第3卷 第4期
1983年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.4
Oct. 1983

Λ-模的σ-子模的标准表示式*

程福长

(广西师院)

在[1]中引进了环的σ-理想，建立了σ-理想理论。本文将[1]的结果推广到交换环上的模，定义Λ-模的σ-子模，证明满足σ-子模极大条件的Λ-模的σ-子模皆有标准表示式以及标准表示式的唯一性，并得到有关分式模的一些结果。

在本文中Λ始终表示有单位元素1的交换环，M是Λ-模，而$\sigma\in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,M)$。

(一)

定义1.1 设N是Λ-模M的非空子集。如果它满足以下条件：

(i) $a-b\in N$，$\forall a, b\in N$；

(ii) $\lambda\sigma(a)\in N$且$x-\sigma(x)\in N$，$\forall \lambda\in\Lambda$，$a\in N$，$x\in M$。则称$N$为$\Lambda$-模$M$的$\sigma$-子模。

当σ是Λ-模M的恒等自同构时，则Λ-模M的σ-子模就是Λ-子模。如果把Λ看作自身上的Λ-模时，则σ就是文[1]中Λ-自同态映照，σ-子模就是环Λ的σ-理想。

定义1.2 设N是Λ-模M的σ-子模。如果$N\neq M$，且$\lambda\sigma(x)\in N(\lambda\in\Lambda, x\in M)$时，必有$x\in N$或者$\lambda^h\sigma(M)\subseteq N$，这里$h$是某个正整数。则称$N$为$\Lambda$-模$M$的准素$\sigma$-子模。

命题1.1 设N是Λ-模M的准素σ-子模，命$P=\{\lambda|\lambda\in\Lambda, \lambda^h\sigma(M)\subseteq N, h$是某个正整数$\}$。则$P$是环$\Lambda$的质理想。

证明 因$0\in P$，故P非空。又因$N\neq M$，故有某个$x\in M$，$x\notin N$。于是$\sigma(x)\notin N$，因而$1\notin P$，故$P\neq\Lambda$。

设$\lambda,\delta\in P$，则有正整数h，t，使得$\lambda^h\sigma(M)\subseteq N$，$\delta^t\sigma(M)\subseteq N$。但$\Lambda$是交换环，故必可以选择适当大的正整数$q$，使$(\lambda-\delta)^q\sigma(M)\subseteq N$，故$\lambda-\delta\in P$。又因对任意$\alpha\in\Lambda$，都有$(\alpha\lambda)^h\sigma(M)=\lambda^h\sigma(\alpha^h M)\subseteq\lambda^h\sigma(M)\subseteq N$，故$\alpha\lambda\in P$。因此，$P$是环$\Lambda$的一个理想。

最后，若α，$\beta\in\Lambda$且$\alpha\beta\in P$，$\beta\notin P$。于是$\alpha^h\beta^h\sigma(M)\subseteq N$，$\beta^h\sigma(M)\nsubseteq N$，这里$h$是某个正整数。因而，有$x\in M$使$\beta^h\sigma(x)\notin N$和$\alpha^h\beta^h\sigma(x)=\alpha^h\sigma(\beta^h x)\in N$。但是，由$\beta^h x-\sigma(\beta^h x)\in N$且$\sigma(\beta^h x)=\beta^h\sigma(x)\notin N$，又得$\beta^h x\notin N$。而$N$是准素$\sigma$-子模，故必有某个正整数$t$，使得$(\alpha^h)^t\sigma(M)=\alpha^{ht}\sigma(M)\subseteq N$。所以$\alpha\in P$，因此$P$是环$\Lambda$的质理想。

由命题1.1知，对Λ-模M的每个准素σ-子模N，必有环Λ的一个质理想P与之对应。今后，记$P=r(N)$，并称N为属于P的准素σ-子模。

推论 设N是属于P的准素σ-子模。若$\lambda\in\Lambda$和$x\in M$，使$\lambda\sigma(x)\in N$且$x\notin P$，则$\lambda\in P$。

