第 3 卷 第 4 期
1 9 8 3 年 10 月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.4
Oct. 1983

Wedderburn 定理及其推广与交换性问题*

谢邦杰 郭元春

（吉林大学）

Wedderburn 定理即“有限体必为域”。

Brandis（1963—64，[121]）对 Wedderburn 定理给了一个纯群论的证明。

Ebey 与 Sitaram（1969，[122]）以及 Corradi 与Kárteszi（1975，[123]）等亦均先后对 Wedderburn 定理给出置换群论的证明。

Nagahara 与 Tominaga（1974，[56]）对Wedderburn 定理给出两个简单的证明.一是通过对共轭元的计算，一是用 Galois 理论。

Wedderburn 亦曾对其定理给出三个证明，但其中之一不成立，Hinz（1977，[125]）为更正此而首先证明有限非交换域必含一个非中心元其中心化子非交换，然后对元数用归纳法即可证“有限体必为域”。

Johnsen 等（1966，[126]）把 Wedderburn 定理推广为：设 R 为示性数 $\neq 2$ 的非交换 Jordan 环，I 为 R 的理想使 R/I 恰含 q 个元素且示性数 $p>5$ 。如果 R/I 为体，I 为交换环且含于 I^2 生成的理想中的结合子为零，当 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ I)$ 时就或有 $x^q=y^q$ 或 x,y 均与 I 中元可换，则 R 为交换的。

Outcalt 等（1967，[111]）把Wedderburn 定理推广为：如果环 R 的理想 J 使 R/J 为 q 元体且 $J^2=\{0\}$，则 R 为交换的必要而且只要 R 中不同的 q 次幂元素的个数至多是 q。1970年，他们（[127]）又把其早期结果推广到幂结合环 R：如果 R 有 1 而 I 为其理想且 R/I 为有限域，又 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ I)$ 时就有 $x^2=y^2$ 或 x,y 均与 I 的元交换，则 R 为交换的。

Carcanague（1971，[128]）证明了：如果体 K 在其中心 C 上为有限维的而 C 的每个有限扩张 C' 为循环扩张且 C 中元恒为 C' 中元的范数，则 $K=C$，此亦为 Wedderburn定理的推广。

Taylor（1974，[129]）亦得出 Wedderburn 定理的初等证明及其推广。

Herstein（1975，[130]）应用 Kaplansky 的一个定理给出 Faith 定理（根于其真子环上之体为域）的一个简短证明，Faith 定理当然也是 Wedderburn 定理的推广。

Jacobson（1945，[1]）把 Wedderburn 定理推广为：如对环 R 的每个元素 a，有自然数 $n(a)>1$ 使 $a^{n(a)}=a$，则 R 为交换的．证明中用到 Zorn 引理与较多的域上代数的理论，

---

*本文曾于 1682 年在南京召开的全国代数学术会议的大会上报告过。

1982年6月10日收到。

于是寻求 Jacobson 定理的初等证明亦不乏人努力。首先是 Forsythe 与 McCoy (1946, [2]) 注意到满足 $x^{n(x)}=x$ 的体的交换性可予简证，而对 Jacobson 定理的一特款给出初等证明。R.Ayoub与C.Ayoub (1964,[3]) 对一类 n，Luh (1967,[47]) 对所有 n，不用超穷论法而证明了 $x^n=x$ 的Jacobson定理。此外，Herstein (1954,[5])、Wansley (1971,[6])、Rogers (1971,[7])、Huzurbazar 与 Sivaramakrishnan (1971,[8])、Nagahara与 Tominaga (1974,[56])、Dolan (1976,[70])、Morita (1978,[91]) 等亦均对 Jacobson 定理给出初等证明。

Kaplansky(1951,[9]) 证明了：如果体 K 的元 x 恒满足 $x^{n(x)}\in C$ (K的中心)，则 K 为域。此定理推广了与交换性有关的 Wedderburn 定理，Noether 定理，华罗庚定理以及 Jacobson 的另一个定理。而且指出如何把它容易地推广到 Jacobson 半单纯环上去。Herstein (1953,[10]) 再把它推广到 Köthe 半单纯环上去。

Herstein (1951,[11]) 证明了：如果有 $n>1$ 使环 R 的元素恒满足 $x^n-x\in C$ (R的中心)，则 R 是交换的。其后 (1952,[12]) 又把此推广为 $n(x)$ 有界即可。然后(1953,[13]) 再推广成 $x^{n(x)}-x\in C$ 即可，而得到 Jacobson 定理的明显推广形式。接着在[14]中把此更推广为：对 $a\in R$有多项式$P_a(t)$使$a^2P_a(a)-a\in C$ 即知 R 为交换的。进一步，在 [15] 中再推广为：如果对 $x,y\in R$ 恒有 $n(x,y)>1$ 使 $x^{n(x,y)}-x$ 与 y 可交换，则R为交换的；或更一般，对 x,y 恒有多项式 $P_{(x,y)}(t)$ 使 $x^2P_{(x,y)}(x)-x$ 与y可交换即可。

另一方面，Herstein (1950, [16]) 证实了 Vandiver 的猜想而把 Wedderburn 定理推广成：如果环 R 的零因子恒在中心内且每个元素恒生成有限子环，则 R 为交换的。并于 (1954,[17]) 把条件“零因子恒在中心内”削弱为“诣零元素恒在中心内”。

Ikeda (1952, [18]) 推广了上述的 Kaplansky 定理，Nakayama (1953, [19]) 再推广之，又于 (1955, [20]) 更进一步推广且概括了 Herstein (1953) 的结果 (具体结果可参看 [131])。

Herstein (1957, [21]) 证明了：环 R 为交换的必要而且只要对 $x,y\in R$ 恒有 $n(x,y)>1$ 使 $(xy-yx)^{n(x,y)}=xy-yx$ (还可参看 [22])。Tominaga (1959—60, [23]) 又推广了此结果。

Nakayama (1959, [24]) 应用Drazin 定义的 N-环而证明了：N-环 F 上一个代数 R 如果满足条件“有 R 到 $F[x]$ 内的映射$a\to P_a(x)$ 使 $a-a^2P_a(a)\in C$(R 的中心)”，则 R 为交换的。于此，取 F 为“整数”作成的环即得 Herstein (1953, [14]) 的结果。同时也推广了 Nakayama (1955, [20]) 的结果。特别地，当 R 为 F 上一个代数环 (即 R之元素恒满足 F 上一个以 1 为常数项的多项式) 时，则上述条件等价于 R 的诣零元素恒在中心 C 内，故又得：如果 R 是 N-环上的代数环且其诣零元素均在中心内，则 R 为交换的。此结果概括了 Arens 与 Kaplansky，Herstein，Jacobson 以及 Drazin等的有关定理。

