-1}\cdots\rho_m^{-1}\cos(\varphi_1+\cdots+\varphi_m)},$$

式中 $\rho_k=\sqrt{\nu_k^2+\sigma^2}$，由此 $\beta_0>\beta_0$ 同样得出矛盾。证完。

引理4 设 $\beta>\beta_0$，$\lambda_0=\lambda_1(\beta)$ 为 $A+\beta B$ 的唯一的正本征值，那么 $A+\beta B$ 的其余本征值 λ 必有 $\mathrm{Re}\lambda<\lambda_0$。

证 设 $\lambda=\mu+i\sigma$ 为 $A+\beta B$ 的本征值，$\mu>\lambda_0$ 或者 $\mu=\lambda_0$ 但 $\sigma\neq0$，同样我们令

$$\nu_k+\lambda=\rho_k e^{i\varphi_k},\quad \rho_k=\sqrt{(\nu_k+\mu)^2+\sigma^2},\qquad 0\leqslant\varphi_k<\frac{\pi}{2},$$

于是同引理3一样，有

$$\beta=\frac{1}{b^1\rho_1^{-1}\cos\varphi_1+b_2\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cdots+b_m\rho_1^{-1}\cdots\rho_m^{-1}\cos(\varphi_1+\cdots+\varphi_m)}$$

$$>\frac{1}{b_1(\nu_1+\lambda_0)^{-1}+b_2(\nu_1+\lambda_0)^{-1}(\nu_2+\lambda)^{-1}+\cdots+b_m(\nu_1+\lambda_0)^{-1}\cdots(\nu_m+\lambda_0)^{-1}}=\beta,$$

得出矛盾。故只能 $\mu<\lambda_0$，即 $\mathrm{Re}\lambda<\lambda_0$，证完。

从上面的引理1，2，和3立即可得

定理1 当 $\beta>\beta_0$ 时系统（12）不稳定；而当 $0<\beta<\beta_0$ 时，系统（12）渐近稳定，即对任意初值 $\mathbf{x}(0)$，系统（12）的解 $\mathbf{x}(t)$ 指数衰减到零（随 t 趋于无穷）。

现在我们设 $\mathbf{d}_1,\cdots,\mathbf{d}_m$ 表示 $A+\beta_0B$ 的广义本征矢全体，$\mathbf{d}$ 为对应于0本征值的本征矢，而 $\mathbf{c}_1,\cdots,\mathbf{c}_m$ 表示 $(A+\beta_0B)^*$ 的相应的广义本征矢，满足 $\langle\mathbf{c}_j,\mathbf{d}_k\rangle=\delta_{jk}$，$j,k=1,2,\cdots,m$。特别 $\mathbf{c}_1$ 表示 $(A+\beta_0B)^*$ 的对应于0本征值的本征矢。那么熟知

$$\begin{pmatrix}\mathbf{c}_1^*\\ \mathbf{c}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{c}_m^*\end{pmatrix}(A+\beta_0B)(\mathbf{d}_1\cdots\mathbf{d}_m)=T,$$

其中 T 为 $A+\beta_0B$ 的 Jordan 标准形。从引理3不难看出 $\mathbf{x}(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}e^{t(A+\beta_0B)}\mathbf{x}(0)$

$$=(\mathbf{d}_1\cdots\mathbf{d}_m)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{c}_1^*\\ \mathbf{c}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{c}_m^*\end{pmatrix}\mathbf{x}(0)$$

$$=(\mathbf{d}_1\ 0\cdots0)\begin{pmatrix}\langle\mathbf{x}(0),\ \mathbf{c}_1\rangle\\ \langle\mathbf{x}(0),\ \mathbf{c}_2\rangle\\ \vdots\\ \langle\mathbf{x}(0),\ \mathbf{c}_m\rangle\end{pmatrix}=\langle\mathbf{x}(0),\ \mathbf{c}_1\rangle\mathbf{d}_1.$$

于是利用引理1证明（14）和（15）的两个本征矢 $\tilde{\mathbf{x}}$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}$，可得

定理2 当 $\beta=\beta_0$ 时，社会总人口 $N(t)=\sum\limits_{k=0}^{m}x_k(t)$ 当 $t\to\infty$ 时的稳态值等于

$$N(\infty)=\frac{\langle \mathbf{x}(0),\ \tilde{\mathbf{y}}\rangle}{\langle \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{y}}\rangle}\sum_{k=1}^{m}(1+\beta_0 b_k)\tilde{\mathbf{x}}_k,$$

其中

$$\tilde{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} \nu_2\nu_3\cdots\nu_m \\ \nu_3\nu_4\cdots\nu_m \\ \vdots \\ \nu_m \\ 1 \end{pmatrix},\qquad \tilde{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix} 1 \\ b_2\nu_2^{-1}+b_3\nu_2^{-1}\nu_3^{-1}+\cdots+b_m\nu_2^{-1}\cdots\nu_m^{-1} \\ \vdots \\ b_{m-1}\nu_{m-1}^{-1}+b_m\nu_{m-1}^{-1}\nu_m^{-1} \\ b_m\nu_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

证　只须注意依（4），$x_0(\infty)=\beta\sum_{k=1}^{m}b_k x_k(\infty)=\frac{\langle \mathbf{x}(0),\ \tilde{\mathbf{y}}\rangle}{\langle \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{y}}\rangle}\sum_{k=1}^{m}\beta_0 b_k\tilde{\mathbf{x}}_k$.

最后我们在$\beta>\beta_0$时给出社会总人口的渐近公式.

定理3　设$\beta>\beta_0$，$\lambda_0=\lambda_1(\beta)$是$A+\beta B$的唯一的正本征值，那么社会总人口$N(t)=\sum_{k=1}^{m}x_k(t)$渐近于

$$N(t)\sim\frac{\langle \mathbf{x}(0),\ \tilde{\mathbf{y}}\rangle}{\langle \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{y}}\rangle}e^{\lambda_0 t}\sum_{k=1}^{m}(1+\beta b_k)\tilde{x}_k\qquad(t\to\infty)$$

证　用类似于证明定理2的方法，只须注意依据引理4，λ_0是$A+\beta B$的单本征值，且其别的本征值都$\mathrm{Re}\lambda<\lambda_0$.

参　考　文　献

[1] 宋健，自动化学报，6：4(1980)，24-29.

[2] 宋健、于景元，自动化学报，7：1(1981)，1-12.

[3] 宋健、于景元、李广元，中国科学，第9期(1980).

[4] 宋健、于景元、胡顺菊、朱广田，人口问题中的临界生育率理论，待发表.

[5] Langhar, H. L., General Population Theory in the Age-Time Continuum, *J. of the Franklin Inst.* 293(1972) 3, 199-214.

Critical Fertility Rate of Women in Population Problem

Feng Dexing　　*Zhu Guangtian*

Abstract

In this paper the stability and the asymptotic properties of the population evolution process are considered through the semi-discretization of the continuous population model. We have given the formula of the critical fertility rate of women, and we have shown that the population state is asympteticaly stable if the ratio fertility rate is not bigger than the critical fertility rate, and otherwise this state exponentially diverges. Finally, we have obtained the explicit expression of the stationary population state with the critical fertility rate.