* 1981年9月12日收到。

命题1.2 设N_1，N_2，…，N_q都是属于P的准素σ-子模．则$N=\bigcap_{i=1}^{q}N_i$也是属于P的准素σ-子模．

证明 显然N是Λ-模M的σ-子模．

其次，设$\lambda\in\Lambda$，$x\in M$且$\lambda\sigma(x)\in N$．若$x\notin N$，则必有某个N_t（$1\leqslant t\leqslant q$），使得$\lambda\sigma(x)\in N_t$和$x\notin N_t$．由命题1.1的推论，得$\lambda\in P=r(N_i)(i=1,2,\cdots,q)$．因此，必可以选择一个适当大的正整数$h$，使得$\lambda^h\sigma(M)\subseteq N_i$（$i=1,2,\cdots,q$）．从而，$\lambda^h\sigma(M)\subseteq\bigcap_{i=1}^{q}N_i=N$．故$N$是准素$\sigma$-子模．

最后，要证$r(N)=P$．由上面证明知，$P\subseteq r(N)$．另一方面，若$\lambda\in r(N)$，则$\lambda^h\sigma(M)\subseteq N$，这里$h$是某个正整数，于是$\lambda^h\sigma(M)\subseteq N_i$（$i=1,2,\cdots,q$），因此$\lambda\in r(N_i)=P$，即$r(N)\subseteq P$．所以，$r(N)=P$．这样命题得到完全证明．

设K是Λ-模M的σ-子模，Σ是Λ的非空子集．令$K:_M\Sigma=\{x\mid x\in M,\ \lambda\sigma(x)\in K,\ \forall\lambda\in\Sigma\}$．

命题1.3 $K:_M\Sigma$是Λ-模M的σ-子模．

证明 显然$K:_M\Sigma$非空．其次，若$x,y\in K:_M\Sigma$，则$\lambda\sigma(x)$，$\lambda\sigma(y)\in K$，$\forall\lambda\in\Sigma$．于是$\forall\lambda\in\Sigma$，$\delta\in\Lambda$，$Z\in M$，得$\lambda\sigma(x-y)=\lambda\sigma(x)-\lambda\sigma(y)\in K$，$\lambda\sigma(\delta\sigma(x))=\delta\sigma(\lambda\sigma(x))\in K$，$\lambda\sigma(Z-\sigma(Z))=\lambda\sigma(Z)-\sigma(\lambda\sigma(Z))\in K$．因此，$K:_M\Sigma$是$\Lambda$-模$M$的$\sigma$-子模．

由定义还可以直接得到以下性质：

(i) $K\subseteq K:_M\Sigma\subseteq M$； (1)

(ii) 若$N_1,N_2,\cdots,N_q$是Λ-模M的σ-子模．则

$$\left(\bigcap_{i=1}^{q}N_i\right):_M\Sigma=\bigcap_{i=1}^{q}(N_i:_M\Sigma). \tag{2}$$

定义1.3 设K是Λ-模M的σ-子模，N_i（$i=1,2,\cdots,q$）是Λ-模M的准素σ-子模．如果

$$K=\bigcap_{i=1}^{q}N_i, \tag{3}$$

并且，适合以下条件：

(i) $r(N_1)$，$r(N_2)$，…，$r(N_q)$是互不相同的；

(ii) 对任何一个正整数t（$1\leqslant t\leqslant q$），皆有

$$K\neq N_1\cap\cdots\cap N_{t-1}\cap N_{t+1}\cap\cdots\cap N_q.$$

则称（3）式为Λ-模M的σ-子模K的标准表示式．

引理1.1 设N是属于P的准素σ-子模，如果$\lambda\in\Lambda$且$\lambda\notin P$．则$N:_M\lambda=N$．

证明 设$x\in N:_M\lambda$，则$\lambda\sigma(x)\in N$．又知$\lambda\notin P$，且N是属于P的准素σ-子模，故$x\in N$．因此，$N:_M\lambda\subseteq N$．另一方面，由（1）知$N\subseteq N:_M\lambda$．所以，$N:_M\lambda=N$．

引理1.2 设A是Λ的理想，$P_1,P_2,\cdots,P_t$是Λ的质理想．若$A\nsubseteq P_i$（$i=1,2,\cdots,t$），则必存在$\lambda\in A$，使得$\lambda\notin P_i$（$i=1,2,\cdots,t$）．