Henriksen (1958—59, [25]) 欲推广 Jacobson 定理于半环，感到一般的推广可由一些例子说明甚为困难，仅推广成：如果半环 R 含零元素与单位元素，而单位元素 e 为唯一的非零等方元且$a+e=e+a$，则当 R 满足 $a^{n(a)}=a$ 之条件时，R 或为域或为二元格。

Faith (1960, [26]) 考虑任意环 R 及其真子环 B，当恒有 $a^{n(a)}\in B$ 时，就说 R 根于 B

上，此系上面Kaplansky，Herstein 等的考虑（B 为 R 的中心）的推广，而当 R 为含极小单边理想的单纯环时，上面的条件即导出 R 为域，并由此推广了早期在体上的一些有关工作。Mekeĭ（1973，[28]）把上面的考虑再加以推广，此亦推广了[27]中的两个定理（详见[131]）。

Herstein（1961，[31]）把 Jacobson 最初的 R 满足 $x^n=x$ 即交换的结果推广为：如果对环 R 有 $n>1$ 使 $x\to x^n$ 为 R 到 R 上的一个自同态，则 R 为交换的。又在[29]中对Jacobson 的 $x^{n(x)}$ 定理给出一个使大学二年级同学也能看懂的证明，并在[30]中证明了：设 R 的一个自同构 φ 有质数周期且其定点均在中心内，如果 R 是具有极小条件的半单纯环，则 R 为交换的。

如果对环 R 的 x，y 恒有自然数 $m(x,y)$ 及 $n(x,y)$ 使 $(xy)^{m(x,y)}=(yx)^{n(x,y)}$，则说 R 是广义交换环。Belluce 等（1966，[32]）证明了：如果广义交换环为半单纯的，则它为交换的；广义交换环的换位子理想为诣零的。证明中所用的主要工具是 Herstein（1955，[15]）的结果。

Armendariz（1967，[33]）把环 R 根于其子环 B 上说成是 R 是 B 的根扩张而证明了：如果环 R 无非零诣零理想且为其交换子环 B 的根扩张，则当 B 为半单纯环或为 R 的单边理想时 R 为交换的。

Johnsen 等（1968，[34]）证明了有 1 的非结合环 R 恒满足 $(xy)^2=x^2y^2$ 时必为交换的。并用矩阵环的例说明有 1 的条件是必需的，又有例说明不能把恒等式换为 $(xy)^k=x^ky^k$ $(k>2)$。其后，Boers（1969，[35]）证明这样的环还是结合的，只要其示性数非 2 或3。

Bell（1968，[36]）用初等方法证明 Herstein（[11]，[21]）的定理，首先证明具有所设性质的环为双环（即单边理想恒为两边理想的环），然后导出交换性。

Johnsen 等（1968，[37]）将其早期[38]的成果推广为可设 R 为适合一定条件的幂结合环。又进一步在[39]中应用 Albert—Wedderburn 定理（示性数非 2，3，5 的有限幂结合可除环必为域）而得到：设 R 为幂结合环其示性数非 2，3，5，其理想 I 使得（1）R/I 为 q 元体，（2）$x\equiv y(\mathrm{mod}\ I)$ 时就有 $x^q=y^q$。于是（a）当 I 交换时，R 亦然；（b）当 I 既结合又交换时，R 亦然。

Morgado（1968，[40]）把[34]中的结果推广为：如果在非结合环 R 中恒有 $(xy)^2=x^2y^2$ 且对每对 x,y 有 e 使其在 $\{x,y,e\}$ 生成的乘法子广群中为结合的与可消去的，则R为交换的。

Jain 与 Menon（1969，[41]）在[32]的基础上得到：如果 R 是一个广义交换环，a，$b\in R$ 且 a 与 b^k 均为拟正则的（对所有 k），则有 n 使 $ab^n=b^na$。由此与[15]即得：一个无非零诣零理想的广义交换环为交换的。

设环 R 有 1 且每个非单位为诣零元素，于是 R 的所有诣零元素作成一个两边理想N。Outcalt 与 Yaqub（1970，[42]）证明了，如果 R/N 有限且 $x-y\in N$ 时就有 $x^2=y^2$ 或x,y 与 N 的每个元可换，则 R 为交换的。当 $N=0$ 时此即 Wedderburn 定理。

Lucke（1970，[43]）称环 R 为 Jacobson 环，如果对 $x\in R$ 恒有 $x\in\{x^n,\ n\geqslant 2\}$；称一拓扑环 R 为一 J-环，如果对 $x\in R$ 恒有 $x\in\{x^n,\ n\geqslant 2\}$ 的闭包。于是由 Jacobson 定理及 Herstein 的一个结果便证明了局部紧致 J-环为交换的。

设J为有1的环R的Jacobson根，如果R/J为单纯的，则说R是准质的。Luh(1971, [44]) 证明了：如果准质环R恒满足 $(xy)^k=x^ky^k$, $k=n$, $n+1$, $n+2$; $n\geqslant 0$, 则R为交换的（还可参看 [34]）。Kaya (1976, [72]) 推广为R是半质或准质的且n可依于x, y. Felzenszwalb (1978, [92]) 关于 [72] 作了个注记，并指出满足Kaya条件环之换位子理想为诣零的。后来，他 (1979, [105]) 证明了：设R有1，若对任意$x,y\in R$，有$n(x,y)>1$使 $(xy)^k=x^ky^k$, $k=n(x,y)$, $n(x,y)+1$，则R的换位子理想为诣零的。Ligh与Richoux (1977, [74]) 证明了：有1的任意环对三个连续数满足 $(xy)^n=x^ny^n$ 时即为交换的。Richoux (1979, [99]) 证明了：设R为一环且对任意$x,y\in R$有$n=n(x,y)\geqslant 1$使$k=n$, $n+1$, $n+2$时 $(xy)^k=x^ky^k$，则当R有1或无诣零元时为交换的。

Bell(1971, [45])证明了：(1)如果R是有1的分配生成近似环且恒满足 $(xy-yx)^{n(x,y)}=xy-yx$，则R为交换环。(2) 如果有1的分配生成近似环R满足条件“$x-x^{n(x)}$ 恒在乘的中心内”，则R为交换环。

设K为一体，Z为其中心而含非零元 $c_1,c_2,\cdots,c_s$。Lihtman (1971, [46]) 证明了：如果对每个m-交换子V有$n_1,n_2,\cdots n_s$使$c_1V^{n_1}+c_2V^{n_2}+\cdots+c_sV^{n_s}=z\in Z$，则$K=Z$。当$K$为环时，在类似条件下又证明了所有交换子均在中心内且其平方恒为零。这就推广了Martindale (1960, [47]), Smiley (1959, [22]), Herstein (1957, [21]) 等的有关定理。

