第3卷 第4期
1983年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.4
Oct. 1983

偏微分方程的某些研究动向*

陈庆益

（华中工学院　兰州大学）

偏微分方程，即令在纯粹数学范围内，内容也是比较庞杂的。为了使人对这种庞杂性有一个比较明确的印象，不妨就Math, Rev.中对数学（包括应用数学）各个分支划分子类的情况举几个例进行对比：

门类	编号	子类	门类	编号	子类
数论	10	$A—M$（即13个）	几何	51	$A—N$（14）
群论	20	$A—N$ （14）	一般拓扑	54	$A—H$（8）
单复变	30	$A—H$ （8）	概效与过程	60	$A—K$（11）
常微	34	$A—K$ （11）	统计	62	$A—P$（16）
偏微	35	$A—S$ （19）	数值分析	65	$A—T$（20）
泛函	46	$A—P$ （16）	计算机科学	68	$A—K$（11）
			流体力学	76	$A—Z$（26）

可注意，偏微分方程的子类数虽少于数值分析与流体力学等的子类数，但偏微分方程只不过是数学专业的一个方向，而数值分析与流体力学等则都是自成专业的，还不说流体力学等乃至物理学、化学、生物学、医学、技术科学甚而社会科学（例如经济学等）中，更有许多偏微分方程问题，也就是说，偏微分方程在应用数学范围内，内容就更加浩繁了。所以我不可能也没有能力全面地论述偏微分方程在各个小分支的近代研究情况，而只能对我较为熟悉及我个人认为重要的某些研究动向加以评述。这是我想特别说明的第一点。

我想说明的第二点，是偏微分方程作为纯粹数学的一个分支在整个数学科学中的地位问题。偏微分方程作为应用数学的重要地位是十分明显的。至于它在纯粹数学中的地位，则可由下面两件事看出。

第一件是Halmos等六人在Amer, Math, Monthly, 83：7(1976)，503—516一文中提到的美国（实际上不限于美国）四十年来数学方面的十大成就：

1. 关于连续统假设方面Cohen的工作；
2. 关于Diophantus方程（Hilbert第十问题）；
3. 关于单群方面Feit和Thompson的工作；
4. 关于代数几何中奇性的确定（Hironaka的工作）；
5. 关于A. Weil猜想（涉及有限域中代数方程根的个数）方面Deligne的工作；

*1981年12月8日收到。

6。关于 Lie 群(Hilbert 第五问题)方面 Montgomery 等人的工作；

7。关于 Poincare 猜想方面 Smale 等人的工作；

8。关于七维怪球方面 Milnor 的例；

9。关于无解的线性偏微分方程的 Lewy 的例及 Hörmander 的工作；

10。关于 Riemann 流形上椭圆型算子的指数定理(Atiyah 与 Singer 的工作)。

可注意，在这十大成就中有两个(最后两个)是关于偏微分方程的。五分之一，比重颇大！

第二件是 Fields 奖的获奖人名单：

1936年 Alfors, Douglas. 1950年 Schwartz, Selberg.

1954年 Kodaira, Serre. 1958年 Roth, Thom.

1962年 Hörmander, Milnor. 1966年 Atiyah, Cohen, Grothendieck, Smele;

1970年 Baker, Hironaka, Novikov, Thompson. 1974年 Bombieri, Mumford.

1978年 Deligne, Fefferman, Margolis, Quillen.

在这二十四人中，工作涉及偏微分方程的有：

Douglas: 因极小曲面问题即一种非线性椭圆型偏微分方程的第一边值问题研究而得奖；

Hörmander: 因线性偏微分方程一般理论研究而得奖；

Atiyah: 因 Riemann 流形上椭圆型偏微分算子的指数定理研究而得奖；

Bombieri: 因极小曲面、数论等方面研究得奖；

Fefferman: 因线性偏微分算子一般理论、拟微分算子及 Fourier 分析等方面研究而得奖。

折合成四人计算，因偏微分方程研究而获奖的人，所占比例也近于五分之一，比重也是很大的！

所以，尽管偏微分方程研究中并没有什么“完美的体系”和“漂亮的理论”，但国际数学界却给予相当大的注意。相反，人们可以从十大成就及获奖名单中自己看出，有些具备“完美体系”及“漂亮理论”的数学分支，并不能在这两方面得到反应。那么，原因在什么地方呢？

我认为，原因在于：数学作为基础科学之一，基本任务在于发现，而不在于构造什么“完美体系”和“漂亮理论”，特别当后二者成为空洞的框架的时候。大家还可从十大成就和获奖名单中看出，正是有一些重大发现推动了研究或开辟了方向的。

