第3卷 第3期
1983年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.3
July, 1983

非线性积分方程解的指数与解的个数*

梁方豪

（山东大学数学系）

本文对 Урысон 型非线性积分方程，给出了一个由 Fredholm 行列式表示其解的指数的公式，并且讨论了利用 Fredholm 行列式判断其解的个数的方法.

引理1 设线性积分算子 $A:C(G)\to C(G)$

$$(Au)(x)=\int_G K(x,y)u(y)dy \tag{1}$$

其中 $G\subset R^N$ 为有界闭域，$K(x,y)$ 在 $G\times G$ 上连续. 从而 A 全连续，相应于 A 的 Fredholm 行列式 F-det $[I-A]$ 为

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\iint\limits_{G\times G\times\cdots\times G}\cdots\int\begin{vmatrix}K(x_1,x_1) & K(x_1,x_2) & \cdots\cdots & K(x_1,x_n)\\ K(x_2,x_1) & K(x_2,x_2) & \cdots\cdots & K(x_2,x_n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ K(x_n,x_1) & K(x_n,x_2) & \cdots\cdots & K(x_n,x_n)\end{vmatrix}dx_1dx_2\cdots dx_n \tag{2}$$

若 F-det $[I-A]\neq 0$，则 $I-A$ 有唯一零点 O，并且

$$\text{index}(I-A,0)=\text{sgn F-det}[I-A] \tag{3}$$

证明 把 G 分成 n 个两两无交的可测集 $G_1,G_2,\cdots,G_n$，并且使 $n\to\infty$ 时 $\max\{\text{diam}(G_i),\ i=1,2,\cdots,n\}\to 0$. 这是可以做到的. 记 $m_i=\text{mes}\,G_i$. 作

$$e_i(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in G_i \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x\in G\backslash G_i \text{ 时}\end{cases}$$

在有界可测函数空间 $M(G)$ 中，$\{e_i(x),i=1,2,\cdots,n\}$ 张成 n 维子空间 $M_n(G)$.

任取 $(\xi_i,\eta_j)\in G_i\times G_j$，记 $k_{ij}=K(\xi_i,\eta_j)$，作阶梯函数 $K_n(x,y)$，使在 $G_i\times G_j$ 上取常数值 k_{ij}，$i,j=1,2,\cdots,n$. 再作算子 $A_n:M(G)\to M_n(G)$

$$(A_nu)(x)=\int_G K_n(x,y)u(y)dy \tag{4}$$

A_n 在 $M_n(G)$ 上的局限记为 $\bar{A}_n$，则 $I-\bar{A}_n$ 为 $M_n(G)\to M_n(G)$ 的线性算子. 在基底 $\{e_i(x),i=1,2,\cdots,n\}$ 下，经计算可知 $I-\bar{A}_n$ 的矩阵为

* 1981年7月16日收到.

$$\begin{matrix} 1-k_{11}m_1 & -k_{12}m_2 & \cdots\cdots & -k_{1n}m_n \\ -k_{21}m_1 & 1-k_{22}m_2 & \cdots\cdots & -k_{2n}m_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -k_{n1}m_1 & -k_{n2}m_2 & \cdots\cdots & 1-k_{nn}m_n \end{matrix},$$

显然 $I-\bar{A}_n$ 的 Jacobi 行列式 J-det $[I-\bar{A}_n]$ 就是以上矩阵的行列式。

根据 [1] §15 把 J-det $[I-\bar{A}_n]$ 展开，并把 $K_n(x,y)$ 代入(2)计算，可知 J-det $[I-\bar{A}_n]$ = F-det $[I-A_n]$。另外，从 $n\to\infty$ 时 $K_n(x,y)$ 一致收敛于 $K(x,y)$ 可推知 F-det$[I-A_n]$ $\to$F-det$[I-A]$。从而 $n\to\infty$时 J-det$[I-\bar{A}_n]\to$F-det$[I-A]$。由此，若 F-det$[I-A]\neq 0$，当 n 充分大时必 J-det$[I-\bar{A}_n]\neq 0$ 并且

$$\text{sgn J-det}[I-\bar{A}_n]=\text{sgn F-det}[I-A]. \tag{5}$$

此时，由 Cramer 法则知 $I-\bar{A}_n$ 有唯一零点 O。又由指数定义及 [2] 结论 17.6 的证明过程知

$$\text{index }(I-\bar{A}_n,0)=\text{sgn J-det}[I-\bar{A}_n]. \tag{6}$$

另一方面，由 [1] §19，F-det $[I-A]\neq 0$ 时 $I-A$ 有唯一零点 O，把 A 按 (1) 式扩张为算子 $\tilde{A}:M(G)\to C(G)\subset M(G)$，$I-\tilde{A}$ 也有唯一零点 O。设 $\Omega\subset M(G)$ 为含 0 的任意有界开集，当 $n\to\infty$ 时 $\|\tilde{A}u-A_nu\|$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致趋于 0。这是因为 $u\in\bar{\Omega}$ 时

$$\|\tilde{A}u-A_nu\|\leqslant\sup_{u\in\Omega}\|u\|\cdot\sup_{x\in G}\int_G|K(x,y)-K_n(x,y)|dy$$

