第3卷 第3期 数学研究与评论 Vol.3 No.3
1983年7月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION July, 1983

赋范线性空间上有界线性泛函的一般形式*

李容录

(哈尔滨工业大学)

1968年，N. E. Gretsky[1]求得了Banach函数空间上有界线性泛函的一般形式。1977年，G. D. Faulkner[2]对自反的Banach空间解决了这个问题。又本文作者对一类无限多个Banach空间解决了有界线性泛函的表示问题[3]。

本文对一般的赋范线性空间给出了有界线性泛函的表达式和共轭空间的等距同构表现。

X是赋范线性空间，S是X的闭单位球，T是有界函数空间$B(S)$的闭单位球。其他不加解释的记号同[3]、[4]。

引理 X_0^*是由X的子空间Y确定的X^*的商空间([3]，引理2)。于是自X_0^*至标量域的映射x_0^{**}是有界线性泛函当且仅当有$x^{**}\in X^{**}$适合

$$x^*\in\xi\in X_0^*\Longrightarrow x^{**}(x^*)=x_0^{**}(\xi).$$

从而X^{**}中适合条件

$$x^*,y^*\in\xi\in X_0^*\Longrightarrow x^{**}(x^*)=x^{**}(y^*)$$

的x^{**}的全体构成X^{**}的闭子空间且和$(X_0^*)^*$等距同构.

证 必要性 设$x_0^{**}\in(X_0^*)^*$. 命

$$x^{**}(x^*)=x_0^{**}(\xi),\ \text{当}\ x^*\in\xi\in X_0^*\ \text{时}.$$

于是就有$x^{**}\in X^{**}$且$\|x^{**}\|\leq\|x_0^{**}\|$.

充分性 若x_0^{**}满足引理条件，则易知x_0^{**}是X_0^*上的线性泛函. 又由Hahn-Banach扩张定理可知$\|x_0^{**}\|\leq\|x^{**}\|$. 证毕.

定理1 自X^{**}至标量域的映射x^{***}是有界线性泛函当且仅当有$\lambda\in\mathrm{ba}(T)$适合

$$\mu\in e(x^{**})\in E,\quad x^{**}\in X^{**}\Longrightarrow x^{***}(x^{**})$$
$$=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt), \tag{1}$$

其中E同[3]之定理2.

证 必要性 设$x^{***}\in X^{***}$. 由[3]之定理2，有$e^*\in E^*$适合

$$x^{***}(x^{**})=e^*(e(x^{**})),\ x^{**}\in X^{**};\quad \|x^{***}\|=\|e^*\|. \tag{2}$$

由引理，对于$e^*\in E^*$有$b^{**}\in B(S)^{**}$使$\|b^{**}\|=\|e^*\|$且

*1981年3月3日收到.

$$\mu\in e(x^{**}),\ b^*(f)=\int_S f(s)\mu(ds),\ f\in B(S)\Longrightarrow e^*(e(x^{**}))=b^{**}(b^*). \tag{3}$$

再由[3]之定理1，有 $\lambda\in \mathrm{ba}(T)$ 使

$$b^{**}(b^*)=\int_T b^*(t)\lambda(dt),\ \|b^{**}\|=\nu(\lambda,T). \tag{4}$$

于是由(2)、(3)、(4)便得(1)。

充分性 设有 $\lambda\in\mathrm{ba}(T)$ 适合(1)。若 x^{**}, $y^{**}\in X^{**}$, 则 $e(x^{**}+\alpha y^{**})=e(x^{**})+\alpha e(y^{**})$, 所以由 E 中运算的定义，对于 $\delta\in e(x^{**}+\alpha y^{**})$ 有 $\mu\in e(x^{**})$ 和 $\omega\in e(y^{**})$ 使 $\delta=\mu+\alpha\omega$。于是有

$$x^{***}(x^{**}+\alpha y^{**})=\int_T\left(\int_S t(s)(\mu+\alpha\omega)(ds)\right)\lambda(dt)$$

$$=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt)+\alpha\int_T\left(\int_S t(s)\omega(ds)\right)\lambda(dt)=x^{***}(x^{**})+\alpha x^{***}(y^{**}).$$

其次由[3]之引理2之证明，可知对 $e(x^{**})\in E$ 必有 $\mu_0\in e(x^{**})$ 使 $\nu(\mu_0,S)=\|x^{**}\|$。于是

$$|x^{***}(x^{**})|=\left|\int_T\left(\int_S t(s)\mu_0(ds)\right)\lambda(dt)\right|\leqslant\int_T\left(\int_S |t(s)|\nu(\mu_0,ds)\right)\nu(\lambda,dt)$$

$$\leqslant\int_T\left(\int_S \nu(\mu_0,ds)\right)\nu(\lambda,dt)=\nu(\mu_0,S)\nu(\lambda,T)=\nu(\lambda,T)\|x^{**}\|.$$

可见 $x^{***}\in X^{***}$。证毕。

今在 $\mathrm{ba}(T)$ 中适合条件

$$\mu,\omega\in e(x^{**})\Longrightarrow\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt)=\int_T\left(\int_S t(s)\omega(ds)\right)\lambda(dt),\quad x^{**}\in X^{**}$$

的 λ 的全体 Λ 上定义等价关系"$\backsim$"如下：

$$\lambda_1\backsim\lambda_2\Longleftrightarrow\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda_1(dt)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda_2(dt),\quad \mu\in\mathrm{ba}(S).$$

由[3]之定理2及本文定理1、引理可得

定理2 X^{***} 同 Λ 关于等价关系 $\backsim$ 的商空间 F 通过下式等距同构：

$$\lambda\in f(x^{***})\in F\Longrightarrow x^{***}(x^{**})$$

$$=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\quad \mu\in e(x^{**}),\quad x^{**}\in X^{**}.$$