数学的基本任务在于发现，这正是下面评述的主题思想。

（一） 简短的历史回顾

在近代数学中，常微分方程是与微积分同时出现的，因为 Newton 正是用微积分作工具解决质点系力学问题的，而后者则归为常微分方程组的初值问题：

$$m_j \ddot{x}_j = f_j, \quad j = 1, \cdots, N$$

$$x_j(0) = a_j, \quad \dot{x}_j(0) = b_j$$

偏微分方程的历史则仅次于常微分方程。至少在1715年，Taylor 已讨论过弦振动方程：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

这以后是近两百年的求解时期，正像代数方程和常微分方程的早期历史一样。这当中只有Monge于十八纪末结合曲面论对一阶偏微分方程作了某些一般性的讨论和Cauchy在十九世纪三十年代对解析情形的初值问题作了一般性的研究，却根本没有什么一般性理论研究可言。到本世纪初Hadamard发现调和方程的初值问题的解对初值的微小摄动是不稳定的而提出定解问题的适定性概念后，才大大推进了偏微分方程的一般理论研究；其影响至今不衰。这是偏微分方程历史上的第一次重大发现。

偏微分方程历史上的第二次重大发现，我个人认为，则是H. Lewy于1957年公布的无解方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}-2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f(x_1,x_2,x_3)$$

其中f是某无穷可微但非解析的函数。这个例子开辟了三个方面的研究，大大地推动了线性偏微分方程一般理论的讨论，其前景是十分宽阔的。

当然，方法和工具的更新也是重要的。本世纪二、三十年代Hilbert空间和Banach空间方法就对定型偏微分方程的研究起了重大作用，而四十年代末出现的分布及其Fourier变换理论以及局部凸空间理论，则使一般常系数偏微分方程的研究大大改观；六十年代中和七十年代初由此发展的拟微分算子及Fourier积分算子方法，则更推动了一般变系数线性偏微分方程的研究，甚至对于非线性偏微分方程，也开始有所讨论。关于这些，可参看

数学研究与评论，1(1981)，163—168.

（二）一 般 方 程

1. 线性情形　关于线性偏微分方程一般理论的情况，已见于上引评介文章，这里不再赘述，只提到一些新的进展。

首先应提及S. Vasilach把Heaviside的算子方法推广到变系数情形的工作：

SIAM J. Math, Anal., 6：2(1975)，295—311；10(1979)，586—602；1077—1088；12(1981)，23—39.

他采用台左限的检试空间（以一维情形为例）

$$\mathscr{D}_{(+\Gamma x)}=\{\varphi(x)\in C^\infty(R)：\mathrm{supp}\varphi\subset[a,\infty),\ a>-\infty\}$$

其中a随φ而不同。记其对偶空间为$\mathscr{D}'_{(-\Gamma x)}$。对

$$S(x,\xi)\in\mathscr{D}_{(-\Gamma x)}\otimes\mathscr{D}'_{(+\Gamma\xi)},\quad T(\xi,y)\in\mathscr{D}_{(-\Gamma\xi)}\otimes\mathscr{D}'_{(+\Gamma y)}$$

定义合成$S\circ T$如下：

$$(S\circ T)(x,y)=\langle S,T\rangle=\int_R S(x,\xi)T(\xi,y)d\xi$$

可核验

$$(S\circ T)(x,y)\in\mathscr{D}_{(-\Gamma x)}\otimes\mathscr{D}'_{(+\Gamma y)}$$

$$\delta(x-y)\circ S=S\circ\delta(x-y)=S(x,y)$$

更引进Heaviside核：

$$H(x-y)=\begin{cases}1, & x\geqslant y\\ 0, & x<y\end{cases}$$

对$f\in M_{xy}\equiv(L^\circ_{loc})_x\otimes(L^\circ_{loc})_y$，定义其截像

$$\{f\}=H(x-y)\circ f(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & x\geqslant y\\ 0, & x<y\end{cases}$$

可证

$$\{f\}\in\mathscr{D}'_{(+\Gamma x)}\otimes\mathscr{D}'_{(-\Gamma y)}\equiv\mathscr{D}'_{(+\Gamma x)(-\Gamma y)},$$

且

$$\{f\}\circ\{g\}=\begin{cases}\int_y^x f(x,\xi)g(\xi,y)d\xi, & y\leqslant\xi\leqslant x\\ 0 & ,\ \xi\notin[y,x]\end{cases}$$

记

$$[H(x-\xi)^{\nu}]^{\circ}\equiv H\circ\cdots\circ H$$

右边为ν重合成。可核验

$$[H(x-\xi)^k]^{\circ}\circ\{a(x)\delta_x^{(j)}(x-\xi)\}=(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\left[\frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}a(\xi)\right]$$