设环R有一个对合且对所有对称元素x有等式$x^{n(x)}=x(n(x)>1)$. Montgomery (1971, [48]) 证明了：(1) 如果R是本原的且示性数非2，则R或为一域Φ并具有限示性数或为Φ_2; (2) 如果R是示性数非2的域上的一个代数，则其Jacobson根J的幂零指数为3且R/J为诸域及诸域上2阶矩阵环的一个亚直接和。又于 (1973, [49]) 证明了：如果R的示性数为2，则R为$GF(2)$上诸代数扩张的一个亚直接和。由此知 (1) 中没有示性数的假设时亦真，并证明了 (2) 中去掉R为域上代数的假设亦可。

Gupta (1972, [50]) 得到有1的非结合环恒满足 $(xy)^2=(yx)^2$且无加法周期为2的元素时必为交换的。

Awtar (1973, [51]) 证明了恒满足 $xy^2x-yx^2y\in C$ (中心) 的半质环必为交换的。Quadri (1978, [81]) 证明了：恒满足$xy^2x+yx^2y\in C$的半质环必交换的。Gupta (1980, [82]) 证明了：恒满足 $(xy)^2-x^2y^2\in C$的半质环必为交换的。

Ligh (1973, [52]) 研究有左单元且其所有诣零元素作成一个理想N的环R，证明了如果R/N有限且由$x\equiv y \pmod N$可导出$x^2=y^2$或x,y与N之每元可换，则R为交换的，这就推广了 [42] 中的定理。

Bell (1973, [53]) 证明了满足某多项恒等式的环的换位子理想为诣零的且其所有诣零元素作成一个理想，由此又证明了：如果由其元之n次幂 ($n>1$) 生成的环R恒满足$x^ny-yx^n=xy^n-y^nx$或 $(x+y)^n=x^n+y^n$，则R为交换的。然后令j,m,n为任意正整数但m,n至少有一个是大于1的，而得满足$xy-yx=(x^ny^m-y^mx^n)^j$的环必为交换的。这就推广了Herstein的一个定理。

Burgess与Chacron (1973, [54]) 证明了：(1) 如果体R有一个对合而对每个对称元x就有一个有理整系数多项式$P(t)$使$x-x^2P(x)$恒在R的中心内，则R或为交换的或

在其中心上为 4 维的。(2) 如果环 R 有对合使对称元 x 恒有 $P(t)$ 致 $x-x^2P(x)$ 在中心内，则对称元均在中心内，从而 R 为其中心上的次数 $\leqslant 2$ 的一个整扩张。后来，Chacron(1978,［110］) 又给出有对合的质环的一些成果。

Tan (1973,［55］) 把 Jacobson 的 $a^{n(a)}$ 定理推广为：如果对环 R 的每个元 a 恒有 $f(x)=a_2x^2+\cdots a_nx^n\neq 0$ (a_i 为非负整数，$2\leqslant n$) 使 $f(a)=a$，则 R 为交换的。

为了推广 Jacobson 定理，Luh (1973,［57］) 考虑定义在乘半群上的一组乘法恒等式 P 使得每个 2 阶矩阵环不能满足 P 而满足 P 的群必交换，而证明了：(1) 如果环 R 满足 P，则 R 的换位子理想为诣零的且 R 的所有诣零元素作成一个理想。(2) 如果准质环 R 满足 P，则 R 为交换的。

对一个环 R 考虑它是否具有下面的性质：(*) 对任意 $x, y\in R$ 有自然数 $m(x,y)$，$n(x,y)$ 使 $x^{m(x,y)}$ 与 $y^{n(x,y)}$ 可交换。Anan'in 与 Zjabko (1974,［58］) 用一个很巧妙的办法证明了：如果 R 具有性质 (*) 且无诣零理想则 R 为交换的。进一步，如果 R 是具有性质 (*) 的任意环，则 R 中所有诣零元素作成 R 的一个理想 I 且 R/I 为交换的。在这以前的最好结果是 Lihtman (1970,［59］) 关于 (*) 的特殊情况的两个同样的定理。

Rich (1975,［60］) 证明了：如果对 F 上非结合代数 A 的 x,y 恒有 $a(x,y)\in F$ 使 $xy=a(x,y)yx$，则 A 或为交换的，或为反交换的。

环 R 中所有这样的元素 a：对每个 $x\in R$ 就有 $n=n(a,x)\geqslant 1$ 使 $ax^n=x^na$，作成的集合 T 叫做 R 的超中心。Herstein (1975,［61］) 证明了：在不含非平凡诣零理想的环中，超中心与中心重合。这就推广了其早期 (1955,［15］) 的定理及 Lihtman (1970,［59］) 的一个结果。

设 R 为有 1 的非结合环。如有自然数 n 使由 $nx=0$ 可得 $x=0$ ($x\in R$)，则说 R 是 n-扭自由的。又记 $x_1\cdots x_n=(x_1\cdots x_{n-1})x_n$。Awtar (1975,［62］) 证明了：(1) 如有 $n\geqslant 1$ 恒使 $(xy)^n=(yx)^n$ 且 R 为 p-扭自由的 (对每个质数 $p\leqslant n$)，则 R 为交换的。(2) 如有 $n>1$ 恒使 $(xy)^n=x^ny^n$ 且 R 为 p-扭自由的 (对每个质数 $p\leqslant n$)，则 R 为交换的；又若 n 为偶数，则只取 $p<n$ 即可。(3) 如有 $n\geqslant 1$ 恒使 $(xy)^n=y^nx^n$ 且 R 为 p-扭自由的 (对每质数 $p\leqslant n+1$)，则 R 为交换的；又若 n 为奇数，则只取 $p\leqslant n$ 即可。(4) 如有 $n\geqslant 1$ 恒使 $x^ny^n=y^nx^n$ 且 R 为 p-扭自由的 (对每质数 $p\leqslant n$)，则 R 为交换的。(此亦可参看［115］)。

Herstein (1976,［63］) 证实了这个长期停滞的猜想：如对环 R 的 a,b 恒有相应的 m,n 使 $a^mb^n=b^na^m$，则当 R 为 Köthe 半单纯环时，R 为交换的。这正是 Faith (1951) 的著名猜想。

设环 R 有对合 *，$K=\{x\in R|x^*=-x\}$ 为其钭元素之集合，$K_0=\{x-x^*|x\in R\}$，Z 为 R 的中心。Herstein 与 Lee (1976,［64］) 证明了：如果 $zR=R$ 且对每个 $a\in K_0$ 就有相应的整系数多项式 $P(y)$ 使 $a-a^2P(a)\in Z$，则钭元素可交换。

Bell (1976,［68］) 证明了恒满足 $xy=y^mx^n$ 的环为交换的，其中 m,n 均依于 x,y。

所有形如 $x-x^2P(x)$ 的多项式的集合记为 P，其中 $P(x)$ 为整系数多项式。Chacron (1976,［69］) 定义环 R 的余超中心为 $T(R)=\{a\in R|$ 对每个 $y\in R$ 有 $g(x)\in P$ 使 $[a,g(y)]=0\}$。并得到：(1) 如果 R 是半质的，则 $T(R)$ 即中心 $Z(R)$；(2) 如对 $a,b\in R$ 就有 $g(x)$，

