第3卷 第3期 数学研究与评论 Vol.3 No.3
1983年7月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION July, 1983

四阶Λ-插值样条的逼近度和渐近式*

沙震 吴正昌

(浙江大学)

设 $-\infty<a<b<+\infty$，用 Δ 表示区间 $[a,b]$ 的任一分划，

$$\Delta:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b \tag{0.1}$$

记 $h_i=x_{i+1}-x_i\,(i=0,1,\cdots,n-1)$； $h=\max\limits_i h_i$； $R_\Delta=\dfrac{h}{\min\limits_i h_i}$。

任给一微分算子 $\Lambda=D^k+\sum\limits_{j=0}^{k-1}a_j(x)D^j$，其中 $D=\dfrac{d}{dx}$，$a_i(x)\in C[a,b]$。我们说 $\tau(x)$ 是对应于分划 Δ 的 Λ- 样条，如果它满足下述条件：(i) $\tau(x)\in C^{k-2}[a,b]$； (ii) $\tau(x)\in C^k(x_i,x_{i+1})$ 且 $\Lambda\tau(x)=0$，$x\in(x_i,x_{i+1})$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$。Λ- 样条的全体我们记为 $\mathscr{L}(\Delta,\Lambda)$。

1973年 J.W.Jerome[1] 指出，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在有界的 k 阶导数，且 $R_\Delta\leqslant\beta$，则存在 Λ- 样条 $\tau(x)$ 有

$$\sup_{x\in[a,b]}|D^jf(x)-D^j\tau(x)|\leqslant K\cdot h^{k-j}\cdot\sup_{y\in[a,b]}|\Lambda f(y)|,\quad 0\leqslant j\leqslant k-1,$$

这里 $\tau(x)$ 并非是 $f(x)$ 的插值样条。

[2]—[5] 中对特殊的 Λ- 样条即所谓 L- 样条作了深入的研究．从[4]可知当分划满足 $R_\Delta\leqslant\beta$ 时，$f(x)\in C^{2m}[a,b]$，$\tau(x)$ 是 L- 插值样条，有

$$\|D^j(f-\tau)\|_{L^\infty[a,b]}\leqslant K\cdot h^{2m-j-\frac{1}{2}},\quad j=0,1,\cdots,2m-1. \tag{0.2}$$

我们指出(0.2)式中并没有达到饱和阶，即差一个“$\frac{1}{2}$”．本文研究一般的四阶微分算子决定的 Λ- 插值样条，证明了它的逼近度可以达到饱和阶．

下面讨论四阶微分算子 $\Lambda=D^4+a_3(x)D^3+a_2(x)D^2+a_1(x)D+a_0(x)I$，$a_i(x)\in C[a,b]$，$i=0,1,2,3$．我们考虑(I)型插值，设给定一串实数 f_i，$i=0,1,\cdots,n$ 及 f_0'，f_n'．我们称 $\tau(x)$ 是(I)型 Λ- 插值样条，如果它满足下述插值条件：

(i) $\tau(x)\in\mathscr{L}(\Delta,\Lambda)$； (ii) $\tau'(x_0)=f_0'$，$\tau'(x_n)=f_n'$；

(iii) $\tau(x_i)=f_i$，$i=0,1,\cdots,n$. (0.3)

我们证明了当 $f\in C^4[a,b]$ 时有

$$\|D^i(f-\tau)\|\leqslant K\|f\|_4\cdot h^{4-i}),\ i=0,1,2,3.$$

* 1981年6月2日收到.

并且证明了当 $a_3\equiv a_2\equiv 0$ 时，若 $R_\Lambda=1$，$f\in C^4[a,b]$，则有

$$\tau''(x)-f''(x)=-\frac{f^{(4)}(x)}{2}B_2(u)h^2-\frac{h^2}{4}\int_0^1[a_1(t)f'(t)+a_0(t)f(t)]d[(1-u)\mu_{[nx]}(t)+u\mu_{[nx]+1}(t)]+\frac{h^2}{2}[B_2(u)-\frac{1}{6}](a_1(x)f'(x)+a_0(x)f(x))+o(h^2)\tag{0.4}$$

（这里 $0\leqslant u<1$，$\int_0^1|d\mu_i|\leqslant 1$）。

可见如果又有 $a_1\equiv a_0\equiv 0$ 时，(0.4)式就退化为熟知的三次样条的渐近式：

$$\tau''(x)-f''(x)=-\frac{f^{(4)}(x)}{2}h^2B_2(u)+o(h^2)\tag{0.5}$$

从 (0.4) 又易知如果 $f(x)=K\ \exp(-\int_a^x\frac{a_0(t)}{a_1(t)}dt)$，此时的(0.5)式仍是成立的。关于$\Lambda$-样条的这些结果，在已有的文献中尚未见到，它包含了通常的三次样条（$\Lambda=D^4$）和张力样条（$\Lambda=D^4-\rho^2D^2$）等等的结果。类似于通常的三次样条，可以提出其它类型的边界条件，分析的方法完全类似，在此从略了。