当 $n\to\infty$ 时上式右端趋于 0。

由此，$\tilde{A}$ 全连续，并且由 Leray-Schauder 度的定义（[2]§21.1），当 n 充分大时 deg$(I-\tilde{A},\Omega,0)=\deg(I-\bar{A}_n,\Omega\cap M_n,0)=\text{index}(I-\bar{A}_n,0)$。由简化定理，$\deg(I-\tilde{A},\Omega,0)=\deg(I-A,\Omega\cap C,0)=\text{index}(I-A,0)$。从而

$$\text{index}(I-A,0)=\text{index}(I-\bar{A}_n,0). \tag{7}$$

由 (5)、(6)、(7) 即得 (3) 式。

定理 1 设 Урысон 型非线性积分算子 $F:\bar{\Omega}\to C(G)$

$$(Fu)(x)=\int_G K[x,y,u(y)]dy, \tag{8}$$

其中 $G\subset R^N$ 为有界闭域，$K(x,y,u)$ 及 $K'_u(x,y,u)$ 在 $G\times G\times[-R,R]$ 上连续，$\Omega\subset C(G)$ 为有界开集，$u\in\Omega$ 时有 $\|u\|\leqslant R$。这时 F 全连续且可微，对任意 $u\in\Omega$ Fréchet 导算子 $F'(u)$ 是以 $K'_u[x,y,u(y)]$ 为核的线性积分算子。对于这样的算子 F 我们有以下结论：

(i) 若 u 是 $I-F$ 的正则点，则 F-det $[I-F'(u)]\neq 0$；反之亦然。

(ii) 若 $I-F$ 的零点 $\hat{u}$ 是正则点，则 $\hat{u}$ 是 $I-F$ 的孤立零点，并且

$$\text{index}(I-F,\hat{u})=\text{sgn F-det}[I-F'(\hat{u})]. \tag{9}$$

(iii) 若 0 是 $I-F$ 的正则值并且 $0\bar{\in}(I-F)(\partial\Omega)$，则 $I-F$ 在 Ω 内有有限个零点。设 $I-F$ 在 Ω 内恰有 n 个零点 $\{\hat{u}_i, i=1,2,\cdots,n\}$，则

$$\deg(I-F,\Omega,0)=\sum_{i=1}^{n}\text{sgn F-det}[I-F'(\hat{u}_i)] \tag{10}$$

（当 $n=0$ 时此式右端为 0）.

证明　(i) 由[1]§19, §24 及正则点的定义（[2]§16），结论 (i) 是显然的.

(ii) 若 $I-F$ 的零点 $\hat{u}$ 是正则点，则 $\text{F-det}[I-F'(\hat{u})]\neq 0$. 从而 $I-F'(\hat{u})$ 有有界逆，即 I 不是 $F'(\hat{u})$ 的固有值. 由 [2] 定理 21.8 知 $\hat{u}$ 是 $I-F$ 的孤立零点，并且 $\text{index}(I-F,\hat{u})=\text{index}(I-F'(\hat{u}),0)$，再由引理 1 即得 (9) 式.

(iii) 由正则值的定义（[2]§16），(iii) 的条件等价于：$I-F$ 的零点必在 Ω 内且为 $I-F$ 的正则点. 从而 $I-F$ 的零点集 U 为孤立点集. 再由 F 全连续知 U 是自列紧的. 从而可知 $I-F$ 在 Ω 内有有限个零点. 若 $I-F$ 在 Ω 内恰有 n 个零点 $\{\hat{u}_i, i=1,2,\cdots,n\}$，由指数定义及度数的可加性知 $\deg(I-F,\Omega,0)=\sum_{i=1}^{n}\text{index}(I-F,\hat{u}_i)$（当 $n=0$ 时此式右端为 0），再由 (9) 式即得 (10) 式.

I. Fredholm 利用 F 氏行列式讨论了线性积分方程解的个数以及求解问题. 本文定理 1 提供了利用 F 氏行列式判断非线性积分方程解的个数的可能. 例如：若已算出 $\deg(I-F,\Omega,0)$ 及 $I-F$ 在 Ω 中的某些零点，再由 F 氏行列式算出这些零点的指数，如果指数的和与 $\deg(I-F,\Omega,0)$ 不符，便知 $I-F$ 在 Ω 中还有其他零点. 又例如：

定理 2　对于定理 1 中所给定的 Урысон 型积分算子 F，如果泛函 $d(u)=\text{F-det}[I-F'(u)]$ 在 Ω 上恒正（或恒负），并且 $I-F$ 在 $\partial\Omega$ 上无零点，那么 $I-F$ 在 Ω 中零点的个数恰为 $\deg(I-F,\Omega,0)$（或 $-\deg(I-F,\Omega,0)$）.

