第 3 卷 第 4 期
1 9 8 3 年 10 月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.4
Oct. 1983

二次系统Ⅱ类方程极限环的分布*

叶 伯 英

（中南矿冶学院）

我们讨论二次系统（Ⅱ）类方程

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2=P(x,\ y)\\ \dot{y}=x(1+ax)=Q(x,\ y)\end{array}\right. \tag{1}$$

的极限环的集中分布问题，其中 $n\neq0$

不妨设 $n=1$，$a<0$。如果 $n\neq1$，$a>0$，可作变换

$$\bar{x}=-\frac{n^2}{|n|}x,\quad \bar{y}=ny,\quad \bar{t}=-\frac{n}{|n|}t \tag{2}$$

如果 $n\neq1$，$a<0$，可作变换

$$\bar{x}=\frac{n^2}{|n|}x,\quad \bar{y}=ny,\quad \bar{t}=\frac{n}{|n|}t \tag{2'}$$

不难证明，当下列条件满足时，系统（1）才有二个焦点

$$\left\{\begin{array}{l}(a+m)^2+4(a\delta-l)>0,\ \delta^2-4<0\\ \left[\dfrac{m^2-4l+am+2a\delta-m\sqrt{(a+m)^2+4(a\delta-l)}}{2a}\right]^2+\dfrac{4}{a}\sqrt{(a+m)^2+4(a\delta-l)}<0\end{array}\right. \tag{3}$$

在 $\delta=0$ 情况下，[1]指出了系统（1）的极限环是集中分布在一个焦点外围的。在 $\delta\neq0$ 情况下，[2]给出了

定理 1 如果系统（1）的系数满足下列条件之一，则极限环集中分布在一个焦点外围

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(i)}\ m(m^2-4l)\leqslant0,\\ \text{(ii)}\ m(m+2\delta)\leqslant0,\ m^2-4l+2am+4a\delta\neq0,\quad {}^{*)}\\ \text{(iii)}\ m(m^2-4l+am+2a\delta)\leqslant0,\ m^2-4l+2am+4a\delta\neq0.\end{array}\right. \tag{4}$$

[2]指出，“这样就解决了（Ⅱ）类方程的极限环集中分布问题”。其实，并不是这样。一方面，[2]并没有讨论 $n=0$ 的情况，另一方面，例如，我们还有

命题 1 如果系统（1）的系数满足条件

*1983年1月31日收到。

*） 在[2]中没有这一条件，但从证明中可以看出，如果 $m^2-4l+2am+4a\delta=0$，则 $\mathscr{L}[P,Q;M,N,B]\equiv0$ 而[3]的定理失效，因此，应该加上这一条件。

$$(5)\quad \begin{cases} m^2-4l\leqslant 0,\ (2l+m\delta-2a\delta)(l+m\delta+\delta^2)\leqslant 0 \\ m^2-4l+2am+4a\delta\neq 0 \end{cases}$$

则系统(1)的极限环集中分布在一个焦点外围。

证明 令 $M=\alpha\ \exp\left(\frac{\gamma x-\beta y}{\alpha\beta+\gamma^2}\right)$，$N=\beta\ \exp\left(\frac{\gamma x-\beta y}{\alpha\beta+\gamma^2}\right)$，

$B=\gamma\ \exp\left(\frac{\gamma x-\beta y}{\alpha\beta-\gamma^2}\right)$，其中 $\alpha=\frac{2l+m\delta-2a\delta}{m^2-4l+2am+4a\delta}$,

$$\beta=-\frac{2l+2m\delta+2\delta^2}{m^2-4l+2am+4a\delta}\quad \gamma=\frac{2a+m+2\delta}{m^2-4l+2am+4a\delta}.$$

由于

$$MN=-\frac{2(l+m\delta+\delta^2)(2l+m\delta-2a\delta)}{(m^2-4l+2am+4a\delta)^2}\exp\left(\frac{2(\gamma x-\beta y)}{\alpha\beta+\gamma^2}\right)\geqslant 0$$

所以M，N为非负(正)函数，又

$$\mathscr{L}[P,\ Q;\ M,\ N,\ B]=\frac{\partial}{\partial x}(NQ)-\frac{\partial}{\partial y}(MP)+\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$$

$$=(lx^2+mxy+y^2)\exp\left(\frac{\gamma x-\beta y}{\alpha\beta+\gamma^2}\right)$$

