第3卷 第3期 1983年7月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.3 July, 1983

关于距离空间的某些推广*

高智民

（西北大学）

一 $\aleph(3)$-空间的性质

我们曾证得：若空间X是$\aleph(1)$、$\aleph(2)$的，则对每一开集U，可指定闭集列$\{B_n(U)\}_{n=1}^{\infty}$，使得对任一紧集$K\subset U$，$\exists B_1(U),\cdots,B_n(U)$，使$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i(U)$且 a) $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n(U)=U$, b)若开集$U\subset$开集$V$，则$B_n(U)\subset B_n(V)$（也可不要求$B_n(U)$是闭集，但此时应加条件$\overline{B_n(U)}\subset U$，对每一$n$）.

于是我们导入定义如下：

定义 1.1 正则（本文的正则即T_3）的拓扑空间X若满足上述条件，它是$\aleph(3)$-的.

定理 1.2 $\aleph(3)$-空间具有遗传性.

定理 1.3 若$X=A_1\cup A_2$，其中A_1,A_2闭且是$\aleph(3)$，则X亦然.

定理 1.4 若X正则，仿紧且是局部的$\aleph(3)$-空间，则X是$\aleph(3)$-空间.

证明 对$\forall x\in X$，$\exists$邻域$W(x)$，$W(x)$是$\aleph(3)$-空间，由条件可设$\{U_\alpha:\alpha\in A\}$是$\{W(x):x\in X\}$的闭局部有限加细，U_α是$\aleph(3)$-空间.

任给X的开集U，$U'_\alpha=U\cap U_\alpha$在U_α中开，则得$\{B_n^\alpha(U'_\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$. 令$B_n(U)=\bigcup\{B_n^\alpha(U'_\alpha):\alpha\in A\}$，则

$$\overline{B_n(U)}=\bigcup\{(B_n^\alpha(U'_\alpha))^-:\alpha\in A\}\subset\bigcup\{U'_\alpha:\alpha\in A\}=U,$$

且
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n(U)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup\{B_n^\alpha(U'_\alpha):\alpha\in A\})=\bigcup_{\alpha\in A}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{B_n^\alpha(U'_\alpha)\})=\bigcup_{\alpha\in A}U'_\alpha=U.$$

设紧集$K\subset$开集U，则$K\cap U_\alpha$在U_α中紧，由$\{U_\alpha:\alpha\in A\}$的局部有限性，知有限个U_α可复盖K，记$K_\alpha=K\cap U_\alpha$，知$K\subset\bigcup_{i=1}^{m}B_i(U)\subset U$. ▮

推论 1.5 正则空间X若是闭的局部有限的$\aleph(3)$空间之和，则X是$\aleph(3)$-空间.

定理 1.6 $\aleph(3)$-空间的开集是F_σ-集.

在进一步讨论$\aleph(3)$-空间之前，我们给出后面要用到的$\aleph(3)$-空间的等价定义.

定义 1.7 设$\mathscr{B}$是X的子集的序对族，$\forall B=(B_1,B_2)\in\mathscr{B}$，成立$B_1\subset B_2$. $\mathscr{B}$叫X的对伪基，是指若紧集$K\subset U$（开集），则$\exists B^1,\cdots,B^n$，使得

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_1^i\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_2^i\subset U$$

* 1981年7月14日收到.

$\mathscr{B}$叫胶垫，若对 $\forall\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$，成立

$$(\bigcup\{B_1:B=(B_1,B_2)\in\mathscr{B}'\})^-\subset\bigcup\{B_2:B\in\mathscr{B}'\}$$

$\mathscr{B}$叫σ-胶垫，若$\mathscr{B}$是可数多胶垫之并。$\mathscr{B}$叫X的σ-胶垫对伪基的定义自明。

定理 1.8 正则的X是$\aleph(3)$-的，当且仅当X有σ-胶垫对伪基。

证明从略。

引理 1.9 胶垫$\mathscr{B}$的有限和、有限交仍是胶垫。

证明略。所谓$\mathscr{B}$的有限和（交）指$\mathscr{B}$中有限个元$B=(B_1,B_2)$的第一元（B_1）之和（交）与对应的第二元（B_2）之和（交）所形成的子集序对族。

定理 1.10 可数个$\aleph(3)$-空间之积仍是$\aleph(3)$-空间。

证明 对坐标空间X_n，其σ-胶垫对伪基是$\mathscr{B}^n=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\mathscr{B}^n_m$。对每一$B\in\mathscr{B}^n$，$B=(B_1,B_2)$，令

$$P_n^{-1}[B]=(P_n^{-1}[B_1],\ P_n^{-1}[B_2])$$

其中P_n是X到X_n的投影函数，则

$$P_n^{-1}[\mathscr{B}^n_m]=\{P_n^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}^n_m\}$$

