第3卷 第3期
1983年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.3
July, 1983

凯雷—徐氏数、卡里兹数及高次0差渐近展开的精化*

欧阳植

（吉林大学）

徐利治在关于n次0差渐近展开的注记[1]一文引理2中定义了一类数，这类数被英国统计学家F. N. David和D. E. Barton命名为凯雷—徐氏数。这类数在组合计算中有类似于斯特林数和贝努里数的作用，这在"组合机会"一书中已有阐述[2]。本文将凯雷—徐氏数进行了推广，并给出组合解释。证明了卡里兹数可以用凯雷—徐氏数的线性组合来表达，以及给出了n次0差渐近展开公式的一种精化形式。

1 凯雷—徐氏数（简记为C-H数）

从集合$(1,2,\cdots,n)$中任取k个不同元素相乘，所有的k个元素积的和记为$S_k(n)$，徐利治证明了有如下等式[1]：

$$S_k(n)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+j}\lambda(k,j)\binom{n+j}{k+j}.$$

其中系数$\lambda(k,1)$，$\lambda(k,2)$，…满足递推关系

$$\lambda(k+1,j)=j\lambda(k,j)+(k+j)\lambda(k,j-1).$$

$$\lambda(0,0)=1;\ \lambda(0,k)=\lambda(k,k+1)=0,\quad k\geqslant 1$$

$$\lambda(k,1)\equiv 1,\quad k\geqslant 1.$$

F. N. David和D. E. Barton命名

$$\left(\frac{e^x-1-x}{x^2/2}\right)^m=\sum_{r=0}^{\infty}C_r^{(-m)}\frac{x^r}{r!}$$

中的$x^r/r!$的系数$C_r^{(-m)}$为凯雷—徐氏数，$C_r^{(-j)}$与$\lambda(k,j)$有如下关系

$$\lambda(k,j)=\frac{(k+j)!}{(k-j)!j!2^j}C_{k-j}^{(-j)}.$$

2 广义C-H数

令
$$h_{s+1}(x)=\frac{e^x-1-x-\cdots-x^s/s!}{x^{s+1}/(s+1)!},\quad (s\geqslant 0).$$

*1982年1月29日收到.

定义 对于正整数n，称

$$[h_{s+1}(x)]^{n}=\sum_{r=0}^{\infty}C_{[s+1],r}^{(-n)}\frac{x^r}{r!}$$

中的系数$C_{[s+1],r}^{(-n)}$为$[s+1]$级负n阶C-H数，

$$[h_{s+1}(x)]^{-n}=\sum_{r=0}^{\infty}C_{[s+1],r}^{(n)}\frac{x^r}{r!}$$

中的系数$C_{[s+1],r}^{(n)}$为$[s+1]$级正n阶C-H数。

由定义可得递推公式如下：

$$C_{[s+1],r}^{(-n)}=\frac{nr}{r+n(s+1)}C_{[s+1],r-1}^{(-n)}+\frac{n(s+1)}{r+n(s+1)}C_{[s+1],r}^{(1-n+1)}.$$

$$C_{[s+1],r}^{(n+1)}=\left(1-\frac{r}{n(s+1)}\right)C_{[s+1],r}^{(n)}-\frac{r}{s+1}C_{[s+1],r-1}^{(n)}.$$

$$C_{[s+1],r}^{(n)}=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\frac{n^{[j]}}{(s+2)^j}\binom{r}{j}C_{[s+2],r-j}^{(-j)}.$$

在此顺便指出“组合机会”一书（1962年版）p.289表2里的数$C_4^{(-6)}$是错误的，此数就是广义C-H数$C_{[2],4}^{(-6)}$，正确结果应为2221/90。