本文采用的记号 $f=O(h^\alpha)$ 及 $f=O(\|g\|)h^\alpha$。分别表示存在绝对常数K，使有 $|f|\leqslant K\cdot h^\alpha$ 及 $|f|\leqslant K\cdot\|g\|h^\alpha$。并约定凡绝对常数，本文常采用字母$K$，其在不同的位置可以表示不同的数，这样可以避免记号过多。

§1. 某些记号

首先对微分算子 Λ 作某些一般性的假定，Λ 的零空间记为 N_Λ，存在线性无关函数 φ，ψ，ξ，$\eta\in N_\Lambda$。本文假定它们均属于 $C^6[a,b]$。目的是为了讨论 $\tau(x)$ 的渐近式的需要，实际上在逼近度的讨论中，假定它们属于 $C^5[a,b]$已足够了。

下面先列出本文常用的一些记号。$f^{(j)}(x_i)\overset{\text{def}}{=}f_i^{(j)}$；$\|f\|=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$；若 $f\in C^j[a,b]$，则记 $\|f\|_j=\sum\limits_{i=0}^{j}\|f^{(i)}\|$；设 $\mathbf{B}=(b_{ij})$是 $m\times m$ 矩阵，定义$\|\mathbf{B}\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_j|b_{ij}|$。我们用记号 $\det(\varphi^{(i_1)}(x_1),\ \varphi^{(i_2)}(x_2),\ \varphi^{(i_3)}(x_3),\ \varphi^{(i_4)}(x_4))$表示行列式

$$\begin{vmatrix}\varphi^{(i_1)}(x_1) & \psi^{(i_1)}(x_1) & \xi^{(i_1)}(x_1) & \eta^{(i_1)}(x_1)\\ \varphi^{(i_2)}(x_2) & \psi^{(i_2)}(x_2) & \xi^{(i_2)}(x_2) & \eta^{(i_2)}(x_2)\\ \varphi^{(i_3)}(x_3) & \psi^{(i_3)}(x_3) & \xi^{(i_3)}(x_3) & \eta^{(i_3)}(x_3)\\ \varphi^{(i_4)}(x_4) & \psi^{(i_4)}(x_4) & \xi^{(i_4)}(x_4) & \eta^{(i_4)}(x_4)\end{vmatrix}$$

本文常遇的七个函数，我们记在下面：

$r(x)=\det(\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\varphi'''(x))$，$R(x)=\det(\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi^{(4)}(x))$，

$W(x)=\det(\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\varphi^{(5)}(x))$，$U(x)=\det(\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi'''(x),\ \varphi^{(4)}(x))$，

$Q(x)=\det(\varphi(x),\varphi''(x),\varphi'''(x),\ \varphi^{(4)}(x))$，$P(x)=\det(\varphi(x),\varphi''(x),\ \varphi'''(x),\ \varphi^{(5)}(x))$，

$t(x)=\det(\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x),\ \varphi^{(4)}(x))$。

显然 $r(x)$ 即为 φ,ψ,ξ,η 的 Wronski 行列式，因此有 $r(x)\neq 0$，$x\in[a,b]$。我们设 $\min\limits_{a<x<b}|r(x)|=r>0$。显然又有

$$R(x)=r'(x) \tag{1.1}$$

$$a_3(x)=-\frac{R(x)}{r(x)},\ a_2(x)=\frac{u(x)}{r(x)},\ a_1(x)=-\frac{Q(x)}{r(x)},\ a_0(x)=\frac{t(x)}{r(x)} \tag{1.2}$$

$$\frac{W(x)}{r(x)}=(a_3)^2-a_3'-a_2 \tag{1.3}$$

记 $\Delta_i=\det(\varphi_i,\ \varphi_{i+1},\ \varphi_i'',\ \varphi_{i+1}'')$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$。利用泰乐展开及行列式的基本性质，易得

$$\Delta_i=r_ih_i^2+\frac{R_i}{2}h_i^3+\frac{W_i}{6}h_i^4+O(h_i^5) \tag{1.4}$$

上式右端的"O"，它与形状为 $\det(\varphi,\varphi'',\varphi''',\varphi^{(4)})$ 等有限个值有关，可见当 $h=\max\limits_i h_i$ 足够小时有

$$\Delta_i\neq 0 \qquad (i=0,1\cdots,n-1) \tag{1.5}$$

本文总假定(1.5)式成立，从(1.4)有

$$\frac{1}{\Delta_i}=\frac{1}{r_ih_i^2}-\frac{R_i}{2r_i^2}\frac{1}{h_i}+\left(-\frac{W_i}{6r_i^2}+\frac{R_i^2}{4r_i^3}\right)+O(h_i),\ i=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\Delta_{i-1}}=\frac{1}{r_ih_{i-1}^2}+\frac{R_i}{2r_i^2}\frac{1}{h_{i-1}}+\left(-\frac{W_i}{6r_i^2}+\frac{R_i^2}{4r_i^3}\right)+O(h_{i-1}),\ i=1,2,\cdots,n. \tag{1.6$'$}$$

