第3卷 第3期
1983年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.3
July, 1983

一类广义 Schrödinger 型非线性高阶方程组*

周毓麟 符鸿源

（北京市8009信箱）

复函数的 Schrödinger 方程

$$u_t - iu_{xx} + \beta |u|^p u = 0, \quad p \geqslant 0 \tag{1}$$

与复函数 Schrödinger 方程组[1-4]

$$\begin{aligned} &u_t - iu_{xx} + 2u(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) = 0 \\ &v_t - iv_{xx} + 2v(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

都可以看作一类实向量函数 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_J)$ 的方程组

$$u_t + (-1)^M A(t) u_{x^{2M}} = f(u) \quad M \geqslant 1 \tag{3}$$

的特殊例子，其中 $A(t)$ 是非奇异，非负定的 $J \times J$ 矩阵值函数，右边项向量函数 $f(u)$ 的 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial f(u)}{\partial u}$ 是半有界的，这类方程组可称为广义 Schrödinger 型方程组[1-5]。

另一种形式的复函数 Schrödinger 方程

$$iu_t - u_{xx} + \beta |u|^p u = 0 \tag{4}$$

与复函数 Schrödinger 方程组

$$\begin{aligned} &iu_t - u_{xx} + 2u(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) = 0 \\ &iv_t - v_{xx} + 2v(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

可以归纳为另一类广义 Schrödinger 型非线性高阶方程组

$$A(t) u_t + (-1)^M u_{x^{2M}} = f(u), \quad M \geqslant 1, \tag{6}$$

的简单例子，其中 u 为 J 维向量值函数，$A(t)$ 为非奇异，非负定的 $J \times J$ 矩阵值函数。因为 $A(t)$ 非奇异，存在逆矩阵 $A^{-1}(t)$，它本身也非负定、非奇异。因此方程组也可以写成形式

$$u_t + (-1)^M A^{-1}(t) u_{x^{2M}} = A^{-1}(t) f(u). \tag{7}$$

但是对（4）和（5）来说，当方程组写成（7）的形式时，相应的 $A^{-1}f(u)$ 这部份，没有像（3）中所要求的那种性质：右边项函数具有半有界的 Jacobi 矩阵。因此（4）与（5）不属于方程组（3）。这里，我们假定方程组(6)的右边部分 $f(u)$ 适合条件

(i) $\quad f(u) = -\operatorname{grad} F(u), \quad F(u) \geqslant 0 \quad (8)$

(ii) 对于 $\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (g(t,u), u) \leqslant a(u,u) + b \quad (9)$

* 1981年10月10日收到.

其中 $g(t,u)=A^{-1}(t)f(u)$，$a,b\geqslant 0$ 常数，$T>0$，$(u,v)=\int_{-D}^{D}u(x,t)\cdot v(x,t)dx$。显然(4)与(5)的函数项部分是满足条件(i)与(ii)的。

对于方程组(1)、(2)与(3)已研究了各种问题的广义整体解与古典整体解的性质。有不少工作对方程(4)与(5)研究了周期边界问题与有限区域边界问题整体弱解或广义解的性质[1-5]。本文目的是对具有性质(i)与(ii)的方程组(6)，研究周期边界问题与初值问题的整体广义解与整体古典解的存在性、唯一性以及解的光滑性。

周期边界条件与初值条件为

$$u(x+2D,t)=u(x,t),\qquad D>0,\tag{10}$$
$$u(x,0)=\varphi(x)$$

其中 $\varphi(x)$ 是以 $2D$ 为周期的已知周期向量函数。

§1　设 $\{y_n(x)\}$ 为方程 $y''=\lambda y$ 的以 $2D$ 为周期对应本征值 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ 的本征函数所组成的规范正交完备系。

