第3卷 第4期
1983年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.4
Oct. 1983

逼近论发展史简述(二)*

沈燮昌

(北京大学)

§3 函数逼近论的产生

Чебышев在1853年发表了一篇著名的论文"以称为平行四边形理论而著名的机械理论"[1]，它是逼近论的开创性工作。关于这篇论文，目前已有过很多论评文章。但是无论从Чебышев的这篇论文还是从这些评论来看，都没有说明Чбеышев如何将他所创造的方法应用到解决watt的平行四边形的最好结构上去。虽然在这篇文章中说以后要讲，但是一直没有见到他是怎样讲的，因此就有种种猜测。有人认为他文不对题，也有人认为，可能他发明了其他更好的机械，因此就不再叙述了。事实上，这篇文章确实是由watt的平行四边形问题而产生的。这可以从1852年他的国外出差报告中看出。他说："在很多需要我研究的问题中以及各种传递机械运动中，特别是在蒸汽机中，因为节约燃料及机器使用的寿命问题在很大程度上依赖于传递蒸汽所作的功的方法。我特别地研究以称为平行四边形理论而著名的机械理论"。

Чебышев还认为："Ершов所研究的机构从平行四边形运动的精确来看，在活塞运动的其他点上不是最好的。至于牵涉到活塞杆对摇臂的最好位置，上面的原则并没有给出来".他还认为："1. 如果希望活塞的位置在运动的开始、中间及终结时，完全是垂直的，则此直线的方向就以2:1分割由摇臂的端点所描述弧的指针；2. 如果不要求活塞在两个极端位置时绝对精确地在一条直线上，则可以取此直线以5:3分割上述的指针."他用这个原则来改造watt平行四边形的结构，就能大大增加这个机械运动的精确性。

Чебышев第一次地提出了用给定次数的多项式在给定区间上最佳逼近任意的函数(他假设这个函数在区间上可以展开为幂级数)的问题，他说："这个多项式由下面条件确定，即这个多项式与函数$f(x)$在给定区间上的偏差小于同一个次数的其他多项式对$f(x)$的偏差."这里第一次地提出了一般的问题，即被逼近的函数是解析函数，而不是在Laplace、Poncelet等人中所考虑的具体函数。在这篇文章中，他又写道："设$f(x)$是已知函数，$P_n(x)$是任意系数的n次多项式。如果我们选择系数，使得在$x=a-h$，$x=a+h$之间，差$f(x)-P_n(x)$是最小偏差于零，则差$f(x)-P_n(x)$具有下列性质：$f(x)-P_n(x)$在$x=a-h$到$a+h$中的最大值与最小值至少有$n+2$次取到同一个数值."但是，一直没有见到这个结论的证明，可能他在国外时已经给出了证明。

* 本文(一)见本刊1982年第二期.

现在介绍如何应用 Чебышев 所创造的方法来研究 watt 平行四边形。这是在 1955 年由 A. A. Гусак 所给出的。

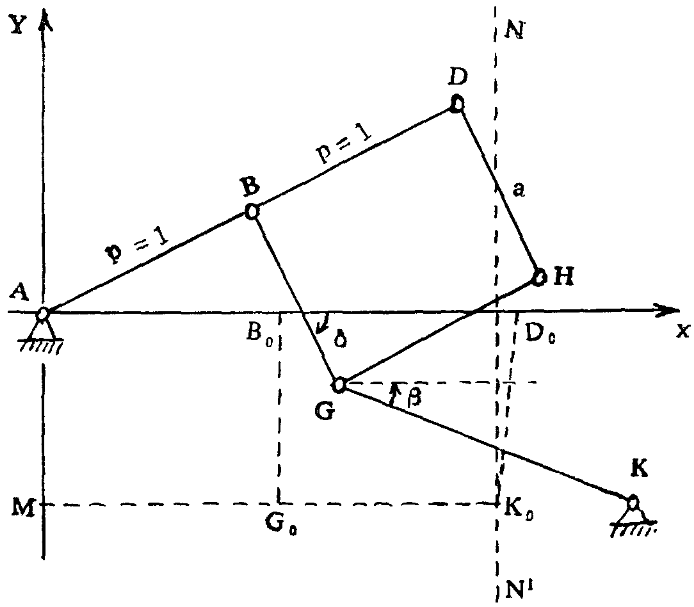

图 9

考虑完全平行四边形（见图 9）。设摇臂 $AD=2$，它被点 B 分为相等的两部分：$AB=BD=1$，联接杆 $DH=a$ 是已知的，要求确定导杆 $GK=r$，它的旋转轴 K 的坐标及垂线 NN' 使得在机械运动时，活塞联接杆固定点 H 对它有最小的偏差。