证明 我们可以假定$P_i\nsubseteq P_j$，这里$i\neq j$，$\forall i,j$．显然这样假设并不失去证明的一般性．因此，对每个i（$1\leqslant i\leqslant t$），都有

$$AP_1\cdots P_{i-1}P_{i+1}\cdots P_t\nsubseteq P_i.$$

于是存在 $\lambda_i \in AP_1 \cdots P_{i-1}P_{i+1} \cdots P_t$，而 $\lambda_i \notin P_i$。令 $\lambda = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i$，则 $\lambda \in A$ 且 $\lambda \notin P_i$ $(i=1,2,\cdots,t)$。

定理（唯一性定理）若 Λ-模M的σ-子模K有两个标准表示式：

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_q \text{和} K = N'_1 \cap N'_2 \cap \cdots \cap N'_t.$$

则 $q=t$，且适当调换 N_i，N'_j 的次序，可以使得 $P_i = P'_i$，其中 $P_i = r(N_i)$，$P'_i = r(N'_i)$ $(i=1,2,\cdots,t)$。

证明　令 $n = \max(q,t)$，对 n 作数学归纳法。

当 $n=1$ 时，定理成立是显然的。

当 $n>1$ 时，假定对小于 n 的情形定理已成立。现在，不妨设 P_1 是$\{P_1, P_2, \cdots, P_q, P'_1, P'_2, \cdots, P'_t\}$中一个极大的质理想，即 P_1 不是 $P_2, \cdots, P_q, P'_1, \cdots, P'_t$ 中任何一个的真子集。首先，要证 $P'_1, P'_2, \cdots, P'_t$ 中必有某个等于 P_1。若 $P_1 \neq P'_j$ $(j=1,2,\cdots,t)$，则 $P_1 \nsubseteq P'_j$，另外 $P_1 \nsubseteq P_{i_1}$ $(j=1,2,\cdots,t;\ i_1=2,3,\cdots,q)$。由引理 1.2，则必有 $\lambda \in P_1$，而 $\lambda \notin P'_j$，$\lambda \notin P_{i_1}$。于是存在某个正整数 h，使得 $\lambda^h \sigma(M) \subseteq N_1$，而 $\lambda^h \notin P'_j$，$\lambda^h \notin P_{i_1}$。因此，$N_1 :_M \lambda^h = M$，并且，由引理 1.1 得 $N'_j :_M \lambda^h = N'_j$，$N_{i_1} :_M \lambda^h = N_{i_1}$ $(j=1,2,\cdots,t;\ i_1=2,3,\cdots,q)$。

$$\therefore\quad K :_M \lambda^h = \left(\bigcap_{i=1}^{q} N_i\right) :_M \lambda^h = (N_1 :_M \lambda^h) \cap (N_2 :_M \lambda^h) \cap \cdots \cap (N_q :_M \lambda^h)$$

$$= M \cap N_2 \cap \cdots \cap N_q = N_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_q.$$

$$K :_M \lambda^h = \left(\bigcap_{j=1}^{t} N'_j\right) :_M \lambda^h = \bigcap_{j=1}^{t} (N'_j :_M \lambda^h) = \bigcap_{j=1}^{t} N'_j = K.$$

因此

$$K = N_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_q.$$

这与 $K = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_q$ 是K的标准表示式相矛盾。故 $P'_1, P'_2, \cdots, P'_t$ 中必有某个等于 P_1，适当调换 N'_j 的次序，可以假定 $P'_1 = P_1$。