设方程组(6)的周期边界问题(10)的近似解取形式

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_{Nn}(t)y_n(x)\tag{11}$$

其中 $\alpha_{Nn}(t)=(\alpha_{Nn1}(t),\cdots,\alpha_{NnJ}(t))$ 为待定的向量系数函数。根据Galerkin方法，向量系数 $\alpha_{Nn}(t)$ 适合下列常微分方程组的初值问题

$$\left(\sum_{j=1}^{J}a_{lj}(t)\frac{\partial u_{Nj}}{\partial t},\ y_s\right)+(-1)^M\left(\frac{\partial^{2M}u_{Nl}}{\partial x^{2M}},\ y_s\right)=(f_l(u_N),y_s),\tag{12}$$
$$(u_{Nl}(x,0),y_s)=(\varphi_l,y_s),\quad l=1,2,\cdots,J;\quad s=1,2,\cdots,N.$$

或

$$\sum_{j=1}^{J}a_{lj}(t)\alpha'_{Nsj}(t)+(-1)^M\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_{Nnl}(t)y_n^{(2M)},\ y_s\right)=(f_l(u_N),y_s),\tag{12'}$$
$$u_{Nsl}(0)=(\varphi_l,y_s),\quad l=1,2,\cdots,J;\quad s=1,2,\cdots,N.$$

其中 $A(t)=(a_{ij}(t))$。因为矩阵 $A(t)$ 非奇异，于是存在逆矩阵 $A^{-1}(t)=(\tilde{a}_{lj}(t))$。$A(t)$ 是非负定的，$A^{-1}(t)$ 也是非负定的。方程组(12)与(12′)可以写作

$$\left(\frac{\partial u_{Nl}}{\partial t},\ y_s\right)+(-1)^M\left(\sum_{j=1}^{J}\tilde{a}_{lj}(t)\frac{\partial^{2M}u_{Nj}}{\partial x^{2M}},\ y_s\right)=\left(\sum_{j=1}^{J}\tilde{a}_{lj}(t)f_j(u_N),y_s\right),$$
$$(u_{Nl}(x,0),y_s)=(\varphi_l,y_s),\quad l=1,2,\cdots,J;\quad s=1,2,\cdots,N,\tag{13}$$

或

$$\alpha'_{Nsl}(t)+(-1)^M\left(\sum_{j=1}^{J}\tilde{a}_{lj}(t)\sum_{n=1}^{N}\alpha_{Nn}(t)y_n^{(2M)},\ y_s\right)=\left(g_l\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_{Nn}(t)y_n\right),\ y_s\right),$$
$$\alpha_{Nsl}(0)=(\varphi_l,y_s),\quad l=1,2,\cdots,J;\quad s=1,2,\cdots,N\tag{13'}$$

其中　$g_l=\sum_{j=1}^{J}\tilde{a}_{lj}(t)f_j(u_N)$。

把方程(12)或(12′)乘以 $\alpha'_{Nsl}(t)$，再对指标 s 与 l 求和，所得的方程可化为

$$2\left(A(t)\frac{\partial u_N}{\partial t},\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial^M u_N}{\partial x^M},\frac{\partial^M u_N}{\partial x^M}\right)_t=2\left(f(u_N),\frac{\partial u_N}{\partial t}\right) \tag{14}$$

其中

$$\left(f(u_N),\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)=-\left(\operatorname{grad}F(u_N),\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)=-\left(\int_{-D}^{D}F(u_N(x,t))dx\right)_t.$$

因为 $A(t)$ 是非负定的，得到微分不等式

$$\left[\left(\frac{\partial^M u_N}{\partial x^M},\frac{\partial^M u_N}{\partial x^M}\right)+2|F(u_N)|_{L_1}\right]_t\leqslant 0$$

其中 $|F(u_N)|_{L_1}=\int_{-D}^{D}F(u_N(x,t))dx$。这样就有估计式

$$\left\|\frac{\partial^M u_N}{\partial x^M}\right\|_{L_2}+|F(u_N)|_{L_1}\leqslant\|\varphi^{(M)}\|^2_{L_2}+|F(\varphi)|_{L_1}$$