为此，首先寻找点 H 对垂线 NN' 的偏差表示式，并把它表示为摇臂与水平线间角 α 的函数。因此，设垂线 NN' 与水平线 MK 的交点为 H_0，即要求 H 与 H_0 的横坐标之差。

设 l 是 K 离 y 轴的距离，x_0 是 K 与 NN' 之间的距离，β 是导杆 GK 与 x 轴之间夹角，则垂线 NN' 的方程为 $x=l-x_0$，H 的横标 x 为

$$x=l-(r\cos\beta-\cos\alpha). \tag{1}$$

因此，点 H 对 NN' 的偏差为

$$X=(r\cos\beta-\cos\alpha)-x_0. \tag{2}$$

此外，从图 9 还可以看出 K 的横坐标 l 与纵坐标 v 有下列表示式：

$$l=\cos\alpha+a\cos\delta+r\cos\beta,\quad v=\sin\alpha+a\sin\delta-r\sin\beta, \tag{3}$$

其中 δ 是联接杆 DH 与 x 轴的夹角（见图 9）。

当摇臂在水平位置时，即 $\alpha=0$ 时，有

$$l=1+a\cos\delta_0+r\cos\beta_0,\quad v=a\sin\delta_0-r\sin\beta_0, \tag{4}$$

其中 δ_0 与 β_0 是 δ 与 β 对应在 $\alpha=0$ 时的角度。

由（3）消去 δ 后得到

$$s-v\sin\alpha-l\cos\alpha=(r\sin\alpha-vr)\sin\beta+(lr-r\cos\alpha)\cos\beta, \tag{5}$$

其中

$$2s=l^2+v^2+r^2+1-a^2.$$

这就是 β 与 α 之间的关系式，其中 l,v,r 是未知数。

现在将（2）展开为 α 的幂级数，为此首先利用（5）将 $\cos\beta$ 展开为 α 的幂级数：

$$\begin{aligned}\sin\beta&=d_0+d_1\alpha+d_2\alpha^2+\cdots\\ \cos\beta&=c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots,\end{aligned}\tag{6}$$

其中 c_k 与 d_k，$k=0、1、\cdots$，是待定系数。将（6）代入（5），同时也将 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 展开成幂级数，比较 α 的同次幂旁的系数，就可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{s-l}{r}&=-vd_0+(l-1)c_0,\\ -\frac{v}{r}&=-vd_1+d_0+(l-1)c_1,\\ \frac{1}{2}-\frac{l}{r}&=-vd_2+d_1+(l-1)c_2+\frac{c_0}{2},\\ \frac{1}{6}\frac{v}{r}&=-vd_3+d_2-\frac{d_0}{6}+(l-1)c_3+\frac{c_1}{2},\\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\end{aligned}\tag{7}$$

此外，利用 $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$ 与（6），比较系数也可以得到：

$$\begin{aligned}c_0^2&=1-d_0^2,\\ c_0c_1&=-d_0d_1,\\ c_1^2+2c_0c_1&=-d_1^2-2d_0d_1,\\ c_1c_2+c_0c_3&=-d_0d_3-d_1d_2,\\ c_2^2+2c_0c_4+2c_1c_3&=-d_2^2-2d_0d_4-2d_1d_3,\\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\end{aligned}\tag{8}$$