这样 N_1 和 N'_1 都是属于 P_1 的准素σ-子模，且 $P_1 \nsubseteq P_{i_1}$ 和 $P_1 \nsubseteq P'_{j_1}$ $(i_1=2,3,\cdots,q;\ j_1=2,3,\cdots,t)$。与上面作类似讨论，则必存在 λ^h，使得 $\lambda^h\sigma(M) \subseteq N_1$ 和 $\lambda^h\sigma(M) \subseteq N'_1$，且 $\lambda^h \notin P_{i_1}$ 和 $\lambda^h \notin P'_{j_1}$。于是 $N_1 :_M \lambda^h = N'_1 :_M \lambda^h = M$，且 $N_{i_1} :_M \lambda^h = N_{i_1}$ 和 $N'_{j_1} :_M \lambda^h = N'_{j_1}$ $(i_1=2,3,\cdots,q;\ j_1=2,3,\cdots,t)$。令 $K' = K :_M \lambda^h$，则得

$$K' = N_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_q = N'_2 \cap N'_3 \cap \cdots \cap N'_t.$$

由归纳法假设，得 $t-1=q-1$，即 $t=q$，并且，适当调换 $N'_2, N'_3, \cdots, N'_t$ 的次序，可以假定 $P_2 = P'_2, P_3 = P'_3, \cdots, P_t = P'_t$。另外，$P_1 = P'_1$。这样定理完全得到证明。

（二）

定义 2.1　Λ-模M称为满足σ-子模极大条件，若对于M的任意一个σ-子模递增序列

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

必有某个正整数 h 存在，使得 $N_h = N_{h+1} = \cdots$。

当σ是Λ-模M的恒等自同构时，满足σ-子模极大条件的Λ-模M，就是交换环Λ上的 Noether 模。

定义 2.2　Λ-模M的σ-子模K称为是不可约的，如果 $K \neq M$，且 $K = M_1 \cap M_2$ 时，必有 $K = M_1$ 或者 $K = M_2$，这里M_1和M_2是M的任意两个σ-子模。否则称K为可约σ-子模。

定理 2.1 设Λ-模M满足σ-子模极大条件。则M的每个不可约σ-子模必是准素σ-子模。

证明 设K是Λ-模M的不可约σ-子模。若K不是准素σ-子模，则必有$\lambda\in\Lambda$和$x\in M$，使得$\lambda\sigma(x)\in K$，但$x\notin K$且$\lambda\notin r(K)$。因而，对任何正整数h皆有$\lambda^h\sigma(M)\nsubseteq K$。故$K\subset K:_M\lambda$，$K\subset K+\lambda^h\sigma(M)$（易知$K+\lambda^h\sigma(M)$是$\Lambda$-模$M$的$\sigma$-子模）。

由于M满足σ-子模极大条件，而

$$(K:_M\lambda)\subseteq(K:_M\lambda^2)\subseteq(K:_M\lambda^3)\subseteq\cdots$$

是Λ-模M的σ-子模的递增序列，因此，对某个正整数h来说，必有

$$(K:_M\lambda^h)=(K:_M\lambda^{h+1})=\cdots.$$

我们要证$K=(K:_M\lambda^h)\cap(K+\lambda^h\sigma(M))$。

设$x\in(K:_M\lambda^h)\cap(K+\lambda^h\sigma(M))$。则$x=a+\lambda^h\sigma(y)$，这里$a\in K$，$y\in M$。又由$x\in K:_M\lambda^h$，得$\lambda^h\sigma(x)\in K$。

$$\therefore\qquad \lambda^h\sigma(x)=\lambda^h\sigma(a)+\lambda^{2h}\sigma(\sigma(y))\in K,$$

因此

$$\lambda^{2h}\sigma(\sigma(y))=\lambda^h\sigma(x)-\lambda^h\sigma(a)\in K.$$

$$\therefore\qquad \sigma(y)\in K:_M\lambda^{2h}=K:_M\lambda^h.$$

因而$\lambda^h\sigma(y)\in K$，故$x=a+\lambda^h\sigma(y)\in K$，即$(K:_M\lambda^h)\cap(K+\lambda^h\sigma(M))\subseteq K$。另一方面，$K\subseteq(K:_M\lambda^h)\cap(K+\lambda^h\sigma(M))$。

$$\therefore\qquad K=(K:_M\lambda^h)\cap(K+\lambda^h\sigma(M)),$$

且$K\subset(K:_M\lambda^h)$和$K\subset K+\lambda^h\sigma(M)$。这与$K$是不可约$\sigma$-子模相矛盾。故$K$是准素$\sigma$-子模。