其中 $|F(\varphi)|_{L_1}=\int_{-D}^{D}F(\varphi(x))dx$。

把方程 (13) 或 (13′) 乘以 $\alpha_{Nsl}(t)$，再对 s 与 l 求和，利用分部积分法，把所得的方程化为如下的形式

$$(u_N,u_N)_t+\left(A^{-1}(t)\frac{\partial^M u_N}{\partial x^M},\frac{\partial^M u_N}{\partial x^M}\right)=(A^{-1}(t)f(u_N),u_N).$$

由于 $f(u)$ 的假定

$$(A^{-1}(t)f(u_N),u_N)=(g,u_N)\leqslant a(u_N,u_N)+b,$$

其中 a 与 b 是常数，又因为 $A^{-}(t)$ 非负定，所以

$$(u_N,u_N)_t\leqslant a(u_N,u_N)+b.$$

由此可知 (u_N,u_N) 对 $0\leqslant t\leqslant T$ 与 N 是一致有界的。于是得

引理 1　假定以下条件成立

(1) $A(t)$ 是非奇异，非负定，连续的 $J\times J$ 矩阵函数。

(2) 函数 $f(u)$ 适合以下条件

(i) 对所有 u 值，$F(u)\geqslant 0$ 连续可微，而且

$$f(u)\equiv-\operatorname{grad}F(u).$$

(ii) 对于 $0\leqslant t\leqslant T$，$T>0$，成立

$$(A^{-1}(t)f(u),u)\leqslant a(u,u)+b$$

其中 a，b 为常数。$(u,v)=\int_{-D}^{D}u(x,t)v(x,t)dx$。

(3) $\varphi(x)$ 是以 $2D$ 为周期的已知向量值函数。$\varphi(x)\in W_2^{(M)}[-D,D]$。$|F(\varphi)|_{L_1}<\infty$。

则对每个 N，常微分方程组初值问题 (12)或(12′)(即(13)或 (13′)) 的解存在。并且近似函数 $u_N(x,t)$ 有估计式

$$\|u_N\|_{W_2^{(M)}[-D,D]}\leqslant K_1,\quad |F(u_N)|_{L_1}\leqslant K_2 \tag{15}$$

因而

$$\|u_N\|_\infty\leqslant K_3$$

其中 K_1, K_2, K_3 是对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 与对 N 一致的常数。它们依赖于 a，b。

辅助引理　设 $G(z_1, z_2, \cdots, z_g)$ 为变量 $z_1, z_2, \cdots, z_g$ 的 k 次（$k \geqslant 1$）连续可微函数。又设函数 $z_i(x,t) \in L_\infty([0,T], W_2^{(k)}[-D,D])$（$i = 1, 2, \cdots, J$）$0 < D \leqslant \infty$，则有估计式

$$\int_{-D}^{D} |D_x^k G(z_1(x,t), \cdots, z_j(x,t))|^2 dx \leqslant C(M,k,g) \sum_{i=1}^{J} \|z_i\|^2_{W_2^{(k)}},$$

其中 $M = \max\limits_{i=1,\cdots,g} \max\limits_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ -D \leqslant X \leqslant D}} |z_i(x,t)|$。

可利用 Cauchy 不等式和 Sobolev 型不等式证明此引理。

§2　把方程(12)或(12′)乘以 $a'_{Nsl}(t)\lambda_s^M$，又对 s 与 l 求和，经化简得

$$2\left(A(t)\frac{\partial^{M+1}u_N}{\partial x^M \partial t}, \frac{\partial^{M+1}u_N}{\partial x^M \partial t}\right) + \left(\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right)_t = 2(-1)^M\left(D_x^{2M}f(u_N), \frac{\partial u_N}{\partial t}\right).$$

因为 $A(t)$ 非负定，于是

$$\left(\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right)_t \leqslant (D_x^{2M}f(u_N), D_x^{2M}f(u_N)) + \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right).$$