C-H数的组合意义。设$A_r(n,k)$记n个不同球，全部放入k个箱子里（$k<n$），要求每个箱子里至少有$r(>1)$个球的放法数，则有

$$A_r(n,k)=\frac{n!}{(r!)^k(n-rk)!}C_{[r],n-rk}^{(-k)}.$$

卡里兹定义了一类卡里兹数$B_1(k,j)$，$B(k,j)$，它们是由如下递推公式所决定[3]

$$B_1(k,j)=(2k-j)B_1(k-1,j-1)+jB_1(k-1,j),\quad(1\leqslant j\leqslant k)$$

$$B_1(1,1)=1;\quad B_1(1,j)=0,\quad j>1.$$

$$B(k,k-j+1)=B_1(k,j),\quad(1\leqslant j\leqslant k)$$

卡里兹证明了第一类和第二类斯特林数$S_1(n,n-k)$和$S(n,n-k)$与$B_1(k,j)$和$B(k,j)$有如下关系

$$S_1(n,n-k)=\sum_{j=1}^{k}B_1(k,j)\binom{n+j-1}{2k}.\quad B_1(k,k-j+1)=\sum_{t=0}^{j}(-1)^{j-t}\binom{2k+1}{j-t}S_1(t+k,t).$$

$$S(n,n-k)=\sum_{j=1}^{k}B(k,j)\binom{n+j-1}{2k}.\quad B(k,k-j+1)=\sum_{t=0}^{j}(-1)^{j-t}\binom{2k+1}{j-t}S(t+k,t).$$

不难证明卡里兹数与C-H数存在关系式：

$$B(k,k-j+1)=\sum_{t=0}^{j}(-1)^{j-t}\binom{2k+1}{j-t}\binom{t+k}{k}C_{[1],k}^{(-t)}$$

3　高次0差渐近展开的精化

徐利治已求得高次0差的展开式为[1]：

$$\Delta^n O^{n+k} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{k!}\left(\frac{n^2}{2}\right)^k\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+\frac{g_1(k)}{n}+\frac{g_2(k)}{n^2}+\cdots+\frac{g_t(k)}{n^t}+O(n^{-t-1})\right]$$

其中 $g_1(k), g_2(k), \cdots$ 是关于 k 的多项式。徐利治已经求出了 $g_1(k)$，$g_2(k)$，$g_3(k)$。现将 $g_4(k)$，$g_5(k)$ 与原已求得的 $g_1(k)$，$g_2(k)$，$g_3(k)$ 一齐列出如下：

$$g_1(k) = \frac{1}{12}(8k^2+4k+1), \qquad g_2(k) = \frac{1}{288}(64k^4-40k+1),$$

$$g_3(k) = \frac{1}{51840}(2560k^6-3840k^5+832k^4-4032k^3+8392k^2-3732k-139),$$

$$g_4(k) = \frac{1}{2488320}(20480k^8-81920k^7+98304k^6-91136k^5$$
$$+309888k^4-535808k^3+395456k^2-121936k-571),$$

$$g_5(k) = \frac{1}{209018880}(229376k^{10}-1720320k^9+4616192k^8$$
$$-6250496k^7+11865088k^6-34913792k^5+61744512k^4$$
$$-60947072k^3+34883384k^2-9554836k+163879).$$

参　考　文　献

[1] L. C. Hsu, Note on an asymptotic expansion of the nth difference of zero, *Annals of Math. Stat.*, Vol.19, (1948), No.2, pp.273-276.

[2] F. N. David and D. E. Barton, Combinatorial Chance, 1962.

[3] L. Carlitz, Some numbers related to the Stirling numbers of the first and Second Kind, Univ. Beograd. Publ. Elektrotekn. FAK., *Ser. Mat.* Fiz., No.544-No.576 (1976), 49-55.

Cayley-Hsu Numbers, Carlitz Numbers and a Refinement of an Asymptotic Expansion for $\Delta^n O^{n+k}$

Eu Yang Zhi

Abstrtct

In this paper, we generalize Cayley-L. C. Hsu Number and give it the recurrence formula. We show that Carlitz Number may be represented by the linear Combination of Cayley-L. C. Hsu Numbers. In the last part, we give a refinement of an asymptotie expansion for $\Delta^n O^{n+k}$.