第3卷 第3期　　数学研究与评论　　Vol.3 No.3
1983年7月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　July, 1983

齐次常微分方程渐近性质的注记*

谭 宣

（哈尔滨科技大学）

本文将线性算子本征值扩张为非线性算子本征值，以齐次常微分方程为例进行考察，得到初步结果，修改了 В. В. Немыцкий 与 В. В. Стеланов[1] 著作中 Forster[2] 定理的条件。

设方程

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n(x,y) \\ Q_n(x,y) \end{pmatrix} \tag{1}$$

简记为

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \circ \vec{X},$$

其中$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix}$为$n$次齐次多项式，奇点为$(0,0)$。

若有实数λ及某一非$\vec{0}$向量$\vec{X}$使

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \circ \vec{X} = \lambda \vec{X} \tag{2}$$

则分别称λ，$\vec{X}$为非线性算子$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix}$的本征值与本征向量。

引理1 若λ，$\vec{X}$为算子$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix}$的本征值与本征向量，则方程（1）有本征解$\vec{X}f(t)$，其中

当 $n=1$ 时，
$$f(t) = f(0)e^{\lambda t}, \tag{3}$$

当 $n>1$ 时，
$$f(t) = [f(0)^{1-n} - (n-1)\lambda t]^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{4}$$

证 代入方程显然成立。

给出下列运算的意义：

$$\frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)} = \left(\frac{P}{Q}\right) \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right) \circ \vec{X} = \left(\frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}\right).$$

引理2 若λ，$\vec{X}$为算子$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix}$的本征值与本征向量，令 $z = \frac{y}{x}$，则当

* 1981年9月15日收到。

$x\neq 0$，$Q_n(1,z)\neq 0$ 时 $zP_n(1,z)-Q_n(1,z)=0$； （5）

$x=0$，$y\neq 0$时，$P_n(0,y)=0$。 （6）

证 $x\neq 0, \begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}\circ\vec{X}=\lambda\vec{X}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}\circ\vec{X}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_n(x,y)\\Q_n(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^nP_n(1,z)\\x^nQ_n(1,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_n(1,z)\\Q_n(1,z)\end{pmatrix},$$

得出 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{P_n(1,z)}{Q_n(1,z)}$，即 $zP_n(1,z)-Q_n(1,z)=0$。

若$x=0$，$y\neq 0$，则

$$\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_n(x,y)\\Q_n(x,y)\end{pmatrix},$$

得出 $\dfrac{0}{y}=\dfrac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}$，即$P_n(0,y)=0$。

引理3 方程(1)对正交基$\dfrac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}$的极坐标射影为

$$\begin{pmatrix}\dot r\\r\dot\varphi\end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix}G\\H\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}, \qquad (7)$$

其中$r=\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi$为向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$的向径角。

$$\begin{pmatrix}G\\F\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi P_n(\cos\varphi,\sin\varphi)+\sin\varphi Q_n(\cos\varphi,\sin\varphi)\\-\sin\varphi P_n(\cos\varphi,\sin\varphi)+\cos\varphi Q_n(\cos\varphi,\sin\varphi)\end{pmatrix}.$$

证 方程(1)对正交基$\dfrac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}$的射影为

$$\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}\dot{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

其中$\dot{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}=\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，方程左边的极坐标表示为

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\left(\dot r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}+r\dot\varphi\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot r\\r\dot\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot r\\r\dot\varphi\end{pmatrix},$$

方程右边的极坐标表示为

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\left(r^n\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}\right)=r^n\begin{pmatrix}G\\F\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

以下称$F=0$为方程(1)的特征方程。

引理4 方程(1)的特征方程在极坐标系中为

$$F=-\sin\varphi P_n(\cos\varphi,\sin\varphi)+\cos\varphi Q_n(\cos\varphi,\sin\varphi)=0, \qquad (8)$$

在正坐标系中为

$$F=\begin{cases}-zP_n(1,z)+Q_n(1,z)=0, & \text{当}x\neq 0;\\ P_n(0,y)=0, & \text{当}x=0,\ y\neq 0.\end{cases} \tag{9}$$

其中$z=\dfrac{y}{x}=\tan\varphi$.　　(10)

证　据(7)得(8)，运用坐标变换$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$及(10)得出(9)。