根据辅助引理，可知

$$(D_x^{2M}f(u_N), D_x^{2M}f(u_N)) \leqslant C_1\|u_N\|_{W_2^{(2M)}} + C_2.$$

于是

$$\left(\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right)_t \leqslant C_1\left(\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right) + C_2\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right). \tag{17}$$

其中 C_1, C_2 依赖于 $\|u_N\|_{L_2}$ 与 $\|u_N\|_\infty$。

另一方面，把(13)或(13′)乘以 $a'_{Nsl}(t)$，又对 s 与 l 求和，可以得到

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right) + (-1)^M\left(A^{-1}(t)\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right) = \left(A^{-1}(t)f(u_N), \frac{\partial u_N}{\partial t}\right).$$

利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right) \leqslant 2\varepsilon\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right) + \frac{1}{4\varepsilon}\left(A^{-1}(t)\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, A^{-1}(t)\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right)$$

$$+ \frac{1}{4\varepsilon}(A^{-1}(t)f(u_N), A^{-1}(t)f(u_N)).$$

取　$\varepsilon = \frac{1}{4}$，得

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, \frac{\partial u_N}{\partial t}\right) \leqslant C_3\left(\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right) + C_4$$

其中 C_3, C_4 依赖于 $|\tilde{a}_{lj}(t)|$ 的极大值与 $\|u_N\|_\infty$。于是

$$\left(\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right)_t \leqslant (C_1 + C_3)\left(\frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}, \frac{\partial^{2M}u_N}{\partial x^{2M}}\right) + (C_2 + C_4)$$

这样，就得到 $\|u_N\|_{W_2^{(2M)}}$ 与 $\left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_{L_2}$ 对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 与对 N 的一致有界性。

把方程(12)或(12′)乘以 $a_{Nsl}(t)\lambda_s^{M+h}$ $(h\geqslant 0)$，于是有

$$2\left(A(t)\frac{\partial^{M+h+1}u_N}{\partial x^{M+h}\partial t},\ \frac{\partial^{M+h+1}u_N}{\partial x^{M+h}\partial t}\right)+\left(\frac{\partial^{2M+h}u_N}{\partial x^{2M+h}},\ \frac{\partial^{2M+h}u_N}{\partial x^{2M+h}}\right)_t$$

$$=2(-1)^M\left(D_x^{2M+h}f(u_N),\ \frac{\partial^{h+1}u_N}{\partial x^h\partial t}\right).$$

把方程(13)或(13′)乘以 $a'_{Nsl}(t)\lambda_s^h$，就有

$$\left(\frac{\partial^{h+1}u_N}{\partial x^h\partial t},\ \frac{\partial^{h+1}u_N}{\partial x^h\partial t}\right)+(-1)^M\left(A^{-1}(t)\frac{\partial^{2M+h}u_N}{\partial x^{2M+h}},\ \frac{\partial^{h+1}u_N}{\partial x^h\partial t}\right)$$

$$=\left(A^{-1}(t)D_x^hf(u_N),\ \frac{\partial^{h+1}u_N}{\partial x^h\partial t}\right).$$

采用上面所用的同样方法，可以证明 $\frac{\partial^{h+1}u_N}{\partial x^h\partial t}$ 与 $\frac{\partial^{2M+h}u_N}{\partial x^{2M+h}}$ 对 x 的 L_2 模也是对 $0\leqslant t\leqslant T$ 与对 N 一致有界。

引理 2　如果引理1的条件满足，又 $f(u)$ 是 $2M+h(h\geqslant 0)$ 次连续可微的，$\varphi(x)\in W_2^{(2M+h)}[-D,D]$，则对 $u_N(x,t)$ 成立下列估计式

$$\|u_N\|_{W_2^{(2M+h)}[-D,D]}\leqslant K_1,\ \left\|\frac{\partial u_N}{\partial t}\right\|_{W_2^{(h)}[-D,D]}\leqslant K_2,\tag{17}$$