由（4）得到

$$(l-1-r\cos\beta_0)^2+(v+r\sin\beta_0)^2=a^2.\tag{9}$$

因此比较（7）、（8）的第一个等式与（9）就可以得到

$$c_0=\cos\beta_0,\quad d_0=\sin\beta_0.\tag{10}$$

从(8)的第二个式子得到

$$c_1=(-\mathrm{tg}\beta_0)d_1,$$

其中 d_1 由(7)的第二个式子所确定：

$$d_1=\frac{v+r\sin\beta_0}{r(v+(l-1)\mathrm{tg}\beta_0)}.\tag{11}$$

从(7)与(8)的第三个等式还可以确定 c_2，由于它的表达式很复杂，我们不准备写出来了。其他的 c_k 及 d_k 也可以由(7)与(8)依次地得到。

特别当 $\beta_0=0$ 时可以得到

$$c_2=-\frac{1}{2r^2},$$

$$c_3=\frac{(r+1)(l-r-1)}{2vr^3}, \tag{12}$$

$$c_4=\frac{4r^2-3}{24r^4}-\frac{(r+1)(r+5)(l-r-1)^2}{8v^2r^4}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

容易看出，将(2)中的函数 $X=F(\alpha)$ 展开为 α 的幂级数后可以得到

$$X=F(\alpha)=k_0+k_1\alpha+k_2\alpha^2+\cdots+k_5\alpha^5+k_6\alpha^6+\cdots, \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}
&k_0=(r\cos\beta_0-1)-x_0,\\
&k_1=rc_1=-\mathrm{tg}\beta_0\frac{v+r\sin\beta_0}{v+(l-1)\mathrm{tg}\beta_0},\\
&k_2=rc_2+\frac{1}{2},\\
&k_3=rc_3,\\
&k_4=rc_4-\frac{1}{24},\\
&k_5=rc_5,\\
&k_6=rc_6-\frac{1}{720},\\
&k_7=rc_7,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{aligned} \tag{14}$$

而其中 c_2、c_3、…是由(10)，(11)以及由(7)与(8)中解方程所决定的，特别当 $\beta_0=0$ 时，由(12)所确定。容易看出，展开式(13)中的系数依赖于5个参数 l,v,r,x_0,β_0，但是实际上只依赖于4个独立参数。因此自然可以令(13)中前4个系数为零，即 $k_0=k_1=k_2=k_3=0$ 来确定这些参数。此时 $F(\alpha)$ 在某个区间 $-h\leqslant\alpha\leqslant h$ 上的最大值就是偏差值。但是这种偏差值一般说来就不是最好的，因为完全有可能用其他方式来选择这五个参数，使得 $F(\alpha)$ 在 $-h\leqslant\alpha\leqslant h$ 上的最大值比刚才得到的值更小。精确地说，应该求

$$\min_{l、v、r、x_0\beta_0}\ \max_{-h\leq\alpha\leq h}|F(\alpha)|. \tag{15}$$

但是由于这个量非常难求，因此 Чебышев 提出其三次多项式在区间 $[-h,h]$ 上最佳逼近 $F(\alpha)$ 的问题：

$$\min_{g_0、g_1、g_2、g_3}\ \max_{-h\leq\alpha\leq h}|F(\alpha)-(g_0+g_1\alpha+g_2\alpha^2+g_3\alpha^3)|. \tag{16}$$

在找到了最佳逼近多项式 $g_0^{(0)}+g_1^{(0)}\alpha+g_2^{(0)}\alpha^2+g_3^{(0)}\alpha^3$ 后，再令它恒为零，就可以确定上面五个参数并计算出最佳逼近值。

但是，要精确地计算这个三次最佳逼近多项式也是不太容易的事。因此可以逐次地精确到 h 的某个幂次来寻找三次最佳逼近多项式。这就是 Чебышев“校正法”的主要思想。为此，首先令 $k_0=k_1=k_2=k_3=0$，即认为 $g_0^{(0)}+g_1^{(0)}\alpha+g_2^{(0)}\alpha^2+g_3^{(0)}\alpha^3$ 的一次近似式就是多项式 $k_0+k_1\alpha+k_2\alpha^2+k_3\alpha^3$。在一次近似中，令 $k_0=0$，由(14)就可以得到

$$x_0=r\cos\beta_0-1; \tag{17}$$

再在(14)中令 $k_1=0$，得到

$$\mathrm{tg}\beta_0\frac{v+r\sin\beta_0}{v+(l-1)\mathrm{tg}\,\beta_0}=0, \tag{18}$$