§2. Λ- 插值样条 $\tau(x)$ 的方程组

我们首先引入若干引理，这些引理的证明并不困难，为了节省篇幅，证明均从略。

引理 2.1

$$\Delta_{i-1}^{-1}\det(\varphi_{i-1},\varphi_i,\varphi_i',\varphi_i'')=\frac{1}{6}h_{i-1}+\frac{1}{24}\frac{R_i}{r_i}h_{i-1}^2+\left(-\frac{7}{360}\frac{\omega_i}{r_i}+\frac{1}{48}\frac{R_i^2}{r_i^2}\right)h_{i-1}^3+O(h_{i-1}^4)$$

$$\Delta_{i-1}^{-1}\det(\varphi_{i-1},\varphi_i,\varphi_{i-1}'',\varphi_i')=\frac{1}{3}h_{i-1}-\frac{1}{24}\frac{R_i}{r_i}h_{i-1}^2+\left(\frac{7}{360}\frac{\omega_i}{r_i}+\frac{1}{24}\frac{u_i}{r_i}-\frac{1}{48}\frac{R_i^2}{r_i^2}\right)h_{i-1}^3+O(h_{i-1}^4)$$

$$\Delta_i^{-1}\det(\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i'',\varphi_i')=-\frac{1}{6}h_i+\frac{1}{24}\frac{R_i}{r_i}h_i^2+\left(\frac{7}{360}\frac{\omega_i}{r_i}-\frac{1}{48}\frac{R_i^2}{r_i^2}\right)h_i^3+O(h_i^4)$$

$$\Delta_i^{-1}\det(\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi_{i+1}'')=-\frac{1}{3}h_i-\frac{1}{24}\frac{R_i}{r_i}h_i^2+\left(-\frac{7}{360}\frac{\omega_i}{r_i}-\frac{1}{24}\frac{u_i}{r_i}+\frac{1}{48}\frac{R_i^2}{r_i^2}\right)h_i^3+O(h_i^4) \tag{2.1}$$

引理2.2 若$f\in C^2[a,b]$，则有

$$-\Delta_{i-1}^{-1}\det(\varphi_i',\varphi_i,\varphi_{i-1}'',\varphi_i'')\cdot f_{i-1}-\Delta_{i-1}^{-1}\det(\varphi_{i-1},\varphi_i',\varphi_{i-1}'',\varphi_i'')\cdot f_i$$

$$=\frac{f_{i-1}-f_i}{h_{i-1}}+\left(\frac{\theta_i}{24r_i}f_{i-1}'-\frac{t_i}{24r_i}f_{i-1}\right)h_{i-1}^3+O(\|f\|_2)h_{i-1}^4$$

$$\Delta_i^{-1}\det(\varphi_i',\varphi_{i+1},\varphi_i'',\varphi_{i+1}'')\cdot f_i+\Delta_i^{-1}\det(\varphi_i,\varphi_i',\varphi_i'',\varphi_{i+1}'')\cdot f_{i+1}$$

$$=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}+\left(\frac{\theta_i}{24r_i}f_i'-\frac{t_i}{24r_i}f_i\right)h_i^3+O(\|f\|_2)h_i^4 \tag{2.2}$$

引理2.3

$$\Delta_0^{-1}\det(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_0',\varphi_1'')=-\frac{h_0}{3}-\frac{R_0}{24r_0}h_0^2+\left(-\frac{7}{360}\frac{\omega_0}{r_0}-\frac{1}{24}\frac{u_0}{r_0}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{48}\frac{R_0^2}{r_0^2}\right)h_0^3+O(h_0^4)$$

$$\Delta_0^{-1}\det(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_0'',\varphi_0')=-\frac{h_0}{6}+\frac{R_0}{24r_0}h_0^2+\left(\frac{7}{360}\frac{\omega_0}{r_0}-\frac{1}{48}\frac{R_0^2}{r_0^2}\right)h_0^3+O(h_0^4) \tag{2.3}$$

$$\Delta_{n-1}^{-1}\det(\varphi_{n-1},\varphi_n,\varphi_n',\varphi_n'')=\frac{h_{n-1}}{6}+\frac{R_n}{24r_n}h_{n-1}^2+\left(-\frac{7}{360}\frac{\omega_n}{r_n}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{48}\frac{R_n^2}{r_n^2}\right)h_{n-1}^3+O(h_{n-1}^4)$$

$$\Delta_{n-1}^{-1}\det(\varphi_{n-1},\varphi_n,\varphi_{n-1}'',\varphi_n')=\frac{h_{n-1}}{3}-\frac{R_n}{24r_n}h_{n-1}^2+\left(\frac{7}{360}\frac{\omega_n}{r_n}+\frac{u_n}{24r_n}-\frac{1}{48}\frac{R_n^2}{r_n^2}\right)h_{n-1}^3+O(h_{n-1}^4)$$