$h(x)\in P$ 使 $[g(a),\ h(b)]=0$，则R的换位子理想为诣零的且诣零元素作成一个交换理想。其中（1）类似于 Herstein（1975，[61]）的一个定理。后来，Hirano 等（1978，[89]）给出 Chacron 结果一个新证明。此外，他们还证明了某些没有单位元环的交换性条件的等价性。

环R叫做周期的，如果对每 $x\in R$ 有 $m\neq n$ 使 $x^m=x^n$。Bell（1976，[71]）证明了：(1) 如果周期交错环R的诣零元可互交换，则R的换位子理想 $C(R)$ 为诣零的且所有诣零元素作成一个理想 N；若进一步设R的零因子可互交换，则R为交换的或R有 1 且 R/N 为域。(2) 如果周期环R为 2-扭自由的且有 n 使R的诣零元素恒满足 $[a_1,\cdots,a_n]=0$，则 $C(R)$ 为诣零的且所有诣零元素作成理想 N。

设环R有左单元而N为其诣零元素的集合。Ligh 等（1976，[73]）把 Outcalt 等（1970，[42]）的结果推广为：如果在R中恒有（i）$x^{n(x)}-x\in N$，（ii）$x\equiv y(\mathrm{mod}\,N)$ 就导致$x^2=y^2$ 或 x,y 均与N中元可换，（iii）对$a\in N$，$x\in R$ 有 $ax\in N$，则R为交换的。又定义了所谓 D-近似环而证明了一个 D-近似环R为交换的必要而且只要对 $x,y\in R$ 恒有 $n=n(x,y)>1$ 使 $(xy-yx)^n=xy-yx$。

设A为一个 Hausdorff 拓扑环，Z为其中心。如果在A中，$\mathrm{cl}\{x^n:n\geqslant 2\}$ 恒交 $x+Z$，则说A是一个 H-环。Blair（1977，[75]）证明了局部紧致 H-环为交换的。

Harmanci（1977，[76]）证明了：如果环R有 1 且满足 $(xy)^k=x^ky^k$ 对$k=n,n+1$且其示性数不能整除 $n(n!)^2$，则R可交换。又如R恒满足 $[x^k,y]=[x,y^k]$ 对两个连续数 k，则R为交换的。

设R为一个分配地生成的近似环且其诣零元均在中心内。Bell（1977，[78]）证明了R的所有诣零元作成一个理想N且若 R/N 为周期的则 R 为交换的。这就肯定地回答了 Ligh（1973，[77]）所提的一个问题。

E. J. Tully 曾证明：如果有固定的 $m,n\geqslant 1$ 使半群S恒满足 $xy=y^nx^m$，则 S 为交换的（未发表）。Tamura（1969，[65]）推广此为：如果S恒满足 $xy=f(x,y)$ 则为交换的，其中 $f(x,y)$ 为一固定的含 x,y 的字而以 y 开始以 x 告终。Putcha 与 Weissglass（1972，[66]）考虑不固定 $f(x,y)$ 但 x 至少出现两次，甚至推广到两个以上的变量。Kowol（1976，[67]）证明只要S恒满足 $xy=y^{n(x,y)}x^{m(x,y)}$ 就为交换的，其中 $n(x,y)$ 或 $m(x,y)$ 为常数而另一则独立于 x 或 y。

Chung 等（1979，[79]及[83]）推广了Ligh 与 Putcha 等的有关结果而证明了：如果环R有一个微分算子的准质类而满足给定的某些条件，则R为交换的。

设A是示性数 $p\neq 2$ 的域上的结合代数，Φ是有有限周期 n 的A的自同构，其定点集 F 含于A的中心且 $(p,n)=1$。Stitzinger（1977，[84]）证明了：若 $p\neq 0$，则A的每个半单纯子代数是交换的。

Luh 等（1977，[85]）证明：若A是一个主理想整区R上的代数（A不一定是结合的），且对于任意 $a,b\in A$ 都有 $\alpha,\beta\in R$ 使 $(\alpha,\beta)=1$ 且 $\alpha ab=\beta ba$，则A是交换的。

Bell（1977，[86]）给出一些条件，使当环R中每对 x,y 均有依于 x,y 的一个字 $W(XY)$ 使 $xy=W(x,y)$ 时R为交换的或有诣零换位子理想。此推广了 Putcha 等（1972，

[112] [113]）的某些结果。Bell 还证明了：如对环 R 之任意元 x,y 均有 s 属于由 x,y 生成子环的中心使 $xy=yxs$，则 R 是交换的。

设 R 为一环。若对每 $a\in R$ 都有某 $e\in R$ 使 $ea=a$ [或对应地 $ae=a$]，则称 R 为左 [或右] s- 单式的。Mogami 等（1978—79，[87]）证明了：如 R 是 s- 单式（或半本原）环且对每对 $a,b\in R$ 均有整数 $n\geqslant 1$ 使当 $k=n$，$n+1$，$n+2$ 时有 $(ab)^k=a^kb^k$，则 R 是交换的。他们（1978，[88]）还在 s- 单式环上导出了与 Kaya（[72]）相似的结果。

Kaya 等（1975，[90]）证明了：若 R 有单位元且其全部零因子均含于某一真单边理想中，则当对每对 $x,y\in R$ 都有三连续自然数 k 使 $(xy)^k=x^ky^k$ 时，R 为交换的。

设 R 为一环（不一定结合、交换），$f_0,f_1,\cdots,f_k\in \mathrm{End}_z\ R$，$x$ 是一未定元，定义 $xa=\sum_{i=0}^{k} f_i(a)x^i$，$a\in R$。则 $P=R[x;f_0,f_1,\cdots,f_k]$ 叫 R 的 $(f_0,f_1,\cdots,f_k)$-扩张。Rauf（1978，[93]）证明了：如 R 交换，则 P 交换的充分必要条件是 $f_1=1$，$f_2=\cdots=f_k=f_0=0$。

Hirano（1979，[94]）证明了：若 N 是左 s- 单式环 R 的诣零元集且 $(a)\,x-y\in N$，$y-z\in N$ 导出 $x^2=z^2$ 或 $xy=yx$，(b) 对每 $x\in R$ 有 $x'\in x$ 生成子环使 $x-x^2x'\in N$，则 R 是交换的。

设 R 是有 1 环，n 是一正整数，$k=1,2,3$。说 R 是 (n,k)-环，如它满足 $(xy)^m=x^my^m$，其中 $n\leqslant m\leqslant n+k-1$。$(n,3)$ -环是交换的，$(n,2)$ -环不一定。当 $n>1$ 时，$(n,1)$ -环的换位子理想是诣零的。Bell(1978，[95]）证明了：加法子群 R^+n- 扭自由时，$(n,2)$ -环 R 是交换的。