为常号函数。根据[3]的定理，可见系统(1)的极限环集中分布在一个焦点外围。

不难看出，当 $m<0$ 时，命题1与定理1是互相独立的。

更一般地，我们有

定理 2 如果不等式组

$$(6)\quad \begin{cases} [(2l+m\delta-2a\delta)\psi+m\varphi][(2l+2m\delta+2\delta^2)\psi+(m+2\delta)\varphi]\leqslant 0 \\ \psi[(m^2-4l)\psi-4a\varphi]\leqslant 0 \end{cases}$$

有解，且 $m^2-4l+2am+4a\delta\neq 0$，则系统(1)的极限环集中分布在一个焦点外围。

证明 设 φ_0，ψ_0 是不等式组(6)的解。令

$$M=\alpha e^{f(x,y)},\qquad N=\beta e^{f(x,y)},\qquad B=\gamma e^{f(x,y)}$$

其中 $\alpha=\frac{(2l+m\delta-2a\delta)\psi_0+m\varphi_0}{m^2-4l+2am+4a\delta}$，$\beta=-\frac{(2l+2m\delta+2\delta^2)\psi_0+(m+2\delta)\varphi_0}{m^2-4l+2am+4a\delta}$,

$$\gamma=\frac{(2a+m+2\delta)\psi_0+2\varphi_0}{m^2-4l+2am+4a\delta},\qquad f(x,y)=\frac{(\alpha\varphi_0+\gamma\psi_0)x+(\gamma\varphi_0-\beta\psi_0)y}{\alpha\beta+\gamma^2}.$$

由于

$$MN=-\frac{[(2l+m\delta-2a\delta)\psi_0+m\varphi_0][(2l+2m\delta+2\delta^2)\psi_0+(m+2\delta)\varphi_0]}{(m^2-4l+2am+4a\delta)^2}e^{2f(x,y)}\geqslant 0,$$

所以，M，N 为非负(正)函数。又

$$\mathscr{L}[P,\ Q;\ M,\ N,\ B]=\frac{\partial}{\partial x}(NQ)-\frac{\partial}{\partial y}(MP)+\frac{\partial}{\partial x}(BP)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=[(a\varphi_0+l\psi_0)x^2+m\psi_0 xy+\psi_0 y^2]e^{f(x,y)}$$

为常号函数。根据[3]的定理，可见系统(1)的极限环集中分布在一个焦点外围。　证毕

在定理 2 中取 $\varphi=0$，$\psi=1$ 就得到了命题 1。定理 2 在使用上是不方便的，且每取一组特定的 ψ 和 φ 就得到一组极限环集中分布的条件，它们之间有什么关系呢？下面我们来推导不等式组(6)有解的充分必要条件。

我们考虑 $m(m+2\delta)>0$ 的情况（对于 $m(m+2\delta)<0$ 的情况，下面所得结论也成立，不再赘述。）注意到

$\psi[(m^2-4l)\psi-4a\varphi]\leqslant 0$ 的解区域为图 1 的阴影部分

$[(2l+m\delta-2a\delta)\psi+m\varphi][2l+2m\delta+2\delta^2)\psi+(m+2\delta)\varphi]\leqslant 0$ 的解区域为图 2 的阴影部分。

