第3卷 第4期
1983年10月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.4
Oct. 1983

轨道压缩映射的不动点定理(Ⅲ)*

丁协平

(四川师范学院数学系)

在[1、2]内，我们引入了新的轨道压缩型条件，推广了[3-9]内若干已知结果。近来又有不少作者在具有两个距离 ρ 和 d 的距离空间 X 内研究了各类压缩型映射的不动点问题，见[10-15]。

本文目的是首先在具有距离 d,ρ 的距离空间 (X,d,ρ) 内研究轨道压缩型映射的不动点问题，进一步发展[1-2]中的结果：其次在比[12—15]内的压缩型条件更一般的条件下，研究了交换映射的公共不动点问题。我们的结果统一和发展了[1-15]中的主要结果。

以下我们用 N 表自然数集，ω 表非负整数集和 R_+ 表非负实数集。

定理1 设 T 是距离空间 (X,d,ρ) 的自映射，X 关于 d 是 T-轨道完备的，如果下列条件成立：

(i) $d(x,y)\leqslant c\cdot\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，其中 $c>0, c\in R_+$。

(ii) 存在 $p\in N$ 和非减函数 φ：$R_+\to R_+$ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\varphi(t))=\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$，$\forall t>0$，($\varphi^n$ 表 φ 的第 n 次迭代)和使得对一切 $x\in X$ 成立

$$\rho(T^px,T^{p+k}x)\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x,0,p+k)))，\forall k\in\omega. \tag{1}$$

其中 $\delta_\rho(O(x,0,p+k))$ 表集 $O(x,0,p+k)=\{x,Tx,\cdots,T^{p+k}x\}$ 的 ρ-直径。

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup d(x_n,Tx_n)\geqslant d(x_0,Tx_0)$，$\forall\{x_n\}\subset X, x_n\xrightarrow{d}x_0$，这里 $x_n\xrightarrow{d}x_0$ 表 $\{x_n\}$ 在 d 下收敛于 x_0。

则对每一 $x\in X$，$\{T^nx\}_{n\in\omega}$ 关于 d 收敛于 T 的一不动点。

证明 按[1]中定理1的证明，对每一 $x\in X$，$\{T^nx\}_{n\in\omega}$ 是 ρ-Cauchy 序列.因 X 关于 d T-轨道完备，故可设 $T^nx\xrightarrow{d}x_0$。由假设(iii)有

$$d(x_0,Tx_0)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup d(T^nx,T^{n+1}x)=\lim_{n\to\infty}d(T^nx,T^{n+1}x)=0,$$

所以 $x_0=Tx_0$，即 x_0 是 T 的一不动点。

注1 如果 T 关于 d 轨道连续，即 $\lim\limits_{n_i\to\infty}T^{n_i}x=u$ 蕴涵 $\lim\limits_{n_i\to\infty}TT^{n_i}x=Tu$，则显然定理1中的条件(iii)成立。[9]中的例说明仅压缩条件(1)不能保证不动点的存在性。

注2 由注1知[1]的定理1和[3-4]的主要结果都是定理1的特殊情形。

*1981年7月14日收到。

设 (X,ρ) 是距离空间，$T:X\to X$。如果对某 $x\in X$，$\delta_\rho(O(x,0,\infty))<\infty$，则称 T 在点 $x\in X$ 是 ρ-正则的。

定理 2　设 T 是距离空间 (X,d,ρ) 的自映射，X 关于 d T-轨道完备，T 在每一点 $x\in X$ 是 ρ-正则的。如果下列条件成立

(i)　$d(x,y)\leqslant c\cdot\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，其中 $c\in R_+$，$c>0$。

(ii)　存在 n：$X\to N$ 和非减函数 φ：$R_+\to R_+$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$，$\forall t>0$，和使得对一切 $x\in X$ 成立

$$(2)\qquad \delta_\rho(O(T^{n(x)}x,0,\infty))\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x,0,\infty)))。$$

(iii)　$\limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n)\geqslant d(x_0,Tx_0)$，$\forall\{x_n\}\subset X, x_n\xrightarrow{d}x_0$。