定理3 自 X 至标量域的映射 x^* 是有界线性泛函当且仅当有 $\lambda\in\mathrm{ba}(T)$ 适合

1° $$x^*(x)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu_x(ds)\right)\lambda(dt),\quad x\in X,$$

其中 $\mu_x\in\mathrm{ba}(S)$ 仅由 x 确定并且 $\nu(\mu_x,S)=\|x\|$；

2° $$\int_T\left(\int_S t(s)\mu_{x+\alpha y}(ds)\right)\lambda(dt)=\int_T\left(\int_S t(s)(\mu_x+\alpha\mu_y)(ds)\right)\lambda(dt),\quad x,y\in X.$$

证 必要性 设 $x^*\in X^*$。命 $\hat{x}$ 为自 X 至 X^{**} 的自然嵌入，$\hat{x}^*$ 为自 X^* 至 X^{***} 的自

然嵌入，则

$$\varkappa^* x^*(\varkappa x) = \varkappa x(x^*) = x^*(x),\quad x \in X. \tag{5}$$

由[3]之定理1的系1，对 $\varkappa x \in X^{**}$ 有 $\mu_x \in \mathrm{ba}(S)$ 使 $\nu(\mu_x, S) = \|x\|$ 且

$$x^*(x) = \varkappa x(x^*) = \int_S x^*(s)\mu_x(ds),\quad x^* \in X^*. \tag{6}$$

注意 $\mu_x \in e(\varkappa x)$，由定理1有 $\lambda \in \mathrm{ba}(T)$ 适合

$$\varkappa^* x^*(\varkappa x) = \int_T \left(\int_S t(s)\mu_x(ds)\right)\lambda(dt). \tag{7}$$

于是将(7)代入(5)即得1°。

其次将(6)、(7)代入(5)得

$$\int_S x^*(s)\mu_x(ds) = \int_T \left(\int_S t(s)\mu_x(ds)\right)\lambda(dt). \tag{8}$$

于是注意 $\varkappa(x + \alpha y) = \varkappa x + \alpha \varkappa y$，便得2°。

充分性　设 x^* 适合条件1°、2°。于是 x^* 之线性显然。又

$$|x^*(x)| = \left|\int_T \left(\int_S t(s)\mu_x(ds)\right)\lambda(dt)\right| \leqslant \int_T \left(\int_S |t(s)|\,\nu(\mu_x, ds)\right)\nu(\lambda, dt)$$

$$\leqslant \int_T \left(\int_S \nu(\mu_x, ds)\right)\nu(\lambda, dt) = \nu(\lambda, T)\,\nu(\mu_x, S) = \nu(\lambda, T)\|x\|.$$

于是 $x^* \in X^*$。证毕。

由定理1、定理3及[3]之定理2还可得到

定理4　自 X 至标量域的映射 x^* 是有界线性泛函当且仅当有 $\lambda \in \mathrm{ba}(T)$ 适合

$$x^*(x) = \int_T \left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\quad x \in X, \tag{9}$$

其中的 $\mu \in \mathrm{ba}(S)$ 只须满足条件

$$\phi(x) = \int_S \phi(s)\mu(ds),\quad \phi \in X^*. \tag{10}$$

由定理2及定理4可得

定理5　X^* 和 F 的一子空间 D 通过下式等距同构：

$$\lambda \in d(x^*) \in D \Longrightarrow x^*(x) = \int_T \left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),$$

μ 适合条件(10)，$x \in X$。

定理6　若 $X \times X$ 上的复值函数 $[\cdot,\cdot]$ 满足[2]之半内积定义中条件(a)、(b)和(c)，则有自 X 至 D 的映射 $d_x = g(x)$ 使得当 $\lambda_y \in d_y$ 时

$$[x, y] = \int_T \left(\int_S t(s)\mu_x(ds)\right)\lambda_y(dt),\quad x, y \in X, \tag{11}$$

其中 μ_x 满足条件(10)。

证 任取$y\in X$. 由条件(a)、(b)和(c)易知$[\cdot,y]\in X^*$. 于是由定理5恰有一$d_y\in D$使(11)式成立。证毕。

系 X是Hilbert空间。于是有自X至D的映射$d_x=g(x)$使得当$\lambda_y\in d_y$时有

$$(x,y)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu_x(ds)\right)\lambda(dt),\quad x,y\in X,$$

其中μ_x满足条件(10)。

作者对吴从炘教授的指导表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Gretsky, N. E., Representation theorems of Banach function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 74(1968), 705-709.

[2] Faulkner, G. D., Representation of Linear functionals in a Banach Space, *Rocky Mountation J. Math.* 7(1977), no. 4, 789-792.

[3] 李容录，赋范线性空间的第二对偶空间，数学研究与评论，2(1981), 49-53.

[4] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, Part I: General theory, New York, 1958.

General form of Linear functionals on Normed Linear Spaces

Li Rong-Lu (李容录)

Abstract

Let S and T be the closed unit spheres of a normed space X and the space $B(S)$ of all bounded scalar functionals on S, respectively.

Theorem A mapping x^* of X into the scalar field is a bounded linear functional if and only if there exists a $\lambda\in\mathrm{ba}(T)$ such that

$$x^*(x)=\int_T\left(\int_S t(s)\mu(ds)\right)\lambda(dt),\quad x\in X,$$

where $\mu\in\mathrm{ba}(S)$ only depending on x and satisfying

$$\phi(x)=\int_S\phi(s)\mu(ds),\quad \phi\in X^*.$$