引理2.4 若$f\in C^2[a,b]$，则有

$$\Delta_0^{-1}\det(\varphi_0',\varphi_1,\varphi_0'',\varphi_1'')\cdot f_0+\Delta_0^{-1}\det(\varphi_0,\varphi_0',\varphi_0'',\varphi_1'')f_1=$$

$$-\frac{f_0-f_1}{h_0}+\left(\frac{\theta_0}{24r_0}f_0'-\frac{t_0}{24r_0}f_0\right)h_0^3+O(\|f\|_2)h_0^4 \tag{2.4}$$

$$\Delta_{n-1}^{-1}\det(\varphi_n',\varphi_n,\varphi_{n-1}'',\varphi_n'')\cdot f_{n-1}+\Delta_{n-1}^{-1}\det(\varphi_{n-1},\varphi_n',\varphi_{n-1}'',\varphi_n'')f_n=$$

$$\frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}}-\left(\frac{\theta_n}{24r_n}f_n'-\frac{t_n}{24r_n}f_n\right)h_{n-1}^3+O(\|f\|_2)h_{n-1}^4.$$

我们记

$$\mu_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},\qquad \lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i},\qquad i=1,2,\cdots,n-1. \tag{2.5}$$

由(2.1)—(2.5)，用熟知的方法，不难得到决定$\tau(x)$的方程组：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left[2+\frac{1}{4}\frac{R_0}{r_0}h_0+\left(\frac{7}{60}\frac{\omega_0}{r_0}+\frac{1}{4}\frac{u_0}{r_0}-\frac{1}{8}\frac{R_0^2}{r_0^2}\right)h_0^2+O(h_0^3)\right]\tau_0''+\\
&\left[1-\frac{1}{4}\frac{R_0}{r_0}h_0+\left(\frac{1}{8}\frac{R_0^2}{r_0^2}-\frac{7}{60}\frac{\omega_0}{r_0}\right)h_0^2+O(h_0^3)\right]\tau_1''=\phi_0\\
&Ⓗ_i\tau_{i-1}''+Ⓟ_i\tau_i''+Ⓠ_i\tau_{i+1}''=\phi_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1\ .\\
&\left[1+\frac{1}{4}\frac{R_n}{r_n}h_{n-1}+\left(-\frac{7}{60}\frac{\omega_n}{r_n}+\frac{1}{8}\frac{R_n^2}{r_n^2}\right)h_{n-1}^2+O(h_{n-1}^3)\right]\tau_{n-1}''+\\
&\left[2-\frac{1}{4}\frac{R_n}{r_n}h_{n-1}+\left(\frac{1}{4}\frac{u_n}{r_n}+\frac{7}{60}\frac{\omega_n}{r_n}-\frac{1}{8}\frac{R_n^2}{r_n^2}\right)h_{n-1}^2+O(h_{n-1}^3)\right]\tau_n''=\phi_n
\end{aligned}
\right.
\tag{2.6}
$$

其中

$$Ⓗ_i=\mu_i+\frac{1}{4}\frac{R_i}{r_i}\frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i}+\left(-\frac{7}{60}\frac{\omega_i}{r_i}+\frac{1}{8}\frac{R_i^2}{r_i^2}\right)\frac{h_{i-1}^3}{h_{i-1}+h_i}+O(h_{i-1}^3)$$

$$Ⓟ_i=2+\frac{1}{4}\frac{R_i}{r_i}(h_i-h_{i-1})+\left(\frac{7}{60}\frac{\omega_i}{r_i}+\frac{1}{4}\frac{u_i}{r_i}-\frac{1}{8}\frac{R_i^2}{r_i^2}\right)\cdot$$

$$(h_{i-1}^2-h_{i-1}h_i+h_i^2)+O(h_{i-1}^3+h_i^3)$$

$$Ⓠ_i=\lambda_i-\frac{1}{4}\frac{R_i}{r_i}\frac{h_i^2}{h_{i-1}+h_i}+\left(\frac{1}{8}\frac{R_i^2}{r_i^2}-\frac{7}{60}\frac{\omega_i}{r_i}\right)\frac{h_i^3}{h_{i-1}+h_i}+O(h_i^3)$$

$$\phi_0=\frac{6}{h_0}\left[\frac{f_1-f_0}{h_0}-f_0'\right]+\left(\frac{1}{4}\frac{\theta_0}{r_0}f_0'-\frac{1}{4}\frac{t_0}{r_0}f_0\right)h_0^2+O(\|f\|_2)h_0^3$$