则对每一 $x\in X$，$\{T^nx\}_{n\in\omega}$ 关于 d 收敛于 T 的一不动点。

证明　任取 $x\in X$，定义序列

$$\{x_n\}_{n\in\omega}=\{x_0=x,x_1=T^{n(x_0)}x_0,\cdots,x_{n+1}=T^{n(x_n)}x_n,\cdots\}。$$

显然 $\delta_\rho(O(x_n,0,\infty))$ 是一非增非负数列，令 $\delta_\rho(O(x_n,0,\infty))\to\alpha\geqslant0$。如果 x 是 T 的不动点，则定理结论成立。设 x 不是 T 的不动点，则由(2)和 φ 的非减性推得

$$(3)\qquad \begin{aligned}\alpha&\leqslant\delta_\rho(O(x_n,0,\infty))=\delta_\rho(O(T^{n(x_{n-1})}x_{n-1},0,\infty))\\&\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x_{n-1},0,\infty)))\leqslant\cdots\leqslant\varphi^n(\delta_\rho(O(x,0,\infty)))。\end{aligned}$$

由 T 在 x ρ-正则和 φ 的假设，在(3)中令 $n\to\infty$ 推得 $\alpha=0$。故有 $\delta_\rho(O(x_n,0,\infty))\to0$。因为每一 $x_n\in O(x,0,\infty)$，从而 $\{T^nx\}_{n\in\omega}$ 是 ρ-Cauchy 序列。余下的证明与定理 1 相同。

注 3　[2]中定理 1 和[5]中命题 3 是定理 2 的特例。

定理 3　设 T 是距离空间 (X,d,ρ) 的自映射，X 关于 d T-轨道完备，如果下列条件成立

(i)　$d(x,y)\leqslant c\cdot\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，其中 $c>0,c\in R_+$，

(ii)　存在 $p,q\in N$ 和非减函数 $\varphi:R_+\to R_+$ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\varphi(t))=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$，$\forall t>0$ 和使得对一切 $x,y\in X$ 成立

$$(4)\qquad \rho(T^px,T^qy)\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x,0,p)\cup O(y,0,q))),$$

(iii)　$\limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n)\geqslant d(x_0,Tx_0)$，$\forall\{x_n\}_{n\in\omega}\subset X$，$x_n\xrightarrow{d}x_0$，则对每一 $x\in X$，$\{T^nx\}_{n\in\omega}$ 关于 d 收敛于 T 的唯一不动点。

证明　无妨设 $p\geqslant q$，对任意 $x\in X$ 考虑轨道序列 $\{x_n\}_{n\in\omega}=\{T^nx\}_{n\in\omega}=O(x,0,\infty)$。在(4)中令 $y=T^{p-q+k}x$，$\forall k\in\omega$，得到对一切 $x\in X,k\in\omega$ 成立

$$(5)\qquad \begin{aligned}\rho(T^px,T^{p+k}x)&\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x,0,p)\cup O(T^{p-q+k}x,0,q)))\\&\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x,0,p+k)))。\end{aligned}$$

于是由定理 1 知对每一 $x\in X$，$\{T^nx\}_{n\in\omega}$ 关于 d 收敛于 T 的一不动点。

现在设 y_0 也是 T 的不动点且 $y_0\neq x_0$，由(4)式和[1]中引理推得

$$\begin{aligned}\rho(x_0,y_0)=\rho(T^px_0,T^qy_0)&\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x_0,0,p)\cup O(y_0,0,q)))\\&\leqslant\varphi(\rho(x_0,y_0))<\rho(x_0,y_0)\end{aligned}$$

矛盾。故 $y_0=x_0$，即 x_0 是 T 的唯一不动点。

注 4　[1]的推论 1，[8]的定理 1 和[9-11]的主要结果都是定理 3 的特例。我们不再赘述。

定理 4　设 T 是距离空间 (X,d,ρ) 的自映射，X 关于 d T-轨道完备，T 在每一点 $x\in X$ ρ-正则，如果下列条件成立

（i）　$d(x,y)\leqslant c\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，其中 $c>0$，$c\in R_+$。

（ii）　存在 $n: X\to N$ 和非减函数 $\varphi: R_+\to R_+$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$，$\forall t>0$，和使得对一切 $x,y\in X$ 成立

