第3卷 第3期 数学研究与评论 Vol.3 No.3
1983年7月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION July, 1983

M_t^2上的强$\omega(\alpha)$轨道稳定性*

董镇喜

（北京大学）

考虑度量空间R上的动力系统R_t.

定义1 轨道$f(p,t)$称为$\omega(\alpha)$轨道稳定的，如果对任给的$\varepsilon>0$，存在某个$\delta>0$，使得从p点的δ邻域出发的正（负）半轨都落在半轨$f(p,I^+)$[$f(p,I^-)$]的ε邻域之中.（见[1]）

定义2 轨道$f(p,t)$称为强$\omega(\alpha)$轨道稳定的，如果存在p点的邻域$S(p)$，使得$\forall q\in S(p)$ $f(q,t)$的极限集$\Omega_q(A_q)=\Omega_p(A_p)$.

显然R_t上$\omega(\alpha)$轨道稳定或强$\omega(\alpha)$轨道稳定的轨道集合是不变的开集合，而且不难验证，对于紧致的R_t上强$\omega(\alpha)$轨道稳定的轨道一定是$\omega(\alpha)$轨道稳定的，但一般说来，$\omega(\alpha)$轨道稳定的轨道未必是强$\omega(\alpha)$轨道稳定的.

考虑可定向的紧致的二维流形M^2上C^1动力系统M_t^2，M_t^2上的轨道的强$\omega(\alpha)$轨道稳定性具有如下一些性质.

定理1 设M_t^2的渐近轨道$f(p,t)$的极限集$\Omega_p(A_p)$包含闭轨L，则$\Omega_p(A_p)=L$，且$f(p,t)$是强$\omega(\alpha)$轨道稳定的.

证明 显然闭轨L存在充分小的邻域$G(L)$，使得$G(L)$是1型的，即$G(L)$上的任一简单封闭曲线，把$G(L)$分为不连通的二个分支（见[4]），取L上的一点q，作q的局部截痕N_q，由于$f(p,t)$以q为ω极限点，当$t\to+\infty$时，$f(p,t)$将与N_q无限次相交，取交点$P_1=f(p,t_1)$充分接近q，由动力系统的连续性，存在$t_2>t_1$，使$P_2=f(p,t_2)\in N_q$，使轨道弧$f(p,t_1,t_2)\subset G(L)$，于是由轨道弧$f(p,t_1,t_2)$以及N_q上弧段$\overset{\frown}{p_1p_2}$与闭轨L构成了封闭区域D，由对轨道弧$f(p,0,t_2)$的连续性，存在p的邻域$U(p)$，使得从$U(p)$出发的轨道在p_2附近进入D，而不能跑出D，因而$\forall \bar{q}\in U(p)$，$\Omega_{\bar{q}}\subset D\subset G(L)$，又由于$G(L)$是$L$的任意小的邻域，故$\Omega_{\bar{q}}=L$.

定义3 若系统M_t^2的轨道$f(p,t)$的$\Omega_p(A_p)$仅为一个奇点，则称$f(p,t)$为正向（负向）限制轨道.

定理2 设M_t^2的渐近轨道$f(p,t)$的$\Omega_p(A_p)$包含常点q，则$f(p,t)$是强$\omega(\alpha)$轨道稳定的充要条件是存在某个p的邻域$U(p)$，$U(p)$上的轨道是非正向（负向）限制轨道.

证明 必要性是显然的，因为$f(p,t)$是强ω轨道稳定的，即存在p的某个邻域$U(p)$，$\forall p_1\in U(p)$，$\Omega_{p_1}=\Omega_p$，而Ω_p是包含常点q的，因而$f(p_1,t)$是非正向限制轨道. 类似可证

*1982年3月22日收到.

$f(p,t)$是强α轨道稳定的情况.