仍是胶垫，事实上，对$P_n^{-1}[\mathscr{B}^{n\prime}_m]\subset P_n^{-1}[\mathscr{B}^n_m]$有

$$\begin{aligned}&(\bigcup\{P_n^{-1}[B_1]:P_n^{-1}[B]=(P_n^{-1}[B_1],P_n^{-1}[B_2])\in P_n^{-1}[\mathscr{B}^{n\prime}_m]\})^-\\ \subset\ &P_n^{-1}[(\bigcup\{B_1:B=(B_1,B_2)\in\mathscr{B}^{n\prime}_m\})^-]\subset P_n^{-1}[(\bigcup\{B_2:B=(B_1,B_2)\in\mathscr{B}^{n\prime}_m\})]\\ =\ &\bigcup\{P_n^{-1}[B_2]:P_n^{-1}[B]\in P_n^{-1}[\mathscr{B}^{n\prime}_m]\}.\end{aligned}$$

令 $\mathscr{B}=\bigcup\{P_n^{-1}[\mathscr{B}^n_m]:m,n\in\omega\}$，则$\mathscr{B}$之有限交（并）仍是$\sigma$-胶垫，仍记作$\mathscr{B}$。下面证$\mathscr{B}$是$X$的对伪基。

对X中的紧集$C\subset$开集U，对$\forall x\in C$，$\exists X$的拓扑基中元

$$W_x=P_{n_1}^{-1}[U_{n_1}]\cap\cdots\cap P_{n_k}^{-1}[U_{n_k}],$$

其中U_{n_k}在X_{n_k}中开，且$\exists x$的闭邻域F_x，使

$$x\in F_x\subset W_x\subset U.$$

由于C紧，有限个F_x已盖住C，即

$$C\subset\bigcup\{F_x:x\in A\}\subset\bigcup\{W_x:x\in A\}\subset U,$$

其中$A\subset C$是有限集，对$\forall x\in A$，$F_x\cap C$是紧集，它在投影P_{n_i}（$1\leqslant i\leqslant K$）F的象$P_{n_i}[F_x\cap C]\subset U_{n_i}$且是紧集，故$\exists B_{n_i}\in\mathscr{B}^{n_i}$（为书写方便，我们利用引理1.9）使得$P_{n_i}[F_x\cap C]\subset B^{n_i}_1\subset B^{n_i}_2\subset U_{n_i}$。

于是 $$F_x\cap C\subset P_{n_i}^{-1}[B^{n_i}_1]\subset P_{n_i}^{-1}[B^{n_i}_2]\subset P_{n_i}^{-1}[U_{n_i}],$$

进而 $$F_x\cap C\subset P_{n_1}^{-1}[B^{n_1}_1]\cap\cdots\cap P_{n_k}^{-1}[B^{n_k}_1]\subset P_{n_1}^{-1}[B^{n_1}_2]\cap\cdots\cap P_{n_k}^{-1}[B^{n_k}_2]\subset U.$$

令 $$B^x=(P_{n_1}^{-1}[B^{n_1}_1]\cap\cdots\cap P_{n_k}^{-1}[B^{n_k}_1],\ P_{n_1}^{-1}[B^{n_1}_2]\cap\cdots\cap P_{n_k}^{-1}[B^{n_k}_2]),$$

则$B^x\in\mathscr{B}$。再关于$x\in A$求并，得

$$C\subset\bigcup\{B^x_1:B^x=(B^x_1,B^x_2):x\in A\}\subset\bigcup\{B^x_2:B^x=(B^x_1,B^x_2):x\in A\}\subset U.$$

而$(\bigcup\limits_{x\in A}B^x_1,\bigcup\limits_{x\in A}B^x_2)$仍是$\mathscr{B}$中元，故$\mathscr{B}$是$X$的对伪基。 ∎

二 $\aleph(3)$-空间的距离化

由定义知，M_2-空间（M_2 与分层空间等价）是$\aleph(3)$-空间，所以下面的一些度量化定理都是 Ceder[1]中的结果的推广.

Ceder 曾证得：局部紧的 M_2-空间可以完全度量化，本文有推广定理.

定理 2.1 局部紧的$\aleph(3)$-空间X可完全距离化.

证明 对$\forall$开集 $U\subset X$，$\exists$如定义 1,1 的集列 $\{B_n(U)\}_{n=1}^{\infty}$，此中不妨设，$B_n(U)\subset B_{n+1}(U)$. 下面证 $U=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n^0(U)$（$B_n^0(U)$ 是 $B_n(U)$ 的内部）.