$$\phi_i=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{f_{i-1}-f_i}{h_{i-1}}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}\right)+\left(\frac{1}{4}\frac{\theta_i}{r_i}f_i'-\frac{1}{4}\frac{t_i}{r_i}f_i\right)\cdot$$

$$(h_{i-1}^2-h_{i-1}h_i+h_i^2)+O(\|f\|_2)(h_{i-1}^3+h_i^3)$$

$$\phi_n=\frac{6}{h_{n-1}}\left(f_n'-\frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{4}\frac{\theta_n}{r_n}f_n'-\frac{1}{4}\frac{t_n}{r_n}f_n\right)h_{n-1}^2+O(\|f\|_2)h_{n-1}^3$$

我们用 $\boldsymbol{B}$ 表示方程组(2.6)左边的系数矩阵．它的右端用向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示，$\boldsymbol{\Phi}=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_n)^T$，则(2.6)可以改写成

$$\boldsymbol{B}\cdot(\tau_0'',\tau_1'',\cdots\tau_n'')^T=\boldsymbol{\Phi}\tag{2.6$'$}$$

显然，当 h 足够小时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是对角线占优的，因此我们可以假定

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty\leqslant K\tag{2.7}$$

设 Δ 是由(0.1)式给出，我们说分划 $\Delta\in\mathscr{D}$，如果对应于这个分划，使(1.5)及(2.7)两式同时成立．这样由上面的分析，实际上我们已证得

定理2.1　若分划 $\Delta\in\mathscr{D}$，则 Λ-插值样条是存在且唯一的．

§3．$\tau''(x)$ 及 $\tau'''(x)$ 的分段表达式

不难知道，对于$x\in(x_i,x_{i+1})$有

$$\tau''(x)=\Delta_i^{-1}\det(\varphi''(x),\varphi_{i+1},\varphi_i'',\varphi_{i+1}'')\cdot f_i+\Delta_i^{-1}\det(\varphi_i,\varphi''(x),\varphi_i'',\varphi_{i+1}'')\cdot f_{i+1}+\Delta_i^{-1}\det(\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi''(x),\varphi_{i+1}'')\cdot\tau_i''+\Delta_i^{-1}\det(\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i'',\varphi''(x))\cdot\tau_{i+1}''.$$

由此得到下面两个引理.

引理3.1　对于$f\in C^2[a,b]$，$x\in(x_i,x_{i+1})$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$有

$$\tau''(x)=\alpha_i\tau_i''+\beta_i\tau_{i+1}''+\frac{1}{2}(x-x_i)[h_i-(x-x_i)](f_i\cdot\frac{t_i}{r_i}-f_i'\frac{\theta_i}{r_i})+O(\|f\|_2)h_i^3 \tag{3.1}$$

其中

$$\alpha_i=\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+\frac{R_{i+1}}{2r_{i+1}}(x_{i+1}-x)-\frac{R_{i+1}}{2r_{i+1}}\frac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i}+\left(-\frac{\omega_{i+1}}{6r_{i+1}}+\frac{R_{i+1}^2}{4r_{i+1}^2}\right)\cdot(x_{i+1}-x)h_i-\frac{R_{i+1}^2}{4r_{i+1}^2}(x-x_{i+1})^2+\frac{\omega_{i+1}}{6r_{i+1}}\frac{(x_{i+1}-x)^3}{h_i}+O(h_i^3),$$

$$\beta_i=\frac{x-x_i}{h_i}+\frac{R_i}{2r_i}(x_i-x)+\frac{R_i}{2r_i}\cdot\frac{(x-x_i)^2}{h_i}+\frac{\omega_i}{6r_i}\cdot\frac{(x-x_i)^3}{h_i}-\frac{R_i^2}{4r_i^2}(x-x_i)^2+\left(-\frac{\omega_i}{6r_i}+\frac{R_i^2}{4r_i^2}\right)h_i(x-x_i)+O(h_i^3)$$

引理 3.2　若$f\in C^1[a,b]$，$x\in(x_i,x_{i+1})$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$有

$$\tau''(x)=\bar{\alpha}_i\tau_i''+\bar{\beta}_i\tau_{i+1}''+O(\|f\|_1)h_i \tag{3.2}$$

其中

$$\bar{\alpha}_i=-\frac{1}{h_i}-\frac{R_{i+1}}{r_{i+1}}\cdot\frac{x-x_{i+1}}{h_i}-\frac{R_{i+1}}{2r_{i+1}}+O(h_i)$$

$$\bar{\beta}_i=\frac{1}{h_i}+\frac{R_i}{r_i}\frac{x-x_i}{h_i}-\frac{R_i}{2r_i}+O(h_i)$$

§4. 逼近度的估计

引理 4.1　设$\Delta\in\mathscr{D}$，$f\in C^2[a,b]$，则有

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}|\tau_i''|\leqslant K\cdot\|f\|_2 \tag{4.1}$$

证　我们记向量$a=(a_0,a_1,\cdots a_n)$的模$\|a\|_\infty$是

$$\|a\|_\infty=\max_i|a_i|$$

由(2.6)′知有

$$\max_i|\tau_i''|\leqslant\|\mathbf{B}^{-1}\|_\infty\cdot\|\Phi\|_\infty$$

但从(2.6)中ϕ_i的定义式，易见有$\|\Phi\|_\infty=O(\|f\|_2)$，注意到(2.7)式，即得引理的证明.