我们来证充分性，在q点作局部截痕N_q，当$t\to+\infty$时，$f(p,t)$逐次与截痕N_q相交于$P_k=f(p,t_k),k=1,2,\cdots$，且$t_1<t_2<t_3\cdots<t_k<\cdots$，对于轨道弧$f(p,0,t_1)$，根据动力系统的连续性，存在$p$的邻域$U_1(p)\subset U(p)$，使得过$U_1(p)$的所有轨道的正半轨交$N_q$于$\Delta_1$，由于$f(p,t)$是渐近轨道，显然可要求在$\Delta_1$上没有$\Omega_p$中的点，除$P_1$外也没有轨道$f(p,t)$的其它点；对于轨道弧$f(p,t_1,t_2)$由动力系统的连续性，在$N_q$上存在$P_1$的邻域$\Delta_1^{(1)}$，使得过$\Delta_1^{(1)}$的所有轨道的正半轨交$N_q$于$\Delta_2^{(1)}$，显然$\Delta_2^{(1)}$上包含$P_2$，但不包含$f(p,t)$的其它点以及$\Omega_p$中的任何点。我们分二种情况：(1) $\Delta_1\subset\Delta_1^{(1)}$，这说明过$\Delta_1$的正半轨全部都与$N_q$相交，记$\Delta_2^{(1)}=\Delta_2$；(2) $\Delta_1\not\subset\Delta_1^{(1)}$，由于$P_1\in\Delta_1$，$P_1\in\Delta_1^{(1)}$，因此此时$\Delta_1^{(1)}$至少有一端点属于$\Delta_1$之中，利用这个端点的正向轨道弧的连续性，在$N_q$上延拓$\Delta_1^{(1)}$为$\Delta_1^{(2)}$，使过$\Delta_1^{(2)}$的正半轨全部与$N_q$相交于$\Delta_2^{(2)}$，显然$\Delta_2^{(2)}\supset\Delta_2^{(1)}$，若$\Delta_1\subset\Delta_1^{(2)}$，记$\Delta_2^{(2)}=\Delta_2$，若$\Delta_1\not\subset\Delta_1^{(2)}$，继续在$\Delta_1^{(2)}$的端点，利用系统的连续性进行延拓，…于是得到了$\Delta_1^{(1)}\subset\Delta_1^{(2)}\subset\Delta_1^{(3)}\subset\cdots\subset\Delta_1^{(k)}\subset\cdots$，相应地有$\Delta_2^{(1)}\subset\Delta_2^{(2)}\subset\cdots\subset\Delta_2^{(k)}\subset\cdots$若$\forall k$，$\Delta_1^{(k)}\not\supset\Delta_1$，令$\Delta_1^{(\omega)}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_1^{(k)}$，$\Delta_1^{(\omega)}\not\supset\Delta_1$，在这种情况下：($a$) 若$\Delta_1^{(\omega)}$的端点属于$\Delta_1$，且过端点的轨道仍与$N_q$相交，上述过程仍可继续；($b$) 若端点轨道是由奇点、渐近轨道组成，就不能再延拓下去，但是，由于以$U_1(p)$出发的正半轨都是正向非限制轨道，因而从Δ_1中出发的正半轨也都是正向非限制轨道，故上述的(b)情况不可能发生，于是我们得到一个超限序列

$$\Delta_1^{(1)}\subset\Delta_1^{(2)}\subset\cdots\subset\Delta_1^{(k)}\subset\cdots\subset\Delta_1^{(\omega)}\subset\cdots\subset\Delta_1^{(\beta)}\subset\cdots$$

由豪司道夫—贝尔定理[3]，存在α，$\Delta_1^{(\alpha)}=\Delta_1^{(\alpha+1)}=\cdots$显然$\Delta_1^{(\alpha)}=\Delta_1$。故从$\Delta_1$出发的正半轨全部与$N_q$相交，记为$\Delta_2$，显然$\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$，否则破坏系统的唯一性.

其次，用Δ_2替代Δ_1，作与上面完全类似地讨论，便得到同样的结论，过Δ_2的正半轨都与N_q相交，记为Δ_3，显然$\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$互不相交.