（6）
$$\delta_\rho(O(T^{n(x)+n(y)}x,0,\infty)\cup O(T^{n(x)+n(y)}y,0,\infty))\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x,0,\infty)\cup O(y,0,\infty))),$$

（iii）　$\limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n)\geqslant d(x_0,Tx_0)$，$\forall\{x_n\}_{n\in\omega}\subset X$，$x_n\xrightarrow{d}x_0$，则对每一 $x\in X$，$\{T^nx\}_{n\in\omega}$ 关于 d 收敛于 T 的唯一不动点。

证明　在（6）式中令 $y=x$ 得到
$$\delta_\rho(O(T^{2n(x)}x,0,\infty))\leqslant\varphi(\delta_\rho(O(x,0,\infty)))。$$
由定理 2 知对每一 $x\in X$，$\{T^nx\}$ 关于 d 收敛于 T 的一不动点 x_0。x_0 的唯一性容易从（6）式得到。

注 5　[2]的系 1 和[5]的命题 3 是定理 4 的特例。

下面讨论交换映射对和映射族的情形。

引理　设 f,g,T,S 是距离空间 (X,ρ) 的自映射使得 $Tf=fT$，$Sg=gS$，$T(X)\subset g(X)$ 和 $S(X)\subset f(X)$。如果存在关于每一自变量非减的上半连续函数 $\Phi: R_+^5\to R_+$ 满足 $\max\{\Phi(t,0,0,t,t),\Phi(t,t,t,2t,0),\Phi(t,t,t,0,2t)\}<t$，$\forall t>0$，使得对一切 $x,y\in X$ 成立

（7）
$$\rho(Tx,Sy)\leqslant\Phi(\rho(fx,gy),\rho(fx,Tx),\rho(gy,Sy),\rho(fx,Sy),\rho(gy,Tx)),$$
则对每一 $x\in X$，存在序列 $\{x_n\}_{n\in\omega}\subset X$ 使得
$$y_{2n}=Sx_{2n}=fx_{2n+1},\quad y_{2n+1}=Tx_{2n+1}=gx_{2n+2},\quad\forall n\in\omega,$$
和 $\{y_n\}_{n\in\omega}$ 是 ρ-Cauchy 序列。

证明　任取 $x_0\in X$，因 $S(X)\subset f(X)$ 和 $T(X)\subset g(X)$，我们能定义序列 $\{x_n\}_{n\in\omega}\subset X$ 使得
$$y_{2n}=Sx_{2n}=fx_{2n+1},\qquad y_{2n+1}=Tx_{2n+1}=gx_{2n+2},\qquad\forall n\in\omega。$$

由（7）式有

（8）
$$\rho(y_{2n+1},y_{2n+2})=\rho(Tx_{2n+1},Sx_{2n+2})\leqslant\Phi(\rho(y_{2n},y_{2n+1}),\rho(y_{2n},y_{2n+1}),\rho(y_{2n+1},y_{2n+2}),\rho(y_{2n},y_{2n+1})+\rho(y_{2n+1},y_{2n+2}),0),$$

令 $\varphi(t)=\max\{\Phi(t,t,t,2t,0),\Phi(t,t,t,0,2t)\}$，则显然有 $\varphi: R_+\to R_+$ 非减上半连续且 $\varphi(t)<t$，$\forall t>0$。于是由（8）式经简单计算容易证得

（9）
$$\rho(y_{2n+1},y_{2n+2})\leqslant\varphi(\rho(y_{2n},y_{2n+1}))。$$

同理可证

（10）
$$\rho(y_{2n+2},y_{2n+3})\leqslant\varphi(\rho(y_{2n+1},y_{2n+2}))。$$

从（9），（10）两式得到

（11）
$$\rho(y_{n+1},y_n)\leqslant\varphi(\rho(y_n,y_{n-1}))\leqslant\cdots\leqslant\varphi^n(\rho(y_1,y_0))。$$

令 $c_n=\rho(y_{n+1},y_n)$。由[2]中引理2和(11)式推得

$$\lim_{n\to\infty} c_n \leqslant \lim_{n\to\infty}\varphi^n(\rho(y_1,y_0))=0.$$

下面证明 $\{y_n\}_{n\in\omega}$ 是 ρ-Canchy 序列，如若不是，则存在 $\varepsilon>0$ 和正整数列 $\{m(k)\}$，$\{n(k)\}$，$m(k)>n(k)>k$，使得