其中 K_1,K_2 不依赖于 N 与 $0\leqslant t\leqslant T$。

§3　把方程(13)对 t 作 r $(r\geqslant 1)$ 次微分，得

$$\left(\frac{\partial^{r+1}u_{Nl}}{\partial t},\ y_s\right)+(-1)^M\left(\sum_{j=1}^J\tilde{a}_{lj}(t)\frac{\partial^{2M+r}u_{Nj}}{\partial x^{2M}\partial t^r},\ y_s\right)=(D_t^rg_l(u_N),y_s)$$

$$+(-1)^M\sum_{\alpha=0}^{r-1}\sum_{j=1}^J\binom{r}{\alpha}\left(\tilde{a}_{lj}^{(r-\alpha)}(t)\frac{\partial^{2M+\alpha}u_{Nj}}{\partial x^{2M}\partial t^\alpha},\ y_s\right),$$

乘以 $a_{Nsl}^{(r+1)}(t)\lambda_s^h(h\geqslant 0)$，再对 s 与 l 求和，化简后有

$$\left(\frac{\partial^{h+r+1}u_N}{\partial x^h\partial t^{r+1}},\ \frac{\partial^{h+r+1}u_N}{\partial x^h\partial t^{r+1}}\right)+(-1)^M\left(A^{-1}(t)\frac{\partial^{2M+h+r}u_N}{\partial x^{2M+h}\partial t^r},\ \frac{\partial^{h+r+1}u_N}{\partial x^h\partial t^{r+1}}\right)$$

$$=\left(D_x^hD_t^rg,\ \frac{\partial^{h+r+1}u_N}{\partial x^h\partial t^{r+1}}\right)+(-1)^{M+1}\sum_{\alpha=0}^{r-1}\binom{r}{\alpha}\left((A^{-1}(t))^{(r-\alpha)}\frac{\partial^{2M+h+\alpha}u_N}{\partial x^{2M+h}\partial t^\alpha},\ \frac{\partial^{h+r+1}u_N}{\partial x^h\partial t^{r+1}}\right).$$

利用Cauchy不等式，可导出

$$\left\|\frac{\partial^{h+r+1}u_N}{\partial x^h\partial t^{r+1}}\right\|_{L_2}^2\leqslant(r+2)\left\|A^{-1}(t)\frac{\partial^{2M+h+r}u_N}{\partial x^{2M+h}\partial t^r}\right\|_{L_2}^2+(r+2)\|D_x^hD_t^rg\|_{L_2}^2$$

$$+r(r+2)\sum_{\alpha=0}^{r-1}\binom{r}{\alpha}^2\left\|(A^{-1}(t))^{(r-\alpha)}\frac{\partial^{3M+h+\alpha}u_N}{\partial x^{2M+h}\partial t^\alpha}\right\|_{L_2}^2.$$

不等式右边部份只出现 u_N 对 t 的阶数 $\leqslant r$ 的导数。当对 t 低阶导数有界时，可以推出对 t 的导数的阶数增一阶时导数的有界性质。

引理 3 设引理 1 的条件都满足，并且 $f(u)$ 是 $2rM+h(h\geqslant 0,\ r\geqslant 1)$ 次连续可微的．$\varphi(x)\in W_2^{(2rM+h)}[-D,\ D]$，$A(t)$ 为 $r-1$ 次连续可微的矩阵函数，则对于近似函数 $u_N(x,t)$ 成立估计式

$$\left\|\frac{\partial^\alpha u_N}{\partial t^\alpha}\right\|_{W_2^{(2(r-\alpha)M+h)}[-D,\ D]}\leqslant K,\quad (\alpha=0,1,\cdots,r),$$