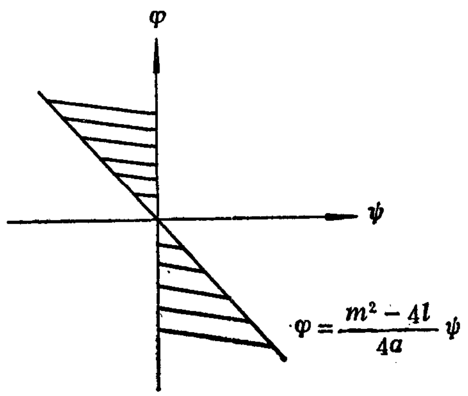

图 1

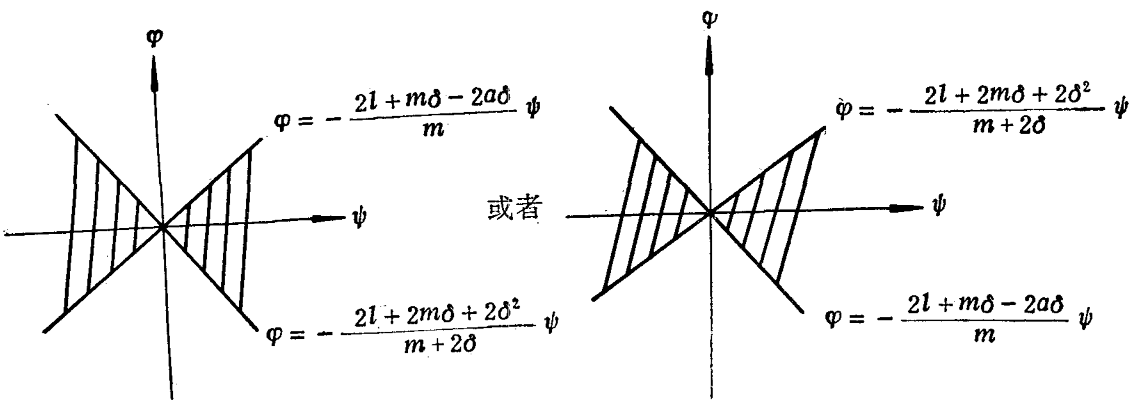

图 2

综合图 3 和图 4，容易看出，不等式组（ 6 ）有解的充分必要条件是下列条件之一满足

（7）　$$\text{(i)}\quad -\frac{2l+2m\delta+2\delta^2}{m+2\delta}\leqslant\frac{m^2-4l}{4a},$$

$$\text{(ii)}\quad -\frac{2l+m\delta-2a\delta}{m}\leqslant\frac{m^2-4l}{4a}.$$

所以，定理 2 可以叙述为

定理 2′ 如果条件（7）中有一个条件满足，且 $m^2-4l+2am+4a\delta\neq 0$，则系统（1）的极限环集中分布在一个焦点外围。

显然，我们在不等式组（6）中取特定的 ψ 和 φ 所得到的极限环集中分布的条件必定蕴含在条件（7）中。

我们考虑系统

$$\dot{x}=-y+\delta x+mxy-y^2,\quad \dot{y}=x(1+ax) \tag{8}$$

对于系统（8），当 $0<\delta<m<-a$ 时，在不同奇点外围有可能同时出现极限环[6]。[4]指出，如果

$$0<\frac{m}{2}\leqslant\delta<m<-a,\text{或}0<\delta<\frac{m}{2}+\frac{m}{2}\cdot\frac{m}{a}<m<-a$$

则在不同焦点外围不能同时出现极限环。

我们利用变换(2′)，将（8）变形为

$$\dot{\bar{x}}=-\bar{y}-\delta\bar{x}+m\bar{x}\bar{y}+\bar{y}^2,\quad \dot{\bar{y}}=\bar{x}(1+a\bar{x}) \tag{8′}$$

应用(7)式的(i)可得，如果

$$0<\frac{m}{2}+\frac{m^2}{8a}+\frac{m\sqrt{m^2+16a^2}}{8a}\leqslant\delta<\frac{m}{2}<m<-a,$$

则在不同焦点外围不能同时出现极限环。从而扩大了 δ 的取值范围，但还不能把[4]中所得的两个区间连接起来（图 3）。

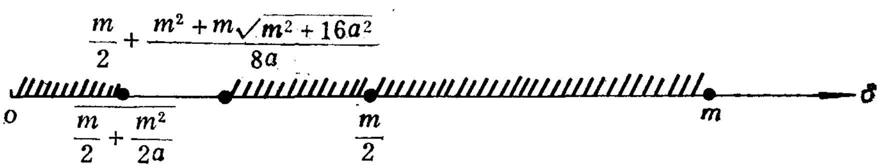

图 3

利用[3]的定理来讨论系统（1）的极限环的集中分布问题。如果取 $M=\alpha e^{f(x,y)}$，$N=\beta e^{f(x,y)}$，$B=\gamma e^{f(x,y)}$ 其中 α、β、γ 是常数，$f(x,y)$ 是一次齐次式或常数，则

$$\mathscr{L}[P,Q;M,N,\beta]=e^{f(x,y)}F(x,y)$$

其中

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$$

因为 $\mathscr{L}[P,Q;M,N,B]$ 为常号函数的充要条件是 $F(xy)$ 为常号函数，$F(x,y)$ 为常号函数的充要条件是下列条件之一满足

(9)　　(i) $I_2>0$，$I_1\ I_3>0$，　(ii) $I_2>0$，$I_3=0$，　(iii) $I_2=0$，$I_3=0$，$K\geqslant 0$，

其中 $I_1=a_{11}+a_{22}$，$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$，

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}, \qquad K=I_1c-b_1^2-b_2^2,$$