同样易得

引理 4.2　设$\Delta\in\mathscr{D}$，当$f\in C^4[a,b]$时，有

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}|\tau_i''-f_i''|\leqslant K\cdot\|f\|_4\cdot h^2 \tag{4.2}$$

定理 4.1　若 $\Delta\in\mathscr{D}$，$f\in C^4[a,b]$，则有

$$\|D^i(f-\tau)\|\leqslant K\cdot\|f\|_4\cdot h^{4-i},\quad i=0,1,2. \tag{4.3}$$

证　由(3.1)式及(4.2)式可知，当 $x\in(x_i,x_{i+1})$ 时有

$$\tau''(x)=f_i''\left[\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+\frac{R_{i+1}}{2r_{i+1}}(x_{i+1}-x)-\frac{R_{i+1}}{2r_{i+1}}\cdot\frac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i}\right]$$

$$+f_{i+1}''\left[\frac{x-x_i}{h_i}+\frac{R_i}{2r_i}(x_i-x)+\frac{R_i}{2r_i}\cdot\frac{(x-x_i)^2}{h_i}\right]+O(\|f\|_4)h^2$$

我们若用 $\mathscr{L}_{(a,b,g)}(x)$ 表示 g 的在点 a 和 b 上的 Lagrange 插值多项式，则有

$$f''(x)-\tau''(x)=f''(x)-\mathscr{L}_{(x_i,x_{i+1},f'')}(x)+O(\|f\|_4)h^2$$

但熟知有

$$f''(x)-\mathscr{L}_{(x_i,x_{i+1},f'')}(x)=\frac{f^{(4)}(\zeta^*)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1}),\quad \zeta^*\in(x_i,x_{i+1})$$

所以有

$$|f''(x)-\tau''(x)|\leqslant K\cdot\|f\|_4\cdot h^2$$

此即(4.3)中 $i=2$ 的情况。由此容易得 $i=0,1$ 时的结论。

对于 $D^3(f-\tau)$ 的估计，需要补充假定 $R_\Delta\leqslant\beta$，由(3.2)式知

$$\tau'''(x)=\bar{\alpha}_i\tau_i''+\bar{\beta}_i\tau_{i+1}''+(O\|f\|_4)\cdot h_i=\frac{1}{h_i}(f_{i+1}''-f_i'')+O(\|f\|_4)\cdot h_i$$

因此我们证明了

定理4.2　若 $\Delta\in\mathscr{D}$，$R_\Delta\leqslant\beta$，$f\in C^4[a,b]$，则有

$$\|D^3(\tau-f)\|_{L^\infty[a,b]}\leqslant K\cdot\|f\|_4\cdot h \tag{4.4}$$

我们用 $W_q^m[a,b]$（m 是自然数，$1\leqslant q\leqslant\infty$）表示函数集：若 $f\in W_q^m[a,b]$，则表示 $f^{(m-1)}$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，而且 $f^{(m)}\in L^q[a,b]$。

设 $f\in W_r^{k+1}[a,b]$，$0\leqslant k<4$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，用 g 表示 f 的对应于 Δ 的 Hermite 插值样条，即它满足下述条件：

$$\begin{cases} g\in C^4[a,b] & \\ D^j(f-g)(x_i)=0 & 0\leqslant j\leqslant k,\ 0\leqslant i\leqslant n \\ D^jg(x_i)=0 & k<j\leqslant 4,\ 0\leqslant i\leqslant n \\ D^{10}g=0 & x\in(x_i,x_{i+1}),i=0,1,\cdots,n-1. \end{cases} \tag{4.5}$$

从[4]知，当 $R_\Delta\leqslant\beta$ 时有

$$K\cdot h^{k+1-j-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}\|D^{k+1}f\|_{L^r[a,b]}\geqslant\begin{cases}\|D^j(f-g)\|_{L^q[a,b]} & 0\leqslant j\leqslant k\\ \|D^jg\|_{L^q[a,b]} & k<j\leqslant 4\end{cases} \tag{4.6}$$