其中 K 不依赖于 N 和 $0\leqslant t\leqslant T$．

§4 有了以上引理中的各个估计，可得

定理 1 假定方程组 (6) 与周期边界条件 (10) 适合以下条件

〈1〉 $A(t)$ 是非奇异，非负定的 $J\times J$ 矩阵值函数，对 t 是 $(r-1)$ 次连续可微 $(r\geqslant 1)$．

〈2〉 函数 $f(u)$ k 次连续可微并适合下列条件：

(i) 对所有 u 值 $F(u)\geqslant 0$，且 $f(u)=-\operatorname{grad} F(u)$．

(ii) 对 $0\leqslant t\leqslant T$，$T>0$ 成立

$$(A^{-1}(t)f(u),u)\leqslant a(u,u)+b$$

其中 a 与 b 是常数．

〈3〉 $\varphi(x)$ 是以 $2D$ 为周期的已知向量函数，$\varphi(x)\in W_2^{(k)}[-D,D]$，$|F(\varphi)|_{L_1}<\infty$．

这样，当 $k\geqslant 2M+1$ 时，方程组 (6) 与 (10) 有一个唯一的整体广义解 $u(x,t)$．当 $k\geqslant 4M+1$ 时，方程组 (6) 与周期边界条件 (10) 有一个唯一的整体古典解 $u(x,t)$，它有连续导数 $D_x^sD_t^\alpha u$ $(0\leqslant s+2(\alpha+1)M\leqslant k-1)$ 与广义导数 $D_x^sD_t^\alpha u$ $(0\leqslant s+2\alpha M\leqslant k)$ 其中 $\alpha=0,1,\cdots,r$．

证 由引理 2 知，当 $k=2M+h$ $(h\geqslant 1)$ 时，

$$u_N\in L_\infty([0,T];\ W_2^{(2M+h)}[-D,D]);$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}\in L_\infty([0,T];\ W_2^{(h)}[-D,D]).$$

由此，存在函数 $u(x,t)$，当 $N\to\infty$ 时，$u_N(x,t)$ 的子序列收敛于 $u(x,t)$，而且此序列的各阶导数相应地收敛或弱收敛于 $u(x,t)$ 的导数．由此得到整体广义解的存在性．

当 $k=2rM+h$ $(r\geqslant 1,\ h\geqslant 1)$ 由引理 3 知

$$\frac{\partial^\alpha u_N}{\partial t^\alpha}\in L_\infty([0,T];W_2^{(2(r-\alpha)M+h)}[-D,D]),\quad \alpha=0,1,\cdots,r.$$

由此，$u(x,t)$ 有连续导数 $D_x^sD_t^\alpha$ $(0\leqslant s+2(\alpha+1)M\leqslant k-1,\ \alpha=0,1,\cdots,r)$ 和广义导数 $D_x^sD_t^\alpha u$ $(0\leqslant s+2\alpha M\leqslant k)$．当 $r\geqslant 2$ 时，即得古典光滑解．

设 (7) 与 (10) 存在两个解 $u(x,t)$，$v(x,t)$ 记 $z(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$，于是 $z(x,t)$ 满足下列方程

$$z_t+(-1)^MA^{-1}(t)z_{x^{2M}}=A^{-1}(t)[f(u)-f(v)],$$
$$z(x+2D,t)=z(x,t),$$
$$z(x,0)=0.$$

将上列方程与 z 作内积，对 x 作积分并利用分部积分可得

$$\frac{1}{2}(z,z)_t+(z_{x^M},A^{-1}(t)z_{x^M})=(z,A^{-1}(t)[f(u)-f(v)])$$

利用 $A^{-1}(t)$ 的非负定以及中值定理可得

$$\frac{1}{2}(z,z)_t \leqslant (z, A^{-1}(t)\int_0^1 f'(v+\xi z)z\,d\xi)$$

其中 f' 表示 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial f}{\partial u}$。由于解 u 和 v 的有界及 f' 连续，由上式导出