(12) $$\rho_k=\rho(y_{m(k)},y_{n(k)})\geqslant\varepsilon,\ k=1,2,\cdots,$$

其中 $m(k)$ 是使(12)成立的一切大于 $n(k)$ 的整数中的最小整数，由良序原理有

(13) $$\rho(y_{m(k)-1},y_{n(k)})<\varepsilon.$$

从而有

(14) $$\rho_k\leqslant\rho(y_{m(k)},y_{m(k)-1})+\rho(y_{m(k)-1},y_{n(k)})\leqslant c_{m(k)-1}+\varepsilon.$$

在(14)中令 $k\to\infty$ 得到 $\{\rho_k\}_{k\in N}$ 从右边收敛于 ε。

下面分四种情形讨论：

a) $m(k)$ 是偶数，$n(k)$ 是奇数， c) $m(k)$ 是奇数，$n(k)$ 是偶数，

b) $m(k)$ 是偶数，$n(k)$ 是偶数， d) $m(k)$ 是奇数，$n(k)$ 是奇数。

对 a)，由(7)式经简单计算可得

(15) $$\begin{aligned}\rho_k&\leqslant\rho(y_{m(k)},y_{m(k)+1})+\rho(y_{m(k)+1},y_{n(k)-1})+\rho(y_{n(k)+1},y_{n(k)})\\&\leqslant c_{m(k)}+c_{n(k)}+\Phi(\rho_k,c_{m(k)},c_{n(k)},\rho_k+c_{n(k)},\rho_k+c_{m(k)}).\end{aligned}$$

在(15)中令 $k\to\infty$ 得 $\varepsilon\leqslant\Phi(\varepsilon,0,0,\varepsilon,\varepsilon)<\varepsilon$，矛盾。

对 b)，又由(7)式经简单计算可得

(16) $$\begin{aligned}\rho_k\leqslant c_{m(k)}+c_{n(k)+1}+c_{n(k)}+\Phi(&\rho_k+c_{n(k)},c_{m(k)},c_{n(k)+1},\rho_k+c_{n(k)}+c_{n(k)+1},\\&c_{n(k)}+\rho_k+c_{m(k)}).\end{aligned}$$

在(16)中令 $k\to\infty$ 又得 $\varepsilon\leqslant\Phi(\varepsilon,0,0,\varepsilon,\varepsilon)<\varepsilon$ 矛盾。对 c)，d) 可同样得到矛盾。因此 $\{y_n\}_{n\in\omega}$ 是 ρ-Cauchy 序列。

定理5 设 (X,d,ρ) 是有距离 d,ρ 的距离间空，f,g,T,S 是完备距离空间 (X,d) 的连续自映射使得 $Tf=fT$，$Sg=gS$，$T(X)\subset g(X)$ 和 $S(X)\subset f(X)$，如果下列条件成立

(i) $d(x,y)\leqslant c\cdot\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，其中 $c\in R_+$，$c>0$，

(ii) 存在满足引理中假设的函数 $\Phi: R_+^5\to R_+$ 使(7)式成立。则 (T,f) 和 (S,g) 分别有唯一公共不动点且这两点重合。因此 f,g,T,S 有唯一公共不动点。

证明 由引理知存在 $\{x_n\}_{n\in\omega}\subset X$ 使得

$$y_{2n}=Sx_{2n}=fx_{2n+1},\quad y_{2n+1}=Tx_{2n+1}=gx_{2n+2},\quad \forall n\in\omega$$

和 $\{y_n\}_{n\in\omega}$ 是 ρ-Cauchy 序列，由假设(i)推得 $\{y_n\}_{n\in\omega}$ 也是 d-Cauchy 序列，因 (X,d) 完备，故可设 $y_n\xrightarrow{d}z$。又因 f,g,T,S 关于 d 连续，故在距离 d 下有

$$fz=\lim_{n\to\infty}fy_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}fTx_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}Tfx_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}Ty_{2n}=Tz,$$

$$gz=\lim_{n\to\infty}gy_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}gSx_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}Sgx_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}Sy_{2n+1}=Sz.$$