又 $MN\geqslant 0$ 的充要条件是

$$\alpha\beta\geqslant 0 \tag{10}$$

要从（9）和（10）中确定出 α，β，γ，f_x，f_y，则系统（1）的系数要满足一些关系式，这些关系式就是极限环集中分布的充分条件。可以证明：如果$\mathscr{L}[P, Q; M, N, B]$是 x 的二次多项式与 $e^{f(x,y)}$ 的乘积，则所得结果一定蕴含在定理 1 中；如果$\mathscr{L}[P, Q; M, N, B]$是 x 和 y 的二次型与 $e^{f(x,y)}$ 的乘积，则所得结果一定蕴含在定理 2′ 中

例　对于系统（8），在[4]的定理 4 的证明中$\mathscr{L}[P, Q; M, N, B, u]$是 x 的二次多项式，即本文的$\mathscr{L}[P, Q; M, N, B]$是 x 的二次多项式与 $e^{f(x,y)}$ 的乘积。利用变换(2)和(2′)之后，不难看出定理 1 蕴含了[4]的定理 4。

显然，定理 1 只是(9)的(iii)中的一部分情况。定理 2 只是(9)的(ii)中的一部分情况。如果我们取其他形式的函数，还可以得到其他的结果。所以，(II)类方程的极限环的集中分布问题还远没有解决，并且利用[3]～[5]中的方法似乎也不容易完全解决这一问题。

在定理 1 和定理 2 中，我们要求了

$$m^2-4l+2am+4a\delta\neq 0.$$

利用[5]的判定法则可以证明

命题 2　如果系统(1)的系数满足

$$m(m+2\delta)\leqslant 0,\ (m^2+(m+2\delta)^2\neq 0),\ m^2-4l+2am+4a\delta=0,$$

则系统(1)不存在闭轨线。

证明　令 $M=-mp+2Q$，$N=(m+2\delta)Q-2p$，则 $MP+NQ=-mp^2+(m+2\delta)Q^2$ 为常号函数，且使 $MP+NQ=0$的点只有奇点(0，0)、又

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0$$

因此，由[5]的判定法则可知系统(1)没有闭轨线

参考文献

[1] 陈兰荪，王明淑，二次系统极限环的相对位置与个数，数学学报 6(22)，1979.

[2] 刘南根，一类二次系统极限环的分布，科学通报，20(26)，1981.(湖南大学学报，3(8)，1981)

[3] 陈广卿，证明极限环不存在的新方法及其应用，数学学报，4(20)，1977.

[4] 杨宗培，关于周期解的不存在，数学的实践与认识，1981年第3期.

[5] 陈翔炎，二维定常系统闭轨线不存在的判别法则，南京大学学报，1978年第3期.

[6] 叶彦谦，极限环论，上海科学技术出版社，1965.

华中工学院出版社部分新书简介(一)

数理逻辑教程　　莫绍揆　著

32开　396页　28.4万字　定价1.40元

本书以教材的形式向读者介绍数理逻辑的基本理论和新成果。书中系统地论述了数理逻辑各重要概念的来龙去脉以及数理逻辑各家的学说，并根据理论与实际相结合的原则，对布尔差分表达式的最新化简方法等作了介绍，作者还提出了不少创见，如约束词的新说法、永真假性的特征数的概念等。

本书可供大学数学（尤其是数理逻辑专门化）、计算机科学系作教材，并可供计算机、自动控制、系统科学等方面的工作者和数学爱好者参考。

图论导引　　李修睦　著

大32开　422页　33.1字万　定价2.00元

作者积二十年研究图论的心得体会，编写了《图论导引》这本书，既照顾到教学的要求，能由浅入深，循序渐进；又照顾到科学的发展，介绍了近代的新成果及新动向，提出了若干有启发性的研究课题，引录了一定数量的有价值的中外参考文献，为进一步深入研究指出了方向。

全书共分十四章，每章附有较多的习题，可供教学时选用。本书既可作为高等院校数学专业高年级图论选修课和研究生学习的教材，又可作为已学过普通高等代数知识的初学者自学图论的读本，有关研究人员及工程技术人员也可参考。

数值分析　　李庆扬　王能超　易大义　编写

大32开　392页　30万字　定价1.65元

这本教材于1981年底初版后，各校已使用了二轮。再版时按72学时的教学要求作了适当删减修改，使它既可作为工科有关专业大学生及研究生“数值分析”(或“计算方法”)课的教材，还可供使用电子计算机从事数值计算的科技人员参考。书中例题较多，并附有部分习题答案，便于自学。

(下转第82页)