定理 2.2 设Λ-模M满足σ-子模极大条件。则M的每个σ-子模皆是有限多个准素σ-子模之交。

证明 首先证明M的每个σ-子模必是有限多个不可约σ-子模之交。对于M的不可约σ-子模结论成立是显然的。对于M的可约σ-子模，如果存在可约σ-子模不是有限多个不可约σ-子模之交。令Σ是由M的所有这些可约σ-子模组成的集合，因而Σ非空。由于M满足σ-子模极大条件，因此Σ中必有一个极大元素K，即若$N\in\Sigma$且$N\neq K$时，则$K\nsubseteq N$。因K是可约σ-子模，故$K=M_1\cap M_2$，且$K\neq M_1$和$K\neq M_2$，这里M_1,M_2是σ-子模。于是$K\subset M_1$，$K\subset M_2$。但K不能表成有限多个不可约σ-子模之交，且$K=M_1\cap M_2$，因而M_1和M_2中至少有一个是可约σ-子模，例如M_1是可约σ-子模，从而必有$M_1\in\Sigma$。这与K是Σ中的极大元素相矛盾。所以，M中每个σ-子模必是有限多个不可约σ-子模之交。

最后，应用定理 2.1，则M的每个σ-子模皆是有限多个准素σ-子模之交。即定理得证。

由定理 2.2 和命题 1.2，可以直接推得

定理 2.3 设Λ-模M满足σ-子模极大条件，则M的每个σ-子模皆有标准表示式。

推论 若M是交换环Λ上的Noether模。则它的每个Λ-子模皆有标准表示式。

（三）

设S是Λ的一个子集，$1\in S$而$0\notin S$，且S关于Λ的乘法是封闭的。令$S^{-1}\Lambda=\left\{\frac{\lambda}{\alpha}\mid\alpha\in S,\ \lambda\in\Lambda\right\}$，若$\frac{\lambda}{\alpha}$，$\frac{\delta}{\beta}\in S^{-1}\Lambda$，规定$\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}$当且仅当$(\lambda\beta-\delta\alpha)\tau=0$，这里$\tau$是$S$里的

某个元素。同时，若$\frac{\lambda}{\alpha}$，$\frac{\delta}{\beta}\in S^{-1}\Lambda$，定义

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\delta}{\beta}=\frac{\lambda\beta+\delta\alpha}{\alpha\beta},\qquad \frac{\lambda}{\alpha}\frac{\delta}{\beta}=\frac{\lambda\delta}{\alpha\beta}.$$

则$S^{-1}\Lambda$必构成一个有单位元素的交换环，把$S^{-1}\Lambda$叫做Λ的分式环。显然，若P是Λ的质理想，且$S\cap P=\phi$，则$S^{-1}P$也是$S^{-1}\Lambda$的质理想。

类似地，对于Λ-模M，令$S^{-1}M=\left\{\frac{x}{\alpha}\mid\alpha\in S,\ x\in M\right\}$。若$\frac{x}{\alpha}$，$\frac{y}{\beta}\in S^{-1}M$，规定$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}$当且仅当$\delta(\beta x-\alpha y)=0$，这里$\delta$是$S$里的某个元素。同时，若$\frac{x}{\alpha}$，$\frac{y}{\beta}\in S^{-1}M$，$\frac{\lambda}{\alpha}\in S^{-1}\Lambda$，定义

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\frac{\beta x+\alpha y}{\alpha\beta},\qquad \frac{\lambda}{\alpha}\frac{y}{\beta}=\frac{\lambda y}{\alpha\beta}.$$

则$S^{-1}M$是一个$S^{-1}\Lambda$-模，把$S^{-1}M$叫做M的分式模。

由于$\sigma\in\mathrm{Hom}_{\Lambda}(M,M)$，对$\frac{x}{\alpha}\in S^{-1}M$，定义$S^{-1}\sigma$：$\frac{x}{\alpha}\longmapsto\frac{\sigma(x)}{\alpha}$。则$S^{-1}\sigma\in\mathrm{Hom}_{S^{-1}\Lambda}(S^{-1}M,S^{-1}M)$。