但是 $v+r\sin\beta_0\neq 0$，否则由(4)得 $a=0$ 或 $\delta_0=0$，这都是不可能的。由此得到 $\mathrm{tg}\,\beta_0=0$，即 $\beta_0=0$。因此可以应用公式(12)。

依次地令 $k_2=0$、$k_3=0$，从(14)及(12)可以得到

$$r=1,\ l=2,$$

且 $k_4=0$ 已经自动满足。由此，从(4)的第一式得到 $-\delta_0=90°$，由第二式得到 $v=-a$。由(17)得到 $x_0=0$，即此机械在水平位置时，联接杆与水平线成直角，而垂直线 NN' 就是通过 K 的垂线，K 的坐标为 $(2,-a)$。

这样一来，完全确定了导杆的长度 $r=1$，其旋转轴坐标 $(2,-a)$ 及垂线的位置 $x=2$。这样所得到的机械与 watt 本人所发明的机器中的参数完全一样。此时 $F(\alpha)$ 为

$$F(\alpha)=-\frac{1}{2v}\alpha^5-\frac{1}{12a}\alpha^7\cdots. \tag{19}$$

显然，这样的选择不是最好的。Чебышев 不满意这种逼近。从历史上看，首先从实践看出，这个结果是不能令人满意的。Чебышев 在他的国外出差报告上写道，他特别注意 watt 平行四边形运转的不正确而引起的坏作用，这些坏的痕迹在过去长期所使用的机器上可以发现，因为有侧压力。因此，以后的工程师们就构造特殊的校正表。在Чебышев以前，很自然地产生问题：能否用一个系统的方法来代替过去在经验上或多或少地已经觉察的成功的校正，使得能够在所有可能的校正方法中选择最好的一个。但是由于上述方法没有找到，但却使 Чебышев 得到了最佳一致逼近的思想。

Чебышев在“以平行四边形理论而著名的机械理论”一文中写道：“当我们将函数 $f(x)$ 展成 $x-a$ 的幂级数时，前几项的和就给出一个多项式，它在 $x=a$ 的邻近比同样次数的多项式更接近 $f(x)$。若要求表示此函数为整函数的形式，我就取此多项式作为 $f(x)$ 的近似值。但是，如果代替在 $x=a$ 附近最近似地表示 $f(x)$，而要求在给定的区间上增加近似值的精确度，那么在用一个整函数形式的函数来近似地表示 $f(x)$ 时，就需要将此多项式换成另一个多项式。这第二个多项式由下列条件确定：在给定的区间上，它对 $f(x)$ 的偏差与其他同一次数的多项式相比有最小的偏差。随着这个区间的减小，在适当选择 a 时，从 $f(x)$ 关于 $x-a$ 的幂级数展开式中可以找到一个表示式，它接近于 $f(x)$ 的第二个近似的多项式表示式。但是，只要这个区间是有范围的，这两个近似表示式的系数就彼此不同。它们的差别尽管很小，但是在我们研究机械时也不能忽视。”他又写道：“我们所研究的平行四边

形理论要求寻找一些近似计算方法，使得用此类方法对于在给定范围中所有的自变量值能够达到最大的精确性。这个理论的困难也正在于此。”

现在我们再回过来考虑上面的问题，由于假设 $k_1=0$，因此得到$\beta_0=0$。但是我们在应用校正法来研究函数 $F(\alpha)$ 的系数时，放弃这个假设，而仍认为 β_0 很小，使得 β_0^2 可以忽视。这样一来，重新用上面的方法可以算出(6)中的系数 c_i, $i=0$、1、2、…以及(13) 中 $F(\alpha)$ 展开式的系数：