$$(z,z)_t \leqslant \text{Const.}\,(z,z).$$

由初值 $z(x,0)=0$ 及 Gronwall 不等式得 $z(x,t)\equiv 0$，$\forall t>0$。由此证明了唯一性。

定理 2　设方程组 (6) 与初值条件 $u(x,0)=\varphi(x)$，$(-\infty<x<\infty)$ 适合下列条件：

(1) $A(t)$ 为非奇异，非负定的 $r-1$ 次 $(r\geqslant 1)$ 连续可微的 $J\times J$ 矩阵值函数。

(2) 函数 $f(u)$ 是 k 次连续可微的，并且

(i) $f(u)\equiv -\operatorname{grad} F(u)$，对所有 u 值 $F(u)\geqslant 0$。

(ii) 对任意 $D>0$，$(A^{-1}(t)f(u),u)\leqslant a(u,u)+b$，其中 $(u,v)=\int_{-D}^{D}\langle u(x,t), v(x,t)\rangle dx$，$a$ 与 b 为不依赖于 D，与 $0\leqslant t\leqslant T$ 无关的常数。

(3) $\varphi(x)\in W_2^{(k)}(-\infty,\infty)$，$|F(\varphi)|_{L_1}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\varphi(x))dx<\infty$。

则当 $k\geqslant 2M+1$ 时，方程组 (6) 的 Cauchy 问题有唯一的整体广义解 $u(x,t)$，$(x,t)\in(-\infty,\infty)\times[0,T]$。当 $k\geqslant 4M+1$ 时，方程组 (6) 的 Cauchy 问题有唯一整体古典解 $u(x,t)$。而且 $u(x,t)$ 有连续导数 $D_x^s D_t^\alpha u$ $(0\leqslant s+2(\alpha+1)M\leqslant k-1;\ \alpha=0,1,\cdots,r)$ 与广义导数 $D_x^s D_t^\alpha u$ $(0\leqslant s+2\alpha M\leqslant k;\ \alpha=0,1,\cdots,r)$。并且解 $u(x,t)$ 与其导数 $D_x^s D_t^\alpha u\in L_\infty([0,T],L_2(-\infty,\infty))$，$(0\leqslant s+2\alpha M\leqslant k;\ \alpha=0,1,\cdots,r)$。

证明略。

参　考　文　献

[1] Scott, A. C., Chu, F. Y. F., Mclaughlin, D. W., The soliton, a new Concept in applied science, *Proc. IEEE* 61(1973), 1443—1483.

[2] Ablowitz, M. J., Lecture on the inverse scattering transform, *Studies in Appl. Math.*, 58 (1978), 17—94.

[3] Yan-chow Ma, On the multi-soliton solutions of some nonlinear evolution equations, *Studies in Appl. Math.*, 60 (1979), 73—82.

[4] Zhou Yu-lin, Fu Hong-yuan, Periodic boundary problems and initial value problems for the semilinear systems of generalized Schrödinger type of higher order, Preprint of Beijing Symposium on Diff. Geometry and P. D. E., 1980.

[5] 周毓麟，符鸿源，非线性高阶广义 Schrödinger 型方程组的周期边界问题，数学物理学报 Vol.1, №2 (1981), 156—164.

[6] Friedman, A., Partial Differential Equation, 1969.

[7] Adams, R. A., Sobolev Spaces, 1975.

A Class of Generalized Nonlinear Schrödinger Systems of Higher Order

Zhou Yulin (周毓麟) *Fu Hongyuan* (符鸿源)

Abstract

In this paper we consider a class of semilinear systems of partial differential equations of higher order

$$A(t)u_t + (-1)^M u_{x^{2M}} = f(u),$$

which contain a class of the nonlinear Schrödinger equations, where the matrix A(t) is nonsingular, nonnegative definite and $f(u)$ satisfy the conditions (i) $f(u) = -\text{grad } F(u)$, $F(u) \geqslant 0$ (ii) $(g(u), u) \leqslant a(u,u) + b$, $g = A^{-1}f$. The existence, uniqueness and regularity of solutions for periodic boundary problems and Cauchy problems in global are proved.