设 A 为一环，σ 是 A 的一个自同构。如对每 $y\in A$ 都有整数 $n(y)$ 使 $xy=yx^{\sigma^{n(y)}}$，$(x\in A)$ 成立，则说 A 是 σ-交换的，Kishimoto 等（1978，[96]）证明了：若 A 是有质根 N 的 σ-交换环，则 A/N 是满足多项恒等式 $[[x_1,x_2],x_3]=0$ 或 $[x_1{}^k,x_2{}^k]=0$ 的交换约化环，此推广了 Endo（1960，[97]）和 Evans（1972，[98]）的结果。

设 N 是环 R 的全部诣零元集，M 是一固定正整数，D 是 R 的左零因子集。定义 (P_1) 对每 $x,y\in R$ 均有正整数 $n<M$ 使 $[(xy)^k-x^ky^k,x]=[(xy)^k-x^ky^k,y]=0$，其中 $k=n$，$n+1,n+2$；(P_2) 对每 $x,y\in R$ 均有正整数 $n<M$ 使 $[(xy)^k-y^kx^k,x]=[(xy)^k-y^kx^k,y]=0$，其中 $k=n,n+1,n+2$；(P_3) $x-y\in D$，$y-z\in D$ 导出 $xy=yx$ 或 $x^2=z^2$，$N\neq 0$。Kaya (1977，[100]）证明了：当环 R [s-单式环 R] 满足 (P_1) 或 (P_2) [(P_3)] 时其换位子理想含于 R 的质根 $P(R)$ 且 $P(R)=N$。

Nicholson 等（1979，[101]）证明了：若 $(j,k)=1$ 且群或有 1 环中元恒满足 $x^jy^j=y^jx^j$，$x^ky^k=y^kx^k$，则为交换的。他们（1980，[102]）还证明了：若 $(j,k)=1$ 且有1环满足 $(xy)^j=(yx)^j$，$(xy)^k=(yx)^k$，其中 j,k 均依于 x,y，则该环是交换的。对于每个 $k\geqslant 2$，他们给出了有 1 满足 $(xy)^k=(yx)^k$ 的非交换环的例子。

设环 R 有左单元，N 是其诣零元集。Outcalt 等（1978，[103]）证明了，若 (P) 对每 $x\in R$ 恒有 $n\geqslant 1$ 及 $f(x)$ 使 $x^n=x^{n+1}f(x)$，(M) $x-y\in N$ 导出 $x^2=y^2$ 或 x,y 同 N 之元均交换，则 R 是交换的。他们（1979，[124]）还证明了：若 i）N 为交换的，ii）对每 $x\in R$ 均有 $n(x)$ 使 $x^n=x^{n+1}f(x)$，iii）$x-y\in N$ 导出 $x^q=y^q$（q 为一固定质数），则 R 是局部交换环与诣零交换环的亚直接和。

设 $A^+\subset R^+$, Hirano 等(1979,[104])证明了，如 1) $[A,A]=0$, 2) 对任意 $a\in R$ 有 $f(x)\in Z[x]$ 使 $a-a^2f(a)\in A$, 3) $x-y\in A$ 导出 $[x,y]=0$ 或 $[x,y,y]=0$ 和 $x^p=y^p$ (p为一质数), 4) 对任意 $x\in R$ 有 $n(x)$, $m(x)\in Z^+$, 使 $(x-x^{n+1})^m=0$ 或 $[x,A]=0$, 则 R 是交换的。

设 $x\in$ 环 R, 定义 (P_1) 对每 $y\in R$ 有 $m,m',n\geqslant 1$ 使 $(m,m')=1$ 且 $(xy)^\alpha=y^\alpha x^\alpha$, $(yx)^\beta=y^\beta x^\beta$, $\alpha=m,m+1,m',m'+1$, $\beta=n,n+1$; (Q_1) 对每 $y\in R$ 有 $m,m'\geqslant 1$ 使 $(m+1,m'+1)=1$ 且 $(xy)^\alpha=y^\alpha x^\alpha$, $\alpha=m,m+1,m',m'+1$; (Q'_1) 对每 $y\in R$ 有 $m,m'\geqslant 1$ 使 $(m+1,m'+1)=1$ 且 $(yx)^\alpha=x^\alpha y^\alpha$, $\alpha=m,m+1,m',m'+1$. Mogami (1980,[106])证明了：当 R 是 s-单式环且每 $x\in R$ 均满足上述三条之一时，R 是交换的。

设 R 是 s-单式环。Hongan 等(1979,[107])证明了下述条件等价：1) R 是交换的；2) R 满足恒等式 $[x^n,y^n]=[x^{n+1},y^{n+1}]=0$, 其中 $n\geqslant 1$; 3) R 满足恒等式 $[x^k,y^k]=[x^l,y^l]=0$, $(k,l)=1$; 4) 对任意 $x,y\in R$ 有 k,l 使 $(k,l)=1$ 且 $(xy)^k=(yx)^k$, $(xy)^l=(yx)^l$.

Hirano 等(1980,[108])证明了：若 R 是 s-单式环且有 $(n,k)=1$ 使 R 的诣零元集 N 是 n-扭自由的，则 R 再满足下述条件之一时是交换的：(a) $[x^n,y^n]=0$ 和 $[x^k,[x^k,y^k]]=0$, (b) $[x^n,y^n]=0$ 和 $[x^k,(xy)^k-(yx)^k]=0$, (c) $(xy)^n-x^ny^n=0$ 和 $(xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1}=0$, (d) $(xy)^n-(yx)^n=0$. [108] 还给出周期环的某些交换性成果。

Richoux (1980,[109])证明了：若 D 是一体且对每一 $x\in D$ 都有首 1 多项式 $f_x(t)$ 使 $f_x(x)$ 为中心元，则 D 为域。

设 A 为一环，$a\to a'$ 是 A 之一求导。Trzepizul (1979,[114])证明了：如 (1) A 无使 $I'\subset I$ 的非零诣零理想, (2) 对每 $a\in A$ 有 $aa'=a'a$, (3) 若 $a'=0$ 则 a 是中心的，则 A 为交换的。他还证明了：如果 (1°) A 的示性数为 0, (2°) 如 (2), (3°) 对每 $a\in A$ 均有 $k\geqslant 1$ 使 $a^{(k)}-a$ 为中心的，则 A 为交换的。