若 $Sz\neq Tz$，则由(7)，$fz=Tz$，$gz=Sz$ 和 Φ 的假设推得

$$\begin{aligned}\rho(Tz,Sz)&\leqslant\Phi(\rho(fz,gz),\rho(fz,Tz),\rho(gz,Sz),\rho(fz,Sz),\rho(gz,Tz))\\&\leqslant\Phi(\rho(Tz,Sz),0,0,\rho(Tz,Sz),\rho(Tz,Sz))<\rho(Tz,Sz)\end{aligned}$$

矛盾。故有 $Sz=Tz=fz=gz$，于是有 $f^2z=fTz=Tfz$ 和 $g^2z=gSz=Sgz$。若 $Tfz\neq fz$，则又

由(7)和Φ的假设推得

$$\begin{aligned}&\rho(Tfz,fz)=\rho(Tfz,Sz)\\&\leqslant\Phi(\rho(f^2z,gz),\rho(f^2z,Tfz),\rho(gz,Sz),\rho(f^2z,Sz),\rho(gz,Tfz))\\&\leqslant\Phi(\rho(Tfz,fz),0,0,\rho(Tfz,fz),\rho(Tfz,fz))<\rho(Tfz,fz)\end{aligned}$$

矛盾。故有$Tfz=fz$，同理可证$Sgz=gz$，于是有$ffz=Tfz=fz$和$ggz=Sgz=gz$，因此fz $(=gz=Sz=Tz)$是f,g,T,S的一公共不动点，设w也是T,f的一公共不动点且$w\neq fz$，则由(7)式有

$$\begin{aligned}&\rho(w,fz)=\rho(Tw,Sz)\\&\leqslant\Phi(\rho(fw,gz),\rho(fw,Tw),\rho(gz,Sz),\rho(fw,Sz),\rho(gz,Tw))\\&\leqslant\Phi(\rho(w,fz),0,0,\rho(w,fz),\rho(w,fz))<\rho(w,fz),\end{aligned}$$

矛盾。故$w=fz$，即fz是T和f的唯一公共不动点。同理可证fz是S和g的唯一公共不动点。因此fz是f,g,T,S的唯一公共不动点。

系 1　设(X,d,ρ)是有距离d,ρ的距离空间，f,g,T,S是完备距离空间(X,d)的连续自映射使得$Tf=fT$，$Sg=gS$，$T(X)\subset g(X)$，和$S(X)\subset f(X)$，如果下列条件成立

(i)　$d(x,y)\leqslant c\cdot\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，其中$c\in R_+$，$c>0$，

(ii)　存在$a\in(0,1)$使得对一切$x,y\in X$成立

$$\rho(Tx,Sy)\leqslant a\max\{\rho(fx,gy),\rho(fx,Tx),\rho(gy,Sy),\frac{1}{2}[\rho(fx,Sy)+\rho(gy,Tx)]\},$$

则(T,f)和(S,g)分别有唯一公共不动点且这两点重合。因此f,g,S,T有唯一公共不动点。

证明　令$\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=a\max\{t_1,t_2,t_3,\frac{1}{2}(t_4+t_5)\}$，显然$\Phi$满足定理5内假设。故系1成立。

系 2　设(X,d,ρ)是有距离d,ρ的距离空间，T,S是完备距离空间(X,d)的连续自映射，如果下列条件成立

(i)　$d(x,y)\leqslant c\cdot\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，其中$c\in R_+$，$c>0$，

(ii)　存在满足引理内假设的函数$\Phi:R_+^5\to R_+$使得对一切$x,y\in X$成立

$$\rho(Tx,Sy)\leqslant\Phi(\rho(x,y),\rho(x,Tx),\rho(y,Sy),\rho(x,Sy),\rho(y,Tx)),$$

则S,T有唯一公共不动点。

证明　在定理5中令$f=g=I$，即得此系。

注 6　[12-15]中主要结果都是系2的特例。

系 3　设(X,d,ρ)是有距离d,ρ的距离空间，f,g是完备距离空间(X,d)的连续满映射，如果成立

(i)　$d(x,y)\leqslant c\cdot\rho(x,y)$，$\forall x,y\in X$，$c\in R_+$，$c>0$，

(ii)　存在满足引理内假设的函数$\Phi:R_+^5\to R_+$使得对一切$x,y\in X$成立

$$\rho(x,y)\leqslant\Phi(\rho(fx,gy),\rho(fx,x),\rho(gy,y),\rho(fx,y),\rho(gy,x)),$$