不然. 存在 $y\in U-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n^0(U)$，于是有 y 的闭邻域 V_y，使 $V_y\subset U$. 设 K_y 是 y 的紧邻域，于是 $V_y\cap K_y$ 是 y 的紧邻域且 $V_y\cap K_y\subset U$，所以存在 $B_n(U)$，满足 $V_y\cap K_y\subset B_n(U)$，而 $y\in B_n^0(U)$，与 y 之定义矛盾. 故X是 M_2-的. ∎

定义2.2 $x\in X$ 是 r-点. 若 x 有邻域列$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$使当$x_n\in U_n$时，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset$某一紧集 K之中. 若 $\forall x\in X$ 是 r-点，X叫 r-空间.

由定义，正则的满足第一可数公理的空间都是 r-空间.

在[1]中，Ceder 曾证得：空间X可距离化，当且仅当X是 M_2-空间，且有 σ-胶垫对基 $\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$，使得 $\mathscr{B}_n$ 点有限（即 $\forall x\in X$，仅属 $\mathscr{B}_n$ 中有限个元的第二元）. 在此定理中，令

$$U_n(x)=\bigcap\{B_1:x\in B_1,B=(B_1,B_2)\in\mathscr{B}_n\},$$

则由 $\mathscr{B}_n$ 的点有限性，知$\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是 x 的局部邻域基，即空间是第一可数的.

我们推广 Ceder 的这一结果为

定理 2.3 X可距离化当且仅当X是 r-空间，$\aleph(3)$-空间，且有 σ-胶垫对伪基 $\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$，$\mathscr{B}_n$ 点有限.(限于篇幅，证明略).

对于 Ceder 的上述结论，我们还有进一步的推广如下：

定义 2.4 $A\subset X$，X的下降集列$\{A_i:i\in\omega\}$叫A-列，若$\{x_i\in A_i:i\in\omega\}$在$A$中有聚点.([3]).

定义2.5 X叫可数双 K-式空间，若$\{F_i:i\in\omega\}$是聚集于 $p\in X$ 的下降列，则$\exists$聚集于 p 的 A-列$\{A_i:i\in\omega\}$使得$A_i\subset F_i$，且A是紧集.（F_i 聚集于 p，是指 $p\in\bar{F}_i$ 对每一i 成立）.

定理 2.6 X可度量化，当且仅当X是可数双 K-式的$\aleph(3)$-空间，且有 σ-胶垫对伪基 $\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$，使得 $\mathscr{B}_n$ 点有限.

证明 仅证在此条件下，空间是第一可数的，然后利用定理 2.3.

设$\mathscr{B}$是X的 σ-胶垫对伪基，且 $\mathscr{B}_n$ 点有限，对 $\forall x\in X$，$\mathscr{B}^*=\{B_1:B=(B_1,B_2)\in\mathscr{B},\ x\in B_1\}$是可数集，$\mathscr{B}^*$ 的有限并之族仍可数，故用 $\mathscr{B}^*$ 表示. 设 $x\in$开集U，令

$$\mathscr{B}^{**}=\{B_1\in\mathscr{B}^*:x\in B_1\subset U\},$$

则 $\mathscr{B}^{**}$ 关于有限并是封闭的且可数. 设其为

$\mathscr{B}^{**}=\{B_0,B_1,B_2,\cdots\}$（此中记 $B_1^n=B_n$，下同），则对某一 n，$x\in\mathrm{Int}(\bigcup\{B_i:i\leqslant n\})$.

设不真，令 $F_n = V - \bigcup\{B_i: i\leqslant n\}$，其中 V 开，且 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$。显然 $\{F_n: n\in\omega\}$ 聚集于 x。由 X 的可数双 K 性，∃ 聚集于 x 的 S-列 $\{s_i: i\in\omega\}$ 使得 $s_i\subset F_i$ 且 S 是紧集。

设 U_s 是 S 的开邻域，若 $s_m\subset U_s$ 对每一 m 都不成立，取 $y_m\in s_m - U_s$，则 $\{y_m: m\in\omega\}$ 在 S 中无聚点，此与 $\{s_i: i\in\omega\}$ 是 S-列矛盾。

取 $x_n\in S_n$，则 $A = S\cup\{x_n: n\in\omega,\ x_n\in S_n\}\cup\{x\}$ 是紧集。事实上，利用上述说明，复盖 A 的开盖中有限个元之并形成 S 的一个开邻域。令 $\overline{V}\cap A = K$，则 K 是紧集。由于

$$\{x_n: n\in\omega\}\subset\bigcup\{s_i\in\omega\}\subset\bigcup\{F_i: i\in\omega\}\subset V,$$