命题3.1　设N是Λ-模M的σ-子模。则$S^{-1}N$是$S^{-1}\Lambda$-模$S^{-1}M$的$S^{-1}\sigma$-子模。

证明　设$\frac{a}{\alpha}$，$\frac{b}{\beta}\in S^{-1}N$，则得$\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\beta}=\frac{\beta a-\alpha b}{\alpha\beta}$。因$a\in N$，故$\beta\sigma(a)=\sigma(\beta a)\in N$。然而$\beta a-\sigma(\beta a)\in N$，因此，$\beta a\in N$。同理，$\alpha b\in N$。于是$\beta a-\alpha b\in N$，故$\frac{\beta a-\alpha b}{\alpha\beta}\in S^{-1}N$。

其次，若$\frac{a}{\alpha}\in S^{-1}N$，$\frac{\lambda}{\beta}\in S^{-1}\Lambda$。由于$\frac{\lambda}{\beta}(S^{-1}\sigma)\left(\frac{a}{\alpha}\right)=\frac{\lambda}{\beta}\frac{\sigma(a)}{\alpha}=\frac{\lambda\sigma(a)}{\beta\alpha}$，且$\lambda\sigma(a)\in N$，故$\frac{\lambda}{\beta}(S^{-1}\sigma)\left(\frac{a}{\alpha}\right)\in S^{-1}N$。同时，若$\frac{x}{\alpha}\in S^{-1}M$，得$\frac{x}{\alpha}-(S^{-1}\sigma)\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\frac{x}{\alpha}-\frac{\sigma(x)}{\alpha}=\frac{x-\sigma(x)}{\alpha}$，又知$x-\sigma(x)\in N$，故$\frac{x}{\alpha}-(S^{-1}\sigma)\left(\frac{x}{\alpha}\right)\in S^{-1}N$。因此，$S^{-1}N$是$S^{-1}\Lambda$-模$S^{-1}M$的$S^{-1}\sigma$-子模。

命题3.2　设N是Λ-模M的属于P的准素σ-子模，且$S\cap P=\phi$。则$S^{-1}N$是$S^{-1}\Lambda$-模$S^{-1}M$的属于$S^{-1}P$的准素$S^{-1}\sigma$-子模。

证明　首先$S^{-1}N\neq S^{-1}M$。反之，则对任意$\frac{x}{\alpha}\in S^{-1}M$必有$\frac{a}{\beta}\in S^{-1}N$，使$\frac{x}{\alpha}=\frac{a}{\beta}$。因此，存在$\tau\in S$使得$\tau(\beta x-\alpha a)=0$。由$\tau\alpha\sigma(a)\in N$，得$\tau\beta\sigma(x)\in N$，$\forall x\in M$。但$N\neq M$。必有某个$x\in M$且$x\notin N$。故$\tau\beta\in P$且$\tau\beta\in S$，这与$S\cap P=\phi$相矛盾。因此，$S^{-1}N\neq S^{-1}M$。

另外，若$\frac{\lambda}{\alpha}(S^{-1}\sigma)\left(\frac{x}{\beta}\right)\in S^{-1}N$，这里$\frac{\lambda}{\alpha}\in S^{-1}\Lambda$，$\frac{x}{\beta}\in S^{-1}M$。于是$\frac{a}{\delta}=\frac{\lambda}{\alpha}(S^{-1}\sigma)\left(\frac{x}{\beta}\right)=\frac{\lambda\sigma(x)}{\alpha\beta}(a\in N,\ \delta\in S)$，因而存在$\tau\in S$使得$\tau\alpha\beta a-\tau\delta\lambda\sigma(x)=0$，故$\tau\delta\lambda\sigma(\sigma(x))\in N$。如果$\frac{x}{\beta}\notin S^{-1}N$，则$\sigma(x)\notin N$。由于$N$是属于$P$的准素$\sigma$-子模，得$\tau\delta\lambda\in P$。但$\tau\delta\notin P$，必有$\lambda\in P$。因此，存在某个正整数$h$，使得$\lambda^h\sigma(M)\subseteq N$。

$$\therefore\quad \frac{\lambda^h}{\alpha^h}(S^{-1}\sigma)\left(\frac{y}{\mu}\right)=\frac{\lambda^h\sigma(y)}{\alpha^h\mu}\in S^{-1}N,\qquad\forall\frac{y}{\mu}\in S^{-1}M.$$