对 $n=1,2\cdots$, 定义 i) $K_n(x_1,\cdots,x_{2n+1})=S_3(K_{n-1}(x_1,\cdots,x_{2n-1}),x_{2n},x_{2n+1})$, $K_1=S_3(x_1,x_2,x_3)=\sum_{\sigma\in S_3}(\operatorname{sgn}\sigma)x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$; ii) 设 R 为一环，则 $H_3^{(n)}(R)=\{x\in R\mid K_n(x,x_2,\cdots,x_{2n+1})=0$ 对一切 $x_2,\cdots,x_{2n+1}\in R$ 均成立$\}$ 且 $H_3(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_3^{(n)}(R)$ 为 R 的广义3-中心。Bell (1979,[116])证明了：i) 若对任意 $a,b\in R$ 都有 $n=n(a,b)$, $m=m(a,b)\in Z^+$ 使 $ab-b^ma^n\in H_3(R)$, 则 $[R,R]$ 诣零；ii) 若对任意 $a,b\in R$ 都有 $n=n(a,b)$, $m=m(a,b)\in Z^+$ 使 $[a^n,b^m]\in H_3(R)$, 则 $[R,R]$ 诣零；iii) 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为一固定的带非交换未定元的多项式，其系数为整数且其最高公因子为 1, $f(x)$ 对 $M_2(GF(p))$ 不是恒等式；如对每 $a_1,\cdots,a_n\in R$ 都有 $f(a_1,\cdots,a_n)\in H_3(R)$, 则 $[R,R]$ 是诣零理想。

设 $n>1$ 是一固定整数，R 为一分配生成近似环。定义 $Z(R)=\{x\in R\mid$ 对一切 $y\in R$ 有 $xy=yx\}$, $Z_0(R)=\{x\in Z(R)\mid\{x\}\cup xR\subseteq\zeta(R)\}$, 其中 $\zeta(R)$ 是 R 的加群中心。Bell (1980,[117])证明了：若对任意 $x\in R$ 都有 $x-x^n\in Z_0(R)$, 则 R 是交换环。此推广了 [45] 和 [78] 的成果。

Ikehata 等(1979,[118])证明了：若 R 满足 $[x,[x,y]]=0$ 且 R 之全部诣零元互相可换，则下述各条件等价且导出 R 是交换的：1) 对每 $x\in R$ 有 $n\geqslant 1$ 使 $x-x^{n+1}$ 是诣零元；2) 对每 $x\in R$ 有 $m,n\geqslant 1$ 使 x^m-x^{m+n} 是诣零元；3) 对每 $x\in R$ 有 $n\geqslant 1$ 及 $x'\in[x]$ (x 生成的子环) 使 $x^n=x^{n+1}x'$; 4) 对每 $x\in R$ 有 $x'\in[x]$ 使 $x-x^2x'$ 是诣零元。

Abu-Khuzam 等（1980，[119]）证明了：若环 R 有左单元且有 $n\geqslant 1$ 使 (i) N 是 n-扭自由的，其中 N 是 R 之诣零元集；(ii) 对每 $x\in$R 有 $x'\in[x]$ 和 $m=m(x)$ 使 $x^m=x^{m+1}x'$；(iii) $a^2=0$ 导出 a 为中心元；(iv) $x-y\in N$ 导出 $x^n=y^n$ 或 x, y 与 N 之元可换，则 R 是局部交换环的亚直和。他们（1980，[120]）还证明了：若对每 $x,y\in$R 都有 $n=n(x,y)\geqslant 1$ 使 $(xy)^n-(yx)^n$ 为中心元，则当 R 为半单纯环时是交换的。

谢邦杰（1982，[132]）推广了 Wedderburn 定理而得到一个周期环为域的两个充要条件。

牛凤文（1978，[133]）证明了：设 R 为 Baer 半单纯环且有整数 $m\geqslant 2$ 对任意 $a_1,\cdots,a_m\in$R都有 $a_1\cdots a_m=a_m\cdots a_1$，则 R 为交换的。郭元春将其推广为：只要 $a_1\cdots a_m-a_m\cdots a_1$ 均为中心元即可。

牛凤文（1980，[80]）证明了关于结合环的两个定理。定理 1：设 R 为一环，若对任意 $x,y\in R$ 都有大于 1 的整数 $n=n(x,y)$，$s=s(x,y)$，$t=t(x,y)$ 使 $(xy)^n=xy^s=x^ty$，则当 R 不含非零诣零理想时是交换的。定理 2：设 N 为环 R 的 Köthe 根。若对任意 $x,y\in R$ 都有一个大于 1 的整数 $m=m(x,y)$ 使 $(xy)^m=xy$，则 R/N 为交换环且 RN=NR=0。定理 1 和定理 2 概括了 Jacobson 定理，从而也得到了它的两个较简洁证明。郭元春（1982，[136]）利用定理 2 证明了，不管定理 2 中之 N 是否为零，R 总是交换的。

牛凤文（1982，[134]）用一个新的简单方法证明了 Herstein（1957，[21]）的定理。

董乃昌和傅昶林（1981，[135]）考虑由 x, y 两个文字各重复一次而以任意的一种顺序及结合方式所作成的乘积 $f_i(x,x,y,y)$，$(i=1,2)$，称 $f_1(x,x,y,y)$ 中两个 y 在 x 前的次数和与 $f_2(x,x,y,y)$ 中两个 y 在 x 前的次数和之差的绝对值为逆序差，记之以 p。他们证明了：设 R 为有 1 之非结合环，逆序差 $p\neq 0$，R 满足恒等式 $f_1(x,x,y,y),=f_2(x,x,y,y)$ 则当 R 为 p-扭自由时，是交换的。有此，则 Johnsen（1968，[34]）及 Gupta（1972，[50]，的定理均为其特例。

设 R 是半质环，C 是 R 的中心，k,m,n,l 均自然数。郭元春证明了：R 满足下述条件之一时是交换的：

1. 有 l 使对意 $x,y\in$R 恒有小于 l 的 $m=m(x,y),n=n(x,y)$ $x^my^n=y^nx^m$。
2. 有 l 使对任意 $x,y\in$R 恒有 $m=m(x,y)<l$ 及 $n=n(x,y)$ 使 $(xy)^m=(yx)^n$。
3. 有 k 使对任意 $x,y\in$R 恒有 $(xy)^k=(yx)^k$ 或 $(xy)^k+(yx)^k=0$。
4. 有 $k>1$ 使对任意 $x,y\in$R 恒有 $(xy)^k=x^ky^k$。
5. 有 k 使对任意 $x,y\in$R 恒有 $(xy)^k=y^kx^k$。
6. 对任意 $x,y\in$R 恒有 $(xy)^2-xy^2x\in C$
7. 对任意 $x,y\in$R恒有 $(xy)^2-(yx)^2\in C$。
8. 对任意 $x,y\in$R恒有 $(xy)^2+(yx)^2\in C$。
9. 对任意 $x,y\in$R恒有 $(xy)^2-y^2x^2\in C$。
10. 对任意 $x,y\in$R 恒有 $(xy)^2+y^2x^2\in C$。
11. 对任意 $x,y\in$R 恒有 $(xy)^2+x^2y^2\in C$。

12. 对任意 $x,y\in R$ 恒有 $x^2y^2-y^2x^2\in C$ 且 R 是 2-扭自由的.