$$
\begin{aligned}
k_0 &= (r-1)-x_0,\\
k_1 &= -\beta_0\lambda,\\
k_2 &= -\frac{\lambda^2}{2r}+\frac{\beta_0(r+1)\mu}{2r}+\frac{1}{2}+O(\beta_0^2),\\
k_3 &= \frac{\lambda\mu}{2r}\left(\frac{\lambda^2}{r}+1\right)-\frac{\beta_0}{2r^2}+\frac{\beta_0}{6}+O(\beta_0^2),\\
k_4 &= -\frac{\lambda^4}{8r^3}+\frac{\lambda^2}{6r}-\frac{\mu^2}{8r}\left(\frac{\lambda^2}{r}+1\right)^2-\frac{\mu^2\lambda^2}{2r^2}\left(1+\frac{\lambda^2}{r}\right)\\
&\quad -\frac{\beta_0(r+1)}{2ar^2}-\frac{\mu\lambda(\lambda-1)}{2ar}+\beta_0 u\left(\frac{18r-4r^2+33}{24r^8}-\frac{1}{24}\right)\\
&\quad +\frac{\beta_0}{a}\left(\frac{1}{8}+\frac{2r+1}{8r^2}\right)-\frac{1}{24}+O(\beta_0^2),\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中

$$
\lambda=\frac{v+r\beta_0}{v+(l-1)\beta_0},\quad \mu=\frac{l-r-1}{v+(l-1)\beta_0}. \tag{21}
$$

可以证明，函数 $F(\alpha)$ 在区间 $-h\leqslant\alpha\leqslant h$ 上的四次最佳逼近多项式为：

$$
\begin{aligned}
P(\alpha,h) &= \left\{k_0+\frac{1}{16}k_6h^6+\frac{7k_5^2k_8+2k_5k_6k_7-k_6^3}{64k_5^2}h^8+\cdots\right\}\\
&\quad +\left\{k_1-\frac{5}{16}k_5h^4-\frac{31k_5k_7-3k_5^2}{64k_5}h^6+\cdots\right\}\alpha\\
&\quad +\left\{k_2-\frac{13}{16}k_6h^4-\frac{87k_5^2k_8+10k_5k_6k_7+5k_6^3}{64k_5^2}h^6+\cdots\right\}\alpha^2\\
&\quad +\left\{k_3+\frac{5}{4}k_5h^2+\frac{22k_5k_7-k_6^2}{16k_5}h^4+\cdots\right\}\alpha^3\\
&\quad +\left\{k_4+\frac{7}{4}k_6h^6+\frac{36k_5^2k_8+2k_5k_6k_7-k_6^3}{16k_5^2}h^4+\cdots\right\}\alpha^4.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

令所有的系数为零，在精确到 h^8 以后，利用(20)与(21)就可以得到

$$\beta_0=\frac{5}{32a}h^4-\frac{13}{1536a}h^6,$$

$$\mu=\frac{5}{8a}h^2-\frac{11}{384a}h^4-\frac{53}{2048a}h^6,$$

$$r=1-\frac{25}{64a^2}h^6, \tag{23}$$

$$x_0=-\frac{25}{64a^2}h^6,$$

$$\lambda=1-\frac{25}{256a^2}h^2.$$

这里我们不准备给出证明，因为后面将给出六次多项式逼近的最佳逼近多项式的方法。这就是校正法。

watt 本人在平行四边形中取

$$AD=\frac{37}{24}s,\ DH=\frac{1}{2}s,$$

其中 s 是活塞运动的长度，且在摇臂的中心处构造平行四边形。应用这些数值，在这里的情况下就有

$$2=\frac{37}{24}s, \qquad a=\frac{1}{2}s.$$

因此得到

$$s=1.2973,\ a=0.6486.$$

此外，由摇臂长与活塞运动的长度可以确定摇臂对水平线的最大偏差角

$$\alpha_1=18°55'24'',$$

即

$$h=\frac{\pi}{180}\alpha_1=0.3303. \tag{24}$$

将 h 的值代入(23)，得到

$$\beta_0=0.0029,$$
$$\mu=0.1053,$$
$$r=0.9988, \tag{25}$$
$$x_0=0.0012,$$
$$\lambda=0.9997.$$

由(4)及(21)可以得到

$$\frac{\mu}{\lambda}=\text{ctg}\delta_0.$$

由此从(25)算出

$$-\delta_0=96°00'50''.$$

因此在中间位置时，平行四边形与水平线的夹角与 90° 的偏差不大。

由此容易算出弧指针的长度：

$$W=2(1-\cos\alpha_1)=0.1081;$$

摇臂 AD 上离开 A 的指针的一部分长度

$$W_1=a\sin(-\delta_0-90°)=a\sin 6°00'50''=0.0680,$$

因而另一部分的长度为

$$W_2=W-W_1=0.0401.$$

由此得到

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{0.0680}{0.0401}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}},$$