即$\frac{\lambda^h}{\alpha^h}(S^{-1}\sigma)(S^{-1}M)\subseteq S^{-1}N$，又由命题3.1，故$S^{-1}N$是准素$S^{-1}\sigma$-子模。

最后，要证$r(S^{-1}N)=S^{-1}r(N)=S^{-1}P$。由上面证明，容易看到$r(S^{-1}N)\subseteq S^{-1}P$。另

一方面，设$\frac{\lambda}{\alpha}\in S^{-1}P$，$\lambda\in P$。因此，必有某个正整数$h$，使得$\lambda^h\sigma(x)\in N$，$\forall x\in M$。因而，$\frac{\lambda^h}{\alpha^h}(S^{-1}\sigma)\left(\frac{x}{\beta}\right)=\frac{\lambda^h\sigma(x)}{\alpha^h\beta}\in S^{-1}N$，$\forall x\in M$，$\beta\in S$。即$\frac{\lambda^h}{\alpha^h}(S^{-1}\sigma)(S^{-1}M)\subseteq S^{-1}N$，故$\frac{\lambda}{\alpha}\in r(S^{-1}N)$。因此，$S^{-1}P\subseteq r(S^{-1}N)$。所以，$r(S^{-1}N)=S^{-1}P=S^{-1}r(N)$。这样命题完全得到证明。

命题3.3 设K是Λ-模M的σ-子模，且$K=\bigcap_{i=1}^{q}N_i$，这里每个N_i是Λ-模M的属于P_i的准素σ-子模。另外，设$S\cap P_i=\phi$ $(i=1,2,\cdots,q)$。则$S^{-1}K=\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i$。

证明 若$\frac{a}{\alpha}\in S^{-1}K$，这里$a\in K$。则$a\in N_i$，因而$\frac{a}{\alpha}\in S^{-1}N_i$，$\forall i$。故$\frac{a}{\alpha}\in\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i$，即$S^{-1}K\subseteq\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i$。另一方面，若$\frac{a}{\alpha}\in S^{-1}N_i$，$\forall i$。则$\frac{a}{\alpha}=\frac{a_i}{\beta_i}$，$a_i\in N_i$。于是存在$\delta_i\in S$。使得$\delta_i\beta_i a-\delta_i\alpha a_i=0$。因此，$\delta_i\beta_i\sigma(a)\in N_i$。而$\delta_i\beta_i\notin P_i$，故$a\in N_i$，$\forall i$，即$a\in K$。因此，$\frac{a}{\alpha}\in S^{-1}K$，故$\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i\subseteq S^{-1}K$。于是$S^{-1}K=\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i$，即命题得证。

定理 设K是Λ-模M的σ-子模，且$K=\bigcap_{i=1}^{q}N_i$是它的标准表示式，这里$r(N_i)=P_i$ $(i=1,2,\cdots,q)$。另外，设$S\cap P_i=\phi(i=1,2,\cdots,q)$。则$S^{-1}K=\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i$是$S^{-1}\Lambda$-模$S^{-1}M$的$S^{-1}\sigma$-子模$S^{-1}K$的标准表示式，且$r(S^{-1}N_i)=S^{-1}r(N_i)=S^{-1}P_i$ $(i=1,2,\cdots,q)$。

证明 由命题3.3，得$S^{-1}K=\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i$。又由命题3.2知，$S^{-1}N_i$是$S^{-1}\Lambda$-模$S^{-1}M$的属于$S^{-1}P_i$的准素$S^{-1}\sigma$-子模，$\forall i$。