13. 对任意 $x,y\in R$ 恒有 $x^2y^2+y^2x^2\in C$ 且 R 是 4-扭自由的.

14. 有 l 对任意 $x,y\in R$ 恒有大于 1 的 $k=n(x,y)$, $n(x,y)+1\leqslant l$ 使 $(xy)^k=x^ky^k$.

15. 有 n 使对任意 $x,y\in R$ 恒有 $[x^ny]-[x,y^n]\in C$ 及 $[x^{n+1},y]-[x,y^{n+1}]\in C$.

16. $n>1,m>1$ 使对任意 $x,y\in R$ 有 $[x^ny]-[x,y^n]\in C$ 且 R 为 (m^n-m)-扭自由的.

参 考 文 献

[1] Jacobson, N., *Ann. Math.* (2), 46 (1945), 695—707.

[2] Forsythe, G. E., McCoy, N. H., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 523—526.

[3] Ayoub, R., Ayoub, C., *Amer. Math. Monthly*, 71 (1964), 267—271.

[4] Luh, J., *Canad. J. Math.*, 19 (1967), 1289—1292.

[5] Herstein, I. N., *Duke*, 21 (1954), 45—48.

[6] Wansley, J. W., *J. London Math. Soc.* (2), 4 (1971), 331—332.

[7] Rogers, K., *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 35 (1971), 223—229; 更正于 37,268.

[8] Huzurbazar, M. S., Sivaramakrishnan, K., *Aligarch Bull. Math.*, 1 (1971), 9—12.

[9] Kaplansky, I., *Canad. J. Math.*, 3 (1951), 290—292.

[10] Herstein, I. N., *ibid.*, 5 (1953), 238—241.

[11] —— *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 756—762.

[12] ——, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58 (1952), 474.

[13] ——, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 105—111.

[14] ——, *ibid.*, 75 (1953), 864—871.

[15] ——, *Canad. J. Math.*, 7 (1955), 411—412.

[16] ——, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 370—371.

[17] ——, *ibid.*, 5 (1954), 620.

[18] Ikeda, M., *Osaka Math. J.*, 4 (1952) 235—240.

[19] Nakayama, T., *Canad. J. Math.*, 5 (1953), 242—244.

[20] ——, *Abh. Math. Sem. Univ Hamburg*, 20 (1955), 20—27.

[21] Herstein, I. N., *Canad. J. Math.*, 9 (1957), 583—586.

[22] Smiley, M. F., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 466—470.

[23] Tominaga, H., *Math. J.,Okayama Univ.*, 9(1959—60), 9—12.

[24] Nakayama, T., *Nagoya Math. J.*, 14(1959), 39—44.

[25] Henriksen, M., *Math. Japan.*, 5(1958—59), 21—24.

[26] Faith, C., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11(1960), 43—53.

[27] ——, *ibid.*, 12 (1961), 274—283.

[28] Mckeǐ, A., *Bull. Akad. Štiince RSS Moldoven*, (1973), No. 1, 6—13, 90.

[29] Herstein, I. N., *Amer. Math. Monthly*, 68(1961), 249—251.

[30] ——, *Istanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Ser.*, (1961), A 26, 45—59.

[31] ——, *Mich. Math. J.*, 8(1961), 29—32.

[32] Belluce, L. P., Herstein, I. N., Jain, S. K., *Nagoya Math. J.*, 27(1966), 1—5.

[33] Armendariz, E. P., *J. Austral. Math. Soc.*, 7(1967), 552—554.

[34] Johnsen, E. C., Outcalt, D. L., Yaqub, A., *Amer. Math. Monthly*, 75(1968), 288—289.

[35] Boers, A. H., *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sec.* A72 = *Indag. Math.*, 31(1969), 121—122.

[36] Bell, H. E., *Canad. Math. Bull.*, 11(1968), 375—380.

[37] Johnsen, E. C., Outcalt, D. L., Yaqub, A., *Pacific J. Math.*, 27(1968), 325—332.

[38] ——, *Math. Japan.*, 11(1966), 167—176.

[39] ——, *J. Algebra*, 14(1970), 106—111.

[40] Morgado, J., *Gaz. Mat.* (Lisboa), 29(1968), no. 109—112, 1—2.

[41] Jain, S. K., Menon, P. K., *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*), 33(1969), 1—5.

[42] Outcalt, D. L., Yaqub, A., *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2(1970), 95—99.

[43] Lucke, J. B., *Pacific J. Math.*, 32(1970), 187—196.

[44] Luh, J., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 22(1971), 211—213.

[45] Bell, H. E., *J. London Math. Soc.*, (2), 4(1971), 264—270.

[46] Lihtman, A. I., *Vladimir. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap.*, 38(1971), 151—160.

[47] Martindale, W. S., Ⅲ, *Canad. J. Math.*, 12(1960), 263—268.

[48] Montgomery, S., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971), 366—370.

[49] ——, *pacific J. Math.*, 44 (1973), 233—240.

[50] Gupta, R. N., *Math. Student*, 39 (1972), 184—186.

[51] Awtar, R., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 41 (1973), 370—372.

[52] Ligh, S., *Bell. Austral. Math. Soc.*, 8 (1973), 181—185.

[53] Bell, H. E., *Arch. Math.* (*Basel*), 24 (1973), 34—38.

[54] Burgess, W. D., Chacron, M., *J. Algebra*, 27 (1973), 31—47.

[55] Tan, k. T., *Tamkang J. Math.*, 4 (1973), 53—55.

[56] Nagahara, T., Tominaga, H., *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 41 (1974), 72—74.

[57] Luh, J. *Math. Japan.*, 18 (1973), 211—213.

[58] Anan'in, A. Z., Zjabko, E. M., *Algebra i Logika*, 13 (1974), 125—131, 234.

[59] Lihtman, A. I., *Mat. Sb.* (*N. S.*), 83 (125) (1970), 513—523.

[60] Rich, M., *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975), 377—379.

[61] Herstein, I. N., *J. Algebra*, 36 (1975), no. 1, 151—157.

[62] Awtar, R., *Publ. Math. Debrecen*, 22 (1975), no. 3—4, 177—188.

[63] Herstein, I. N., *J. Algebra*, 38 (1976), no. 1, 112—118.

[64] Herstein, I. N., Lee, P. H., *Rocky Mountain J. Math.*, 6 (1976), no. 2, 293—298.

[65] Tamura, T., *Pacific J. Math.*, 31 (1969), 513—521.

[66] Putcha, M. S., Weissglass, J., *Trans.Amer. Math. Soc.*, 168 (1972). 113—119.

[67] Kowol, G., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 56 (1976), 85—88.

[68] Bell, H. E., *Canad. J. Math.*, 28 (1976), no. 5, 986—991.

[69] Chacron, M., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 59 (1976), no. 2, 211—216.

[70] Dolan, S. W., *Canad. Math. Bull.*, 19 (1976), no. 1, 59—61.