取第三个部分分式，可以得到

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{5}{3}.$$

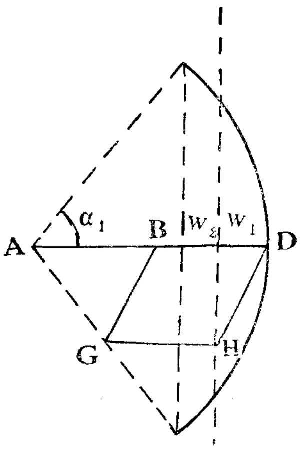

图 10

这样一来，如果不要求活塞杆在两个极端位置时绝对精确，则垂线方向可以取以 5:3 分割这个指针。这就是 Чебышев 的结果。

如果我们用“三点原则”来确定平行四边形，即要求活塞杆在运动的开始、中间及终了时处在一条垂线上，此时就需要求函数 $F(\alpha)$ 在区间 $[-h,h]$ 上的四次最佳逼近多项式，它在 $\alpha=\pm h$ 时的值与函数 $F(\pm h)$ 相等. 用同样的方法可以证明

$$\beta_0=0.0035,$$
$$\mu=0.1144,$$
$$r=0.9984,$$
$$x_0=-0.0010,$$
$$\lambda=0.9996,$$
$$-\delta_0=96°31'38''.$$

在现在的情况下，摇臂 AD 上离开 A 的指针的一部分长度为

$$W_1=a\sin(-\delta°-90°)=a\sin 6°31'38''=0.0737,$$

另一部分长度为

$$W_2=0.0344.$$

因此

$$\frac{W_1}{W_2}=2+\frac{1}{7+\cdots}.$$

如果取第一个部分分式，又可以得到 Чебышев 的另一个结果：“如果要求活塞杆在运动的开始、中间及终了时的位置是完全垂直的，则此垂线的方向可以取以 2∶1 分割由摇臂的端点所描述的弧的指针.”(可以参看[1]，24页.)

现在我们对这两种情况来给出活塞杆在区间 $[-h,h]$ 上离开直线的极值偏差值，这里取 $h=0.3303$.

对于第一种情况，即“在活塞杆两个极端位置不要求绝对精确”时，此值为

$$L_1 = \pm 0.000195.$$

Ёршов 曾取垂线为平分弧指针得到偏差为 0.00046，这就已经比 Watt 的精确五倍，这里又比 Ершов 精确二倍，这样就比 Watt 的精确有十倍之多.

对于第二种情况，即“在活塞的开始、中间及终了时位于垂直位置”时，此时的偏差值为

$$L_2 = \pm 0.000252,$$

因此就没有第一种情况来得精确. 这样就没有必要使活塞在运动的开始、中间及终了时的位置精确地在一条垂直线上. 而 Watt 的结果可以看作是 Чебышев 结果的一次近似. 这里从误差的数值来看，似乎都不大，但是正是由于这个差别，对机器使用的寿命却有很大的影响.

从上面的介绍，清楚地可以看出，逼近论是从实际的需要而产生的. 在生产发展的过程中，原来的机器已经不符合要求，实际需要进一步进行理论研究. 从上面解决问题的过程中看出，开始时只考虑很小的区间 $[-h, h]$，但是实际上 h 不一定很小，因此就提出了新的问题，进一步地发展了理论.

Чебышев 还研究了比 Watt 的平行四边形有更高精确度的机械结构，这里不准备再介绍了.

最后，我们准备介绍 Чебышев 如何用校正法来求可以展开为幂级数的函数

$$f(x) = k_0 + k_1 x + \cdots + k_7 x^7 + \cdots \tag{26}$$

在区间 $[-h, h]$ 上的最佳六次逼近多项式，其中假设 $k_7 \neq 0$.