其次，要证$S^{-1}P_i\neq S^{-1}P_j$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,q)$。因$P_i\neq P_j$，故有$\lambda_j\in P_j$，$\lambda_j\notin P_i$。若$S^{-1}P_i=S^{-1}P_j$，则$\frac{\lambda_j}{\alpha_j}=\frac{\delta_i}{\beta_i}$，这里$\delta_i\in P_i$。于是存在$\tau_j\in S$，使得$\tau_j\beta_i\lambda_j-\tau_j\alpha_j\delta_i=0$，故$\tau_j\beta_i\lambda_j\in P_i$。因而存在某个正整数$h_i$，使得$(\tau_j\beta_i\lambda_j)^{h_i}\sigma(x)\in N_i$，$\forall x\in M$。由于$(\tau_j\beta_i\lambda_j)^{h_i}\sigma(x)=(\tau_j\beta_i)^{h_i}\sigma(\lambda_j^{h_i}x)\in N_i$，且$(\tau_j\beta_i)^{h_i}\notin P_i$，故$\lambda_j^{h_i}x\in N_i$。因而$\lambda_j^{h_i}\sigma(x)=\sigma(\lambda_j^{h_i}x)\in N_i$，$\forall x\in M$。于是$\lambda_j\in P_i$，这与$\lambda_j\notin P_i$相矛盾。故$S^{-1}P_i\neq S^{-1}P_j$ $(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,q)$。

最后，对任一正整数t $(1\leqslant t\leqslant q)$，命$K_t=N_1\cap\cdots\cap N_{t-1}\cap N_{t+1}\cap\cdots\cap N_q$。由命题3.3，得$S^{-1}K_t=S^{-1}N_1\cap\cdots\cap S^{-1}N_{t-1}\cap S^{-1}N_{t+1}\cap\cdots\cap S^{-1}N_q$。我们要证$S^{-1}K\neq S^{-1}K_t$，$\forall t$。因$K\neq K_t$，则有$a_t\in K$且$a_t\notin K_t$。若$S^{-1}K=S^{-1}K_t$，则$\frac{a_t}{\alpha}=\frac{b_t}{\beta}$，这里$b_t\in K_t$。因而，存在$\tau_t\in S$使得$\tau_t\beta a_t-\tau_t\alpha b_t=0$。由于$b_t\in K_t$，故$b_t\in N_j$，而$N_j$是准素$\sigma$-子模，因此$\tau_t\beta\sigma(a_t)\in N_j$，这里$j=1,\cdots,t-1,\ t+1,\cdots,q$。但$\tau_t\beta\notin P_j$，故$a_t\in N_j$，$\forall j$。因而$a_t\in K_t$，这与已知$a_t\notin K_t$相矛盾，于是$S^{-1}K\neq S^{-1}K_t$ $(t=1,2,\cdots,q)$。所以，$S^{-1}K=\bigcap_{i=1}^{q}S^{-1}N_i$是$S^{-1}\Lambda$-模$S^{-1}M$的$S^{-1}\sigma$-子模$S^{-1}K$的标准表示式。这样定理完全得到证明。

参　考　文　献

〔1〕 许永华，环的 σ- 结构(I)，数学学报，20:1 (1977)，61—72.

〔2〕 Atiyah, M. F., Introduction to Commutative Algebra (1969).

〔3〕 Northcott, D. G., A first Course of Homological Algebra (1973).

Normal Expression of σ-Submodule of the Λ-Module

Cheng Fu-Chang (程福长)

Abstract

Let Λ be a commutative ring with unit element, and let M be a Λ-module and $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, M)$. Then a non-empty subset N of M is called a σ-submodule of the Λ-module M, if (1) a-b$\in N$ for all a, $b \in N$, and (2) $\lambda\sigma(a) \in N$ and $x-\sigma(x) \in N$ for all $\lambda \in \Lambda$, $a \in N$, $x \in M$. Let N be a σ-submodule of M. N is said to be a primary σ-submodule of the Λ-module M, if (1) $N \neq M$, and (2) whenever $\lambda \in \Lambda$, $x \in M$ and $\lambda\sigma(x) \in N$, then either $x \in N$ or $\lambda^h\sigma(M) \subseteq N$ for some positive integer h. This paper is intended to show (1) that if M satisfies maximal condition of σ-submodule, and K is a σ-submodule of M, then K is a finite intersection of primary σ-submodules, and (2) that the uniqueness on the normal expression of σ-submodule of the Λ-module. Also, some results of fractional module have been obtained.