引理5　若(1)的特征方程$F=0$有实根z，则由z确定的本征向量$\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}$的方向上的任一相点$(x,y)$，具有关系

$$G=\lambda\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\| \tag{11}$$

其中$z=\dfrac{y}{x}$；λ为本征向量$\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}$的本征值等于

$$\begin{cases}x^{n-1}P_n(1,z), & x\neq 0,\\ y^{n-1}Q_n(0,1), & x=0,y\neq 0;\end{cases} \tag{12}$$

$$G=\left(\frac{x}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}\right)^{n+1}[P_n(1,z)+zQ_n(1,z)]; \tag{13}$$

$$F=0. \tag{9}$$

证　由实根z确定本征向量$\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}$.沿本征向量方向上任取一相点$(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{若}x\neq 0,\ \text{据}\ x,z=\dfrac{y}{x}\text{定出本征值}\ \lambda=x^{n-1}P_n(1,z)\\ \text{若}x=0,\ y\neq 0,\ \text{据}\ y\ \text{定出本征值}\ \lambda=y^{n-1}Q_n(0,1)\end{array}\right\} \tag{14}$$

据λ，x，z或λ，0，y定出

$$\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{2}$$

则在本征向量$\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$上据$\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$得

$$\begin{pmatrix}G\\H\end{pmatrix}=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}x & y\\-y & x\end{pmatrix}\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}.$$

从而

$$G=\lambda\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|.$$

本文运用上述引理得出下面的定理改正了Forster定理的条件.

定理　设(1)的特征方程有实根z，便有下述的论断：

如果z为奇重根并且由z确定的本征值$\lambda>0$，则由λ确定的本征解走离奇点，在该解邻近的两侧积分线旋向相反，其向径严格单增.

如果z为奇重根并且由z确定的本征值$\lambda<0$，则由λ确定的本征解走向奇点，在该解邻近的两侧积分线旋向相反，其向径严格单减.

如果z为偶重根并且由z确定的本征值$\lambda>0$，则由λ确定的本征解走离奇点，在该解

邻近的两侧积分线旋向相同，其向径严格单增。

如果 z 为偶重根并且由 z 确定的本征值$\lambda<0$，则由 λ 确定的本征解走向奇点，在该解邻近的两侧积分线旋向相同，其向径严格单减。

证 据(7)，$\begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\dot{\varphi}\end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix}G\\ F\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$.

特征方程$F=0$的特征根 z 确定本征向量$\begin{pmatrix}1\\ z\end{pmatrix}$，在其上任取一组初始相点，据(14)定出本征值$\lambda$，据(3)、(4)得出一个本征解，该解在本征向量上按本征值 $\lambda<0(>0)$ 当 $t\to+\infty$ 时走向(走离)奇点，当$t\to-\infty$时走离(走向)奇点。

在该解邻近的两侧积分线按特征根的奇、偶重根及本征值的正、负情况，分别讨论如下：

若特征根 z 为奇重根，则由其定出的本征解邻近的两侧的相点使 F 变号，据(7)，$r\dot{\varphi}=r^nF$ 则 $r\dot{\varphi}$ 变号，即在该解邻近两侧的积分线旋向相反。

若由该特征根 z 及初始条件定出的本征值 $\lambda>0$，则据(11) $G>0$，据(7)$\dot{r}=r^nG$，知$\dot{r}>0$。由于G的连续性，在该本征解邻近两侧的积分线的$\dot{r}$保持相同符号，这些积分线的向径均严格单增。

若$\lambda<0$，类似地得出在该本征解邻近两侧的积分线均严格单减。

若特征根 z 为偶重根，则由其定出的本征解邻近两侧的相点使 F 不变号；$r\dot{\varphi}$ 就不变号。类似地得出在其邻近两侧的积分线旋向相同。

若$\lambda>0$，类似地得出这些积分线不仅旋向相同，而且向径严格单调增加。

若$\lambda<0$，类似地得出这些积分线不仅旋向相同，而且向径严格单调减少。

参 考 文 献

[1] Немыций, В. В. И Степанов, В. В., Качественная Теория Дифференциальных Уравнении (1949).

[2] Forster, Math. Zeitschrift, Bd. 43(1938).

A Remark of the Asymptotic Properties of the Homogenuous Ordinary Differential Equations

Tan Xuan

Abstract

In this paper, we present a nonlinear operator for studying the asymptotic properties of the homogenuous ordinary differential equations and get a result modifying the condition of Forster's theorem.