故 $\{x_n: n\in\omega\}\cup\{x\}\subset K\subset U$。于是存在 $B_n\in\mathscr{B}^{**}$（$\mathscr{B}^{**}$ 关于有限并是封闭的）*)，使得 $K\subset B_n\subset U$，矛盾于 x_n 的选取。故对某一 n，成立 $x\in \mathrm{Int}\ (\bigcup\{B_i: i\leqslant n\})$。由于 $B_i\in\mathscr{B}^{**}$，故 $\mathrm{Int}(\bigcup\{B_i: i\leqslant n\})\subset U$。注意到 $\bigcup\{B_i: i\leqslant n\}\in\mathscr{B}^{*}$，所以 X 满足第一可数公理。 ∎

注　由于下述空间（定义见[3]）满足：

$$\begin{array}{ccccc}
\text{第一可数} & \Rightarrow & \text{双序列式} & \Rightarrow & \text{可数双序列式} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{点可数} & \Rightarrow & \text{双}K\text{式} & \Rightarrow & \text{可数双}K\text{式}
\end{array}$$

故定理 2.6 对所列空间类都成立。

推论　对于所列空间类，$M_2\Longleftrightarrow\aleph(3)$。（证明从略。）

在[2]中，E. Michael 曾证得：X 是可分度量化的，当且仅当 X 是第一可数的 $\aleph_0$-空间。由定理 2.6，我们可以推广此定理为：X 是可分度量化的，当且仅当 X 是 $\aleph_0$-空间且是所列空间类的任一种。

E. Michael 在[2]中还证得：若 X 是紧的距离空间，Y 有可数伪基且正则，则具有紧开拓扑的函数空间 $C(X, Y)$ 是正则的且有可数网络。

我们有下述推广：X 同上，Y 是正则的且有 σ-局部有限伪基 $\mathscr{B}$，则 $C(X, Y)$ 是正则的且有 σ-局部有限网络。

此外，若 $\mathscr{B}$ 中元是开的，则 $C(X, Y)$ 可距离化。（限于篇幅，证明从略。）

感谢西北大学数学系王成堂教授的指导。

参　考　文　献

[1] Ceder, J. G., Some generalizations of metric spaces, Pacific. *J. Math.* 11 (1961), 105—125.

[2] Michael, E., $\aleph_0$-spaces. *J. Math and Mech.*, 15 (1966), 983—1002.

[3] Berner, A. J., Spaces defined by sequences, *Proc. Amer, Math. Soc.* 54—55 (1976), p.p 193—200.

*）亦可改述为：∃有限个 $B_{n_1}, \cdots, B_{n_m}$，使得 $K\subset\bigcup_{i=1}^{m}B_{n_i}\subset U$ $(n_1\leqslant\cdots\leqslant n_m)$。与 x_{n_m} 的选取矛盾。

Some Extensions of Metric Space

Gao Zhiming

Abstract

In the present paper, we introduce $\aleph(3)$-space, a new class of topological spaces, and generalize some E. Michael's and J. G. Ceder's theorems on metrization of a topological space.

A regular space X is an $\aleph_0$-space ($\aleph(1)$-、$\aleph(2)$-、$\aleph(3)$-) if X has a countable (σ-locally finite, σ-closure preserving, σ-cushioned pair-) pseudobase (in our terminology, regular spaces are T_1).

We give a summary of the principal properties of $\aleph(3)$-spaces as follows:

1 Any subset of an $\aleph(3)$-space is an $\aleph(3)$ -space.

2 Any countable product of $\aleph(3)$ -spaces is $\aleph(3)$-space.

3 If $X=A_1\cup A_2$, where A_1, A_2 are closed $\aleph(3)$-subspaces, then so is X.

4 If X is regular, paracompact and locally $\aleph(3)$-, then X is $\aleph(3)$;

5 If a regular X is a locally finite union of closed $\aleph(3)$-spaces, then so is X.

6 A locally compact $\aleph(3)$-space is completely metrizable.

This is a generalization of Ceder's theorem; a locally compact M_2-space is completely metrizable.

7 If a Countable-bi-k space X has a σ-cushioned pair-pseudobase $\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$, where each $\mathscr{B}_n$ is point finite, then X is metrizable.

This theorem generalizes the following

1) Ceder's theorem: If a regular space X has σ-closure preserving quasibase $\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$, where each $\mathscr{B}_n$ is point finite, then X is metrizable;

2) Michael's theorem: First-countable $\aleph_0$-spaces are separable metrizable;

8 Michael proved ever that, if X is a compact metric space, and Y an $\aleph_0$-space, then $C(X,Y)$ is cosmic. We generalize this theorem as follows.

If X is a compact metric space, and Y an $\aleph(1)$-space, then $C(X,Y)$ is on σ-space.