[71] Bell H. E., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 28 (1976) no. 3—4. 279—283.

[72] Kaya, A., *ibid.*, 28 (1976), no. 1—2, 33—36.

[73] Ligh, S., Luh, J., *ibid.*, 28 (1976), no 1—2, 19—23.

[74] Ligh, S., Richoux, A., *Bull. Austral. Math. Soc.*, 16 (1977), no. 1, 75—77.

[75] Blair, R. L., Ring theory, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 25 (1977), 231—242. Dekker, New York.

[76] Harmanci A., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 29 (1977), no 1—2, 23—29.

[77] Ligh, S., Kyungpook *Math. J.*, 13 (1973), 165—170.

[78] Bell H. E., *Canad. Math. Bull.*, 20 (1977), no. 1, 25—28.

[79] Chung, L. O., Luh. J., Richoux, A. N., *Pacific J. Math.*, 80 (1979), no 1, 77—89.

[80] 牛凤文，吉林大学自然科学学报，2 (1980), 1—6.

[81] Quadri, M. A., *Math. Japan.*, 22 (1978), no. 5, 509—511.

[82] Gupta, V., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 36 (1980), no. 3—4, 233—236.

[83] Chung, L. O., Luh, J., Richoux, A. N., *Pacific J. Math.*, 85 (1979), no. 1, 19—34.

[84] Stitzinger, E. L., *Canad. Math. Bull.*, 20 (1977), no. 4, 485—487.

[85] Luh, J., Putcha, M. S., *Pacific J. Math.*, 68 (1977), no. 2, 485—488.

[86] Bell, H. E., *ibid.*, 70(1977), no. 1, 29—36.

[87] Mogami, I., Hongan, M., *Math. J. Okayama Univ.*, 20(1978—79), no. 1, 21—24.

[88] Hongan, M., Mogami, I., *Math. Japan.*, 23(1978), no. 1, 131—132.

[89] Hirano, Y., Tominaga, H., *Math. J. Okayama Univ.*, 20(1978), no. 1, 67—72.

[90] Kaya, A., Koç, C., *İstanbul. Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser.* A 40(1975), 1—3.

[91] Morita, Y., *Mem. Defense Acad.*, 18(1978), no. 1, 1—24.

[92] Felzenszwalb, B., Proceedings of the Eleventh Brazilian Mathematical Colloquium (Poços de Cadas, 1977) (Portuguese), Vol. Ⅱ, (1978), PP. 773—774. Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro.

[93] Rauf Qureshi, M. A., Karachi Math. Assoc. Riazi (Souvenir) (1978), 42—43.

[94] Hirano, Y., *Hokkaido Math. J.*, 8(1979), no. 1, 92—94.

[95] Bell, H. E., *Canad. Math. Bull.*, 21(1978), no. 4, 399—404.

[96] Kishimoto, K., Mogami, I., *Math. J. Okayama Univ.*, 20(1978), no. 2, 179—181.

[97] Endo, S., *Nagoya Math. J.*, 17(1960), 167—170.

[98] Evans, M. W., *Pacific J. Math.*, 41(1972), 687—697.

[99] Richoux, A., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 34(1979), no. 1—2, 23—25.

[100] Kaya, A., *J. Pure Appl. Sci. Ankara*, 10(1977), 261—265.

[101] Nicholson, W. K., Yaqub, A., *Canad. Math. Bull.*, 22(1979), no. 4, 419—423.

[102] ——, *Algebra Universalis*, 10(1980), no. 2, 260—263.

[103] Outcalt, D., Yaqub, A., *Math. Japan.*, 23(1978), 213—226.

[104] Hirano, Y., Ikehata, S., Tominaga, H., *Math. J., Okayama Univ.*, 21(1979), 21—24.

[105] Felzenszwalb, B., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 34(1979), 257—260.

[106] Mogami, I., *Math. J. Okayama Univ.*, 22(1980), 51—54.

[107] Hongan, M., Tominaga, H., *ibid*, 21 (1979), 11—14.

[108] Hirano, Y., Hongan, M, Tominaga, H., *ibid.*, 22 (1980), 65—72.

[109] Richoux, A., *Canad. Math. Bull.*, 23 (1980), 241—243.

[110] Chacron, H., *Canad. J. Math.*, 30 (1978), no. 6, 1121—1143.

[111] Outcalt, D. L., Yaqub, A., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18 (1967), 175—177.

[112] Putcha, M. S., Yaqub, A., *ibid.*, 32 (1972), 52—56.

[113] ——, *J. Math. Soc. Japan.*, 24 (1972), 123—127.

[114] Trzepizul, A., *Zeszyty Nauk. Uniw. Jagiello'n. Prace Mat.* 21 (1979), 115—121.

[115] Kamil, M., Arya, P. P., *Rend. Mat.* (6), 12 (1979), no. 1, 105—120.

[116] Bell, H. E., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 34 (1979), 341—346.

[117] ——, *Proc. Edinb. Math. Scc.* Ⅱ. *Ser.*, 23 (1980), 61—67.

[118] Ikehata, S., Tominaga, H., *Math. Japan.*, 24 (1979), 29—30.

[119] Abu-Khuzam, H., Yaqub, A., *ibid.*, 24 (1980), 549—551.

[120] ——, *Bull. Austral Math. Soc.*, 21 (1980), 43—46.

[121] Brandis, A., *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 26 (1963—64), 234—236.

[122] Ebey S., Sitaram, K., *Amer. Math. Monthly*, 76 (1969), 526—528.

[123] Corradi, K., Kárteszi, K., *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 103 (1975), 121—126.

[124] Outcalt, D. L., Yaqub, A., *Math. J. Okayama Univ.*, 21(1979), 15—19.

[125] Hinz, J. G., *J. Reine Angew. Math.*, 290(1977), 109—112.

[126] Johnsen, E. C., Outcalt, D. L., Yaqub, A., *Math. Japan.*, 11(1966), 167—176.

[127] Outcalt, D. L., Yaqub, A., *Bull. Austral. Math. Soc.*, 3(1970), 75—79.

[128] Carcanague, J. *Bull. Sci. Math.* (2), 95(1971), 379—381.

[129] Taylor, D. E., *Enseignement Math.* (2), 20(1974), 293—298.

[130] Herstein, I. N., *Canad. Math. Bull.* 18(1975), no. 4, 609.

[131] 谢邦杰，数学进展，2(1982)，81—88.

[132] ——，数学研究与评论，2(1982)，11—13.

[133] 牛凤文，吉林大学自然科学学报，1(1978)，146—149.

[134] ——，同上，1(1982)，8—10.

[135] 董乃昌，傅祖林，哈尔滨科技大学学报（数学专辑），2(1981)，30—35.

[136] 郭元春，吉林大学自然科学学报，1(1982)，11—16.

[137] ——，同上，3(1982)，13—18.