如此继续讨论下去，最后我们得到过Δ_1的正半轨全部与N_q相交于$\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4\cdots$，且$\Delta_i\cap\Delta_j=\varnothing$，$i\neq j$。显然$\Delta_k$的直径$d(\Delta_k)\to0$，当$k\to+\infty$.

这样，从$U_1(p)$出发的正半轨组成了一个“带子”，正半轨$f(p,I^+)$被夹在“带子”中间，“带子”的“宽度”随着$t\to+\infty$而趋于零。显然$f(p,t)$以q为ω极限点，带子中任何轨道也要以q为ω极限点，注意到前面讨论对于Ω_p中一切常点q都是成立的，因此Ω_p中一切常点q都是带子中轨道的ω极限点.

设q为Ω_p中奇点，对于q的任一邻域$U(q)$，$f(p,t)$当$t\to+\infty$时无限次进入离开$U(q)$，因而夹住$f(p,I^+)$的带子也就无限次进入离开$U(q)$，显然q也是带子中任一轨道的ω的极限点.

综上所述，带子中轨道具有与Ω_p相同的ω极限集，故$f(p,t)$是强ω轨道稳定。对于负向向轨道与正向轨道证明完全一样.

由定理2立即可得下面的定理

定理3 设M_T^2的渐近轨道$f(p,t)$的$\Omega_p(A_p)$包含某条非闭的p式轨道或某条渐近轨道，且存在p的邻域$U(p)$，过$U(p)$的正(负)半轨都是正向(负向)非限制轨道，则$f(p,t)$是强$\omega(\alpha)$轨道稳定的.

下面我们来引入 Neumann 研究二维流形系统分类问题所采用的规范区域的概念（见[2]）来讨论M_f^2强$\omega(\alpha)$轨道稳定性. Neumann 所考虑是二维流形$\widetilde{M}^2$上只具有孤立临界点的连续流$\widetilde{M}_f^2$（这里 $\widetilde{M}^2$ 可以是定向的或不定向的，紧致的或非紧致的），用 $\gamma(x)$ 表示通过$x\in\widetilde{M}^2$的轨 道，用 $\gamma^{\pm}(x)$ 表示过 x 的正负半轨。令 $\omega(x)=\mathrm{cl}(\gamma^{+}(x))-\gamma^{+}(x)$； $\alpha(x)=\mathrm{cl}(\gamma^{-}(x))-\gamma^{-}(x)$，其中cl表示闭包。

定义4　我们说$\gamma(x)$是$\widetilde{M}_f^2$的分界线，如果$\gamma(x)$不能被包含于同时满足下面二个条件的平行邻域N中：

（1）对任意的$y\in N$，$\alpha(y)=\alpha(x)$，$\omega(y)=\omega(x)$；

（2）$\mathrm{cl}(N)-N$ 由 $\alpha(x)$，$\omega(x)$以及 $\widetilde{M}_f^2$ 中确定的两条具有性质：$\alpha(a)=\alpha(b)=\alpha(x)$ 和 $\omega(a)=\omega(b)=\omega(x)$的轨道$\gamma(a)$，$\gamma(b)$组成。

设 S 是$\widetilde{M}_f^2$的所有分界线的并集，显然 S 是 $\widetilde{M}_f^2$ 的闭的不变子集，其余集的不变分支叫做$\widetilde{M}_f^2$的规范区域。

定理4　（Neumann）$\widetilde{M}_f^2$的任何规范区域是平行的，即它们在同胚意义下，只有四种类型：（1）带状域，（2）圆环状域，（3）螺线域，（4）环状域。

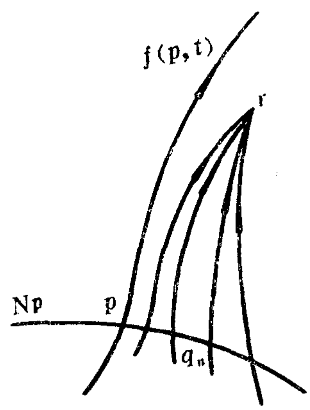
证明　见[2]。

利用 Neumann 定理，我们来考虑$\widetilde{M}_f^2$只具有有限个奇点的情况。

定理5　设$f(p,t)$是 M_f^2 的渐近轨道，$\Omega_p(A_p)$包含常点，又设 M_f^2只有有限个奇点，则$f(p,t)$是强 $\omega(\alpha)$轨道稳定的。