这里 $1\leqslant r\leqslant\infty$，$r\leqslant q\leqslant\infty$。

我们先讨论$k=0$的情况，即$f\in W_r^1[a,b]$，我们考虑$\tau(x)$的如下插值问题：$(\tau-f)(x_i)=0$ $(i=0,1,\cdots,n)$，$\tau'(x_0)=\tau'(x_n)=0$。记g是(4.5)的$(k=0)$Hermite插值样条，于是由(4.6)得

$$\|f-g\|\leqslant K\cdot h^{1-\frac{1}{r}}\|Df\|_{L^r[a,b]}$$

$$\|g^{(j)}\|\leqslant K\cdot h^{1-j-\frac{1}{r}}\|Df\|_{L^r[a,b]}\qquad 0<j\leqslant 4.$$

则有
$$\|f-\tau\|\leqslant K_1(\|f\|+\|Df\|_{L^r[a,b]})h^{1-\frac{1}{r}}.$$

对于$k>0$，我们仍考虑$\tau(x)$的(I)型插值问题，以$k=3$为例讨论，对于$k=1,2$，完全类似。

设$f\in W_r^4[a,b]$，相应的(4.5)的$(k=3)$Hermite插值样条g有：

$$\|D^j(f-g)\|\leqslant K\cdot h^{4-j-\frac{1}{r}}\|D^4f\|_{L^r[a,b]}\quad 0\leqslant j\leqslant 3$$

$$\|D^4g\|\leqslant K\cdot h^{-\frac{1}{r}}\|D^4f\|_{L^r[a,b]}.$$

这样就有

$$\begin{aligned}\|f^{(i)}-\tau^{(i)}\|_{L^\infty[a,b]}&\leqslant\|f^{(i)}-g^{(i)}\|_{L^\infty[a,b]}+\|g^{(i)}-\tau^{(i)}\|_{L^\infty[a,b]}\\&\leqslant K_2h^{4-i-\frac{1}{r}}(\|f\|_3+\|D^4f\|_{L^r[a,b]})\quad 0\leqslant i\leqslant 3.\end{aligned}$$

总结起来，我们写成下面的定理

定理4.3 分划$\Delta\in\mathscr{D}$，$f\in W_r^{k+1}[a,b]$，$0\leqslant k<4$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，$R_\Delta\leqslant\beta$，则有

$$\|f^{(i)}-\tau^{(i)}\|_{L^\infty[a,b]}\leqslant K\cdot h^{k+1-i-\frac{1}{r}}(\|f\|_k+\|D^{k+1}f\|_{L^r[a,b]}),\qquad 0\leqslant i\leqslant k \tag{4.7}$$

附注 对照[4]，可见我们的(4.8)式是稍稍改进了其中的结果，并将其拓广到一般的Λ-插值样条。

§5. 一个渐近式

本节中考虑这样的Λ-算子：

$$\Lambda^*=D^4+a_1(x)D+a_0(x)I \tag{5.1}$$

根据(1.1)—(1.3)知，此时有

$$R(x)=u(x)=W(x)=0 \tag{5.2}$$

设$\tau^*(x)$是对应于Δ的Λ^*-插值样条，由(3.1)式，当$x\in(x_i,x_{i+1})$时有

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tau}{}''(x)=&\left[\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+O(h_i^3)\right]\overset{*}{\tau}{}_i''+\left[\frac{x-x_i}{h_i}+O(h_i^3)\right]\overset{*}{\tau}{}_{i+1}''+\\&+\frac{1}{2}(x-x_i)[h_i-(x-x_i)][f_i\cdot a_0(x_i)+f_i'\cdot a_1(x_i)]+O(\|f\|_2)h_i^3\end{aligned} \tag{5.3}$$

设$s(x)$是通常的三次(I)型插值样条，记$\delta(x)=\tau(x)-s(x)$。

引理5.1　若 $\Delta\in\mathscr{D}$，$f\in C^2[a,b]$，则有

$$\max_{0\le i\le n}|\delta_i''|\le K\cdot\|f\|_2\cdot(\|a_3\|+h)h \tag{5.4}$$

证　考虑到有关 $s(x)$ 的方程组(如可参见[6])，由(2.6)及(2.6)′不难得到。

推论　若 $\Delta\in\mathscr{D}$，$f\in C^2[a,b]$，$a_3(x)=0$，则

$$\max_{0\le i\le n}|\delta_i''|\le K\cdot\|f\|_2\cdot h^2 \tag{5.5}$$

对于 Λ^*-样条，我们将(5.5)式精确化，以下我们假定分划 Δ 是等距的，即 $R_\Delta=1$，且在[0,1]上讨论，令 $x_i=\frac{i}{n}$，$i=0,1,\cdots,n$．$h=\frac{1}{n}$．

我们若把决定 $s(x)$ 之方程组左边的系数矩阵记作 $\mathbf{A}$[6]，则容易得到

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\overset{*}{\tau}{}_0''-s_0''\\ \overset{*}{\tau}{}_1''-s_1''\\ \vdots\\ \overset{*}{\tau}{}_n''-s_n''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_0^*\\ f_1^*\\ \vdots\\ f_n^*\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