对上述 Урысон 型积分算子 F 来说，定理 2 所说的方法要比通常所用的压缩映象原理更具有一般性：可以证明，当 F 满足 Lipschitz 条件能用压缩映象原理时，也必能用定理 2 判知同样的结果. 特别的，定理 2 能用于 F 不满足 L 氏条件的情况. 下面的定理 3 及下例即属于这种情况.

设 Hammerstein 型非线性积分方程

$$u(x)=\int_a^b K(x,y)f[y,u(y)]dy=(Fu)(x), \tag{11}$$

其中 $K(x,y)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，$f(x,u)$ 与 $f'_u(x,u)$ 在 $[a,b]\times(-\infty,+\infty)$ 上连续. 这时

$$\begin{aligned} d(u) &= \text{F-det}[I-F'(u)] \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b K_n(x_1,\cdots,x_n)f'_u[x_1,u(x_1)]\cdots f'_u[x_n,u(x_n)]dx_1\cdots dx_n \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(u), \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$K_n(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} K(x_1,x_1) & \cdots & K(x_1,x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K(x_n,x_1) & \cdots & K(x_n,x_n) \end{vmatrix},$$

定理 3　对方程 (11)，假定

(i) 对任意 $v\in C[a,b]$，$K(x,y)$ 总满足 $\int_a^b\int_a^b K(x,y)v(x)v(y)dxdy\geq 0$,

(ii) 对任意固定的 $x\in[a,b]$，$f(x,u)$ 都是 u 的单调不增函数,

则对于$C[a,b]$的任意有界开集Ω，只要$0\bar{\in}(I-F)(\partial\Omega)$，方程（11）在$\Omega$中解的个数恰为$\deg(I-F,\Omega,0)$。

假定除（i）与（ii）外还有（iii）$K(x,y)\geqslant 0$，$f(x,u)\geqslant c$（c为一常数）。则方程（11）在$C[a,b]$中有唯一解。

证明 在（12）式中，由（i）可推知$K_n(x_1,\cdots,x_n)$恒非负，由（ii）知$f'_u(x,u)$恒非正，从而$a_n(u)$恒非负，$d(u)$恒正。由定理2，定理3前一半得证。

由（ii）与（iii）可推知F为$C[a,b]$上的反序算子。取ψ，$\varphi\in C[a,b]$，使$\psi(x)<\int_a^b K(x,y)\cdot c dx$，$\varphi(x)>(F\psi)(x)$，设$\Omega=\{u|u\in C[a,b],\ \psi(x)<u(x)<\varphi(x)\}$，$\Omega$为有界凸开集。方程（11）在$C[a,b]$中的解都在$\Omega$中，并且$F$映$\bar{\Omega}$到$\Omega$。由[2]定理21.3及推论的证明过程知$\deg(I-F,\Omega,0)=1$。由定理3的前一半，后一半得证。

对于具体给定的型（11）的方程，可以具体计算拓扑度及F氏行列式的正负来判断解的个数。

例
$$u(x)=\int_0^1\sqrt{3-(x-y)^2}\cdot u^2(y)\,dy=(Fu)(x),\tag{13}$$
此方程有唯一非零连续解。

证明 利用[3]定理2证明中的方法，可算出方程（13）在$C[0,1]$中的非零解属于$\Omega=\{u|0.48<u(x)<0.62\}\cup\{u|0.51<u(x)<0.65\}$，并且$\deg(I-F,\Omega,0)=-1$。

$d(u)$的表示式为（12），对此式中的$K_n(x_1,\cdots,x_n)$，利用Hadamard不等式可作出估计：$|K_n(x_1,\cdots,x_n)|\leqslant nM(M-m)^{n-1}(n-1)^{\frac{n-1}{2}}$，其中$M$、$m$分别为$|K(x,y)|$的上、下确界。利用此估计可算出$d(u)$在$\Omega$上的值恒为负，由定理2知方程（13）有唯一非零连续解。

本文在郭大钧教授指导下完成，在此谨表谢意。

参 考 文 献

[1] Lovitt, W. V., Linear integral equations, New York (1924).

[2] 陈文嫄，非线性泛函分析，兰州大学数学力学系(1980).

[3] 郭大钧，Hammerstein型非线性积分方程的非零解，科学通报，24:5 (1979), 193—197.

On the Index of a Solution and Number of Solutions of Nonlinear Integral Equation

Liang Fanghao（梁方豪）

Abstract

In this paper, we give a formula by which we can calculate the index of a solution of Урысон nonlinear integral equation with Fredholm's determinant. And further, we discuss the method to estimate the number of solutions of Урысон equation with Fredholm's determinant.