设六次最佳逼近多项式的形状为

$$P_6(x, h) = \sum_{\nu=0}^{6} k_\nu(h) x^\nu, \tag{27}$$

其中

$$k_\nu(h) = \sum_{\mu=0}^{\infty} k_{\nu\mu} h^\mu. \tag{28}$$

我们认为 h 很小，令 $x = zh$，则问题化为六项多项式

$$P_6(z, h) = \sum_{\nu=0}^{6} k_\nu(h)(zh)^\nu \tag{29}$$

在 $[-1, 1]$ 上最佳逼近函数 $f(x) = f(zh)$.

显然，精确到 h^7，可以取这个六次多项式的一次近似式为

$$P_6^0(z, h) = \sum_{\nu=0}^{6} k_\nu (hz)^\nu, \tag{30}$$

这样一来，$P_6(z, h)$ 的精确表示式为

$$P_6(z, h) = P_6^0(z, h) + Q_6(z, h) h^7, \tag{31}$$

其中，$Q_6(z,h)$是需要寻找的六次多项式。

为了确定$Q_6(z,h)$，考虑

$$f(x)-P_8^0(z,h)=\left[\sum_{\nu=7}^{\infty}k_\nu h^{\nu-7}z^\nu-Q_6(z,h)\right]h^7.$$

对于方括弧中的表达式，如果只要精确到h，则可以从$k_7z^7-Q_6(z)=T_7(z)$的最小偏差于零来求。因此由已知的Чебышев定理：

$$T_7(z)=\frac{k_7}{2^7}[(z+\sqrt{z^2-1})^7+(z-\sqrt{z^2-1})^7], \tag{32}$$

得到

$$Q_6(z)=k_7z^7-T_7(z)=k_7z^7-\frac{k_7}{2^7}[(z+\sqrt{z^2-1})^7+(z-\sqrt{z^2-1})^7],$$

它与要求的$Q_6(z,h)$相差是阶为h的六次多项式。

因此

$$Q_6(z,h)=k_7z^7-T_7(z)+Q_6^0(z,h)h, \tag{33}$$

其中$Q_6^0(z,h)$是六次多项式，它由下面条件确定：

$$\sum_{\nu=7}^{\infty}k_7h^{\nu-7}z^\nu-Q_6(z,h)=\sum_{\nu=8}^{\infty}k_\nu h^{\nu-7}z^\nu+T_7(z)-Q_6^0(z,h)h$$

在$[-1,1]$上最小偏差于零。

根据Чебышев基本定理，方程

$$\left(\sum_{\nu=8}^{\infty}k_\nu h^{\nu-7}z^\nu+T_7(z)-Q_6^0(z,h)h\right)^2-L_1^2=0 \tag{34}$$

及

$$(z^2-1)\frac{d\left[\sum_{\nu=8}^{\infty}k_\nu h^{\nu-7}z^\nu+T_7(z)-Q_6^0(z,h)h\right]}{dz}=0 \tag{35}$$

有8个公共根。如果忽略h^2以上的阶，则方程(34)与(35)可以改写为

$$T_7^2(z)+2T_7(z)[k_8z^8-Q_6^0(z,h)]h-L_1^2=0, \tag{36}$$

$$(z^2-1)\frac{d[k_8z^8h+T_7(z)-Q_6^0(z,h)h]}{dz}=0. \tag{37}$$

最后一个方程(37)在精确到阶h以后，可以写为

$$(z^2-1)T_7'(z)=0, \tag{38}$$

而方程(36)可以改写为

$$(T_7^2(z)-L_1^2)T_7(z)+2T_7^2(z)[k_8z^8-Q_6^0(z)h]h=0. \tag{39}$$

如果再利用$T_7(z)$在(38)的根上满足$T_7^2(z)=\left(\frac{k_7}{2^6}\right)^2$，则由(39)可以得到

$$\left[\left(\frac{k_7}{2^6}\right)^2 - L_1^2\right]T_7(z) + 2\left(\frac{k_7}{2^6}\right)^2[k_8z^8 - Q_8^0(z,h)]h - c(z^2-1)T_7'(z) = 0, \tag{40}$$