证明　过 p 作局部截痕 N_p，如果在 N_p上存在 p 的邻域Δ_p，过 Δ_p 的轨道都是正向非限制的，此时显然存在 p 的邻域 $U(p)$，过 $U(p)$ 的正半轨是正向非限制的，于是由定理 2 知本定理是成立的。

设 N_p上不存在 p 的任何邻域 Δ_p，使得过Δ_p的轨道是正向非限制的。于是在 N_p 上存在 q_n，$n=1,2,\cdots$，当 $n\to+\infty$时，$q_n\to p$，且 $f(q_n,t)$的 Ω_{q_n} 为某个奇点。由于系统M_f^2的奇点有限，故存在k_0，当$k\geqslant k_0$时，Ω_{q_k}为同一个奇点 r，不难验证只要k_0充分大，q_{k_0}充分靠近 p，从N_p 上开弧段 (p,q_{k_0})出发的轨道正向延长都要以 r 为ω 极限点。于是由 Neumann 定理，从(p,q_{k_0})上出发的所有正半轨应属于某个正的半规范区域I. I不可能是螺线域，因为任何螺线域中轨道的局部截痕上点集的极限点的轨道仍趋于渊点 r，于是$f(p,t)$ 仅以某个奇点为ω 极限点，这与假设不合。其次 I 显然也不可能属于环状域与圆环状域。因此 I 只可能属于带状域，若$f(p,t)$属于带状域，显然$\Omega_p=r$，这与题设不合。若$f(p,t)$属于带状域的边界，Ω_p一定仅以某个奇点为ω 极限点，这与题设不合。



综合上述，在 N_p 上一定存在 p 的邻城 Δ_p 使得过 Δ_p 的轨道都是正向非限制的。进而存在 p 的邻城 $U(p)$，使得过 $U(p)$的轨道都是正向非限制的. 再由定理 2 即得本定理。

定理6　设M_f^2 仅有有限个奇点，$f(p,t)$是正（负）向非限制的渐近轨道，则 $f(p,t)$是 强$\omega(\alpha)$轨道稳定的。

证明　设 $f(p,t)$ 是正向非限制的，因而 Ω_p 不是一个奇点，由于 M^2 紧，$\Omega_p\neq\emptyset$. 若 Ω_p 不包含常点，则 Ω_p 将由多于一个的奇点组成。由于系统 M_f^2 仅有有限个奇点，于是 Ω_p 由多于一个的奇点组成，这与 Ω_p 的连通性矛盾，故 Ω_p 必包含常点，再由定理5，即得 $f(p,t)$ 是强 ω 轨道稳定的。类似可证负向情况。

利用 M_f^2 上强 $\omega(\alpha)$ 轨道稳定性的概念，可以去讨论 M_f^2 上周期解与奇闭轨道的存在性(见[5])。

参 考 文 献

[1] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин С. Э., Теория Колебаний ГИФМЛ Москва 1959.

[2] Neumann D. A., Classification of continuous flows on 2-manifolds, Proc *Amer, Math, Sec*, 48(1975) 73—81.

[3] 豪司道夫，集论（中译本）科学出版社，1960.

[4] 董镇喜，关于二维定向流形上动力系统的一些拓扑结构，北京大学学报(自然科学版)，2(1982).

[5] 董镇喜，二维流形的广义 Poincaré-Bendixson 环域定理(已投"数学进展"，待发表).

Strong Stability of Trajectories on M_f^2

Dong Zhenxi

Abstract

In this paper we define the concept of strong ω-stability (α-stability) of trajectories on dynamical systems, and discuss some properties of them on M_f^2. Using those properties we discuss the existence of close orbits or singular close orbits on M_f^2.