则f和g在X内有唯一公共不动点。

证明　在定理5中令$S=T=I$，即得此系。

注 7　系3推广了[16]的系1和[17]的定理1。

系4 设 (X,d,ρ) 是有距离 d,ρ 的距离空间，f,g 是完备距离空间 (X,d) 的连续自映射，$\mathscr{F}$ 是 (X,d) 的连续自映射族使得对每一 $F\in\mathscr{F}$ 有 $Ff=fF$, $Fg=gF$ 和 $F(X)\subset g(X)\cap f(X)$，如果成立

(i) $d(x,y)\leqslant c\rho(x,y)$, $\forall x,y\in X$, 其中 $c\in R_+$, $c>0$,

(ii) 对每一对相异映射 $T,S\in\mathscr{F}$，定理5的假设(ii)成立，则 $\mathscr{F}$ 和 f,g 有唯一公共不动点。

参考文献

[1] 丁协平，轨道压缩映射的不动点定理，数学年刊，4(1981)，511—517.

[2] 丁协平，轨道压缩映射的不动点定理(Ⅱ)，四川师院学报，数学专辑(1981) 10—14.

[3] Pal, T. K.; Maiti, M., Extension of ciric's quasicontractions, *Math. Balkanica*, 6 (1976), 152—154, MR 80g: 54055.

[4] Pal, T. K.; Maiti, M., Extension of ciric's quasicontractions, *pure Appl. Math. sci.*, 6 (1977), 17—20, zbl. 78, 54033.

[5] Browder, F. E., Remarks on fixed point theorems of contractive type, *Nonlinear Anal. T. M. A.*, 3 (1979), 657—661.

[6] Kasahara, S., Generalization of Hegedüs' fixed point theorem, *Math. semi. Notes*, 7 (1979), 107—111.

[7] Kasahara, S., On some results on fixed points Ⅱ, *Math. Semi. Notes*, 7 (1979), 657—665.

[8] Fisher, B., Quasi-contractions on metric spaces, *proc. Amer. Math. soc.*, 75 (1979), 321—325.

[9] ćirić, Lj., On mappings with a contractive iterate, *publ. Inst. Math.*, 26(1979), 79—82, ржМат, 1980, 9Б 843.

[10] Rus, T. A., On a fixed point theorem in a set with two metrics, *Math. Rev. Anal. numér. théor. Approximation*, 6 (1977), 197—201, zbl. 383. 54028.

[11] Singh, S. L., On a fixed point theorem in metric spacas, *Math. Ed.* (Siwan) 12 (19.8), no 3, A62—A64, MR 89_f: 54047.

[12] Rhoades, B. E., A Common fixed point theorem, *Rend. Sem. Mat. Univ. padova*, 56 (1976), 265—266, zbl. 381. 54028.

[13] Mishra, S. N., Remarks on some fixed point theorems in bimetric spaces, *Indian J. pure Appl. Muth.*, 9(1978), 1271—1274. zbl. 387. 54021.

[14] Singh, K. L., A note on common fixed points, Bull. *Math. soc. sci. Math. R. S. R., n.* ser. 22(70)(1978), 95—98, zbl. 388. 54032.

[15] Ray, B. K., On common fixed points, *Mathematica*, (cluj) 20(43)(1978). 61—64. MR 80_f:54044.

[16] Machuca, R., A coincidence theorem, *Amer. Math. Monthly*, 74 (1967), 569.

[17] 王尚志，李伯瑜，高志民，关于膨胀映射的某些不动点定理，西北大学学报，1 (1981), 33—37, (数学进展 2 (1982)).

Fixed Point Theorems of Orbitally Contraction Mappings(Ⅲ)

Ding Xie Ping (丁协平)

Abstract

In this paper, we obtain several fixed point theorems for orbitally contractions and quasicontractions in a space (X,d,ρ) with two metrics d and ρ, and extend some main results of [1-9].

In the next place, we obtain a common fixed point theorem for commuting selfmappings of the space (X,d,ρ). It unify and generalize some main results of [12-15].