其中 c 为常数．若取 $c = \frac{2k_8}{7k_7}\left(\frac{k_7}{2^6}\right)^2$，则由(40)可以推出 $T_7(z)$ 旁系数为零，即

$$L_1 = \pm\frac{k_7}{2^6}. \tag{41}$$

由此得到

$$Q_8^0(z,h) = k_8[z^8 - \frac{z^2-1}{7k_7}T_7(z)]. \tag{42}$$

这样一来，我们从(33)、(42)及上面的讨论可以知道，在精确到 h^2 后，$Q_6(z,h)$ 有近似表示式

$$\begin{aligned} Q_6^{(1)}(z,h) &= k_7z^7 - T_7(z) + k_8[z^8 - \frac{z^2-1}{7k_7}T_7'(z)]h \\ &= k_7\left(\frac{7}{9}z^5 - \frac{7}{8}z^3 + \frac{7}{64}z\right) + k_8\left(\frac{9}{4}z^6 - \frac{13}{8}z^4 + \frac{25}{64}z^2 - \frac{1}{61}\right)h. \end{aligned} \tag{43}$$

用类似的方法还可以将 $Q_6(z,h)$ 表示为

$$Q_6(z,h) = Q_6^{(1)}(z,h) + Q_6^{(2)}(z,h)h^2,$$

并且以精确到 h^4 来确定 $Q_6(z,h)$，其中 $Q_6^{(2)}(z,h)$ 也是一个待定的六次多项式．这样就可以得到(29)中的 $P_6(z,h)$ 的近似表达式中的系数：

$$k_0(h) = k_0 - \frac{2k_7k_8k_9 + 9k_{10}k_7^2 - k_8^3}{256k_7^2}h^{10} + \cdots,$$

$$k_1(h) = k_1 - \frac{7}{64}k_7k^6 + \frac{58k_8^2 + 59k_7k_9}{256k_7}h^8 + \cdots,$$

$$k_2(h) = k_2 + \frac{25}{64}k_8h^6 + \frac{26k_7k_8k_9 + 221k_{10}k_7^2 - 38k_8^3}{256k_7^2}k^8 + \cdots,$$

$$k_3(h) = k_3 - \frac{7}{8}k_7h^4 - \frac{135k_8^2 + 101k_7k_9}{64k_7}h^6 + \cdots,$$

$$k_4(h) = k_4 - \frac{13}{8}k_8h^4 - \frac{14k_7k_8k_9 + 209k_{10}k_7^2 - 7k_8^3}{64k_7^2}h^6 + \cdots,$$

$$k_5(h) = k_5 + \frac{7}{4}k_7h^2 + \frac{44k_8^2 + 37k_7k_9}{16k_7}h^4 + \cdots,$$

$$k_6(h) = k_6 + \frac{9}{4}k_8h^2 + \frac{2k_7k_8k_9 + 55k_7^2k_{10} - k_8^3}{16k_7^2}h^4 + \cdots,$$

且得到逼近的误差值为

$$\pm\frac{k_7}{2^6}\left(1 + \frac{10k_8^2 + 9k_7k_9}{4k_7^2}h^2\right)h^7.$$

当然还可以再继续下去，但是已经没有必要了，因为从一次近似到现在，精确度已经提高了64倍。

这样，我们就可以看出 Чебышев 校正法的思想了。

函数逼近论目前有很大的进展，不仅研究实数域上多项式逼近问题，而且还研究其他函数系（有理函数、指数函数、无理函数、逐段多项式）的最佳逼近问题以及复数域上各种函数系的逼近及最佳逼近问题。有兴趣的读者可以参看作者的几篇综合性介绍文章。

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Теория механизмов, известных под названием параллелограммов, *Полн. собр. соч*. Т. 2, м.-л., 1947.

[2] Русак, А. А., Теория приближения функций, Изд. БГУ, Минск, 1972.

[3] Чебышев, П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функции, *Полн. собр. соч*., Т. 2, М.—Л., 1947.

[4] Чебышев, П. Л., Об одном механизме, *Полн. собр. соч*., Т. 4, М.—Л., 1956.

[5] Ахиезер, Н. И., П. Л. Чебышев и его научное наследие.—*Избранние труды. П.Л. Чебышва*, М., 1955.

（上接第54页）

（下转第144页）