其中　$f_i^*=-\frac{1}{4}[a_1(x_i)f_i'+a_0(x_i)f_i]h^2+O(\|f\|_2)h^3$，$i=0,1,\cdots,n$．对于矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆阵记为 $\mathbf{A}^{-1}=[A_{ij}^{-1}]$且知$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\le1$

于是(5.6)知有

$$\overset{*}{\tau}{}_i''-s_i''=-\frac{h^2}{4}\sum_{j=0}^{n}A_{ij}^{-1}[a_1(x_j)f'(x_j)+a_0(x_j)f(x_j)]+O(\|f\|_2)h^3$$

我们若记 $\mu_i(t)$　$(i=0,1,\cdots,n)$是由下式定义的斯蒂吉斯测度

$$\int_0^1 f(x)\,d\mu_i(t)=\sum_{j=0}^{n}A_{ij}^{-1}f(x_j)$$

则有

$$\overset{*}{\tau}{}_i''-s_i''=-\frac{h^2}{4}\int_0^1(a_1(t)f'(t)+a_0(t)f(t))\,d\mu_i(t)+O(\|f\|_2)h^3\qquad i=0,1,\cdots,n \tag{5.7}$$

定理5.1　若 $\Delta\in\mathscr{D}$，$R_\Delta=1$，$f\in C^4[0,1]$，则有

$$\overset{*}{\tau}{}''(x)-f''(x)=-\frac{f^{(4)}(x)}{2}h^2\cdot B_2(u)-\frac{h^2}{2}\left(B_2(u)-\frac{1}{6}\right)(a_0(x)f(x)+a_1(x)f'(x))-$$

$$-\frac{h^2}{4}\int_0^1[a_1(t)f'(t)+a_0(t)f(t)]\,d[(1-u)\mu_{[nx]}(t)+u\mu_{[nx]+1}(t)]+o(h^2)$$

其中 $u=(x-x_i)\cdot h^{-1}$，$B_2(u)=u^2-u+\frac{1}{6}$是 Bernoulli 多项式，$i=[nx]$，$[nx]$表示 nx 的整数部分，且$\int_0^1|d\mu_i(x)|\le1$．

证　由(5.3)式，注意到(4.1)式及(5.7)式，不难得到．因篇幅关系，推导细节略．

§6 附 注

(1) 从证明过程可知，对于 $\varphi,\psi,\xi,\eta\in N_\Lambda$ 的光滑性要求，在 §1—§4 中有关结果，仅需属于 $C^5[a,b]$ 就够了，而在 §5 中由于讨论渐近式，才要求它们属于 $C^6[a,b]$.

如果 $\varphi,\psi,\xi,\eta\in C^4[a,b]$，但满足一致的连续模条件时，那末亦可用本文的方法进行分析，但易见它们的逼近度相应降低.

(2) 我们还可以把问题提得更一般些，就是相应于分划 Δ，我们给出一列微分算子：

$$\Lambda_i = D^4 + a_{i3}D^3 + a_{i2}D^2 + a_{i1}D + a_{i0}I$$

讨论这样的插值样条 $\tau(x)$

$$\begin{cases} \tau(x)\in C^2[a,b] \\ \Lambda_i\tau(x)=0 & x\in(x_i,x_{i+1}),\quad i=0,1,\cdots,n-1. \\ \tau(x_j)=f_j & j=0,1,\cdots,n. \\ \tau'(x_0)=f'_0 & \tau'(x_n)=f'_n \end{cases}$$

从我们的另一工作[7]可见，对这类问题亦可以用本文的方法加以分析.

参 考 文 献

[1] Jerome, J. W., J. Approx. The., 7(1973), 143—154.

[2] Shultz, M. H. & Varga, R. S., Numer. Math., 10(1967), 345—369.

[3] Varga, R. S., Error bounds for Spline interpolation in "Approximation with special emphasis on spline functions", Ed. by I. J. Schoenberg, New York, London, 1969.

[4] Swartz, B. K. and Varga, R. S., J. Approx. The., 6(1972), 6—49.

[5] Demko, S. and Varga, R. S., J. Approx. The., 12(1974), 242—264.

[6] Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., Walsh, J. L., The Theory of splines and their applications, New York and London, 1969.

[7] 沙震、吴正昌，二次样条的一种推广(尚未发表).

Approximation and Asymptotic of the Fourth Order Λ-spline interpolator

Sha Zhen and Wu Zhengchang

Abstract

The object of this paper is to study the spline interpolator which associats with some 4-th order linear differential operator. Approximation of the spline interpolator is discussed. A special asymptotic representation is derived. These results can be regarded as a generalization of ordinary polynomial splines and L-splines.