这里要求$a(x)$具性质：

$$a\{S\}=\{aS\}\in\mathscr{D}'_{(-\Gamma x)(+\Gamma\xi)},\quad\forall S\in\mathscr{D}'_{(-\Gamma x)(+\Gamma\xi)}$$

于是可应用此式求变系数方程的基本解$\{E\}$：

$$\frac{d^m\{E\}}{dx^m}+a_1(x)\frac{d^{m-1}\{E\}}{d\lambda^{m-1}}+\cdots+a_m(x)\{E\}$$
$$\equiv[\delta^{(m)}+a_1(x)\delta^{(m-1)}+\cdots+a_m(x)\delta]\circ\{E\}=\delta(x-\xi),$$

两边都用$[H(x-\xi)^{m+1}]^{\circ}$合成，即得

$$\{E\}+\left\{\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\frac{(x-\xi)^m}{m!}a_{m-j}(\xi)\right\}\circ\{E\}\equiv\{\delta(x-\xi)+K(x,\xi)\}\circ\{E\}$$
$$=[H(x-\xi)^{m+1}]^{\circ}\circ\delta(x-\xi)=\frac{(x-\xi)^m}{m!},$$
$$K(x,\xi)\equiv\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\left[\frac{(x-\xi)^m}{m!}a_{m-j}(\xi)\right].$$

由此可解出

$$\{E\}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}[K(x,\xi)^{\nu}]^{\circ}\circ\frac{(x-\xi)^m}{m!}\equiv[\delta(x-\xi)+K(x,\xi)]^{-1}\circ\frac{(x-\xi)^m}{m!}$$

并可证明上述形式级数的弱收敛性。这样，S. Vasilach利用类似于Fredholm积分方程的预解式方法，成功地把Heaviside算子方法推广到变系数情形。这是Heaviside处理常系数方程以来近一百年的事！这个方法也可用于初值问题情形及变系数线性偏微分方程和方程组情形。

对线性情形还可补充的是：Wenston最近考虑了主型线性偏微分算子的适定定解问题。详见

J. Diff. Eq., 37：3(1980), 303—308.

2. 非线性情形 本来，对一般的非线性偏微分方程，除了解析情形的初值问题外，没有什么一般性的讨论。但六十年代中期以来，关于某些非线性偏微分方程容许弧波解乃至弧子(Soliton)解的研究，也可看作是对较一般方程的较一般性的讨论，而可列在本段标题的范围内。

必须说，某些非线性方程容许弧波解及弧子解的现象，也是一个重大发现。

近年来关于弧波和弧子的论文是相当多的，涉及的方法也是多种多样的。国内也有不少人从事这方面的研究。因此，我不打算谈论这个专题，而只提到两种概括性较强的方法，一个是Гельфанд等的抽象变分方法，见

Ycn. Матем. Наук, 30：5(1675), 67—100.

一种是 Новиков 等的代数几何方法，见

YMH 31：1(1976)55—136；32：6(1977), 183—206.

还可提到这方面较新的一个重要的论文集：F. Calogero, editor, Nonlinear Evolution Equations Solvable by Spectral Transfrm; 1978.

（三）定 型 方 程

1. 线性情形　定型的线性椭圆型方程、狭义抛物型方程以及严格双曲型方程都有相当充分的讨论，并有相当完善的结果。近年的研究多转向退化、系数间断、其它奇性、不适定情形乃至不等式情形，并且都有相应的实际背景。

必须说，即令是常系数的线性定型方程，例如对超双曲型方程

$$\Delta_x u = \Delta_y u,\ \ x \in R^m,\ \ y \in R^n$$

及“双曲抛物”型方程

$$u_t = u_{xx} - u_{yy}$$

以及其它一些非经典的定型线性方程，讨论还是很不充分甚至是很少的。其实，这种“双曲抛物”型方程，倒是有一定实际意义的，例如见

Treves F., Steinberg S., J. Diff. Eq., 8(1970), 333—366.

近年来讨论得更多的是非线性定型方程，所以下面转入这一方面。

2. 非线性情形　首先提到一种较新的发现，即半线性演化方程解的爆破(Blowing-up)问题与熄灭(Queneching)问题。1963年 Kaplan 讨论了半线性狭义抛物型方程

$$u_t = Au + f(u)$$

的初值问题及混合问题，这里 A 是二阶线性一致椭圆型算子，发现当

$$\int^{\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty$$

时，时间变量 t 存在一个临界值 t^*，当 $0 \leqslant t \leqslant t^\circ < t^*$ 时，问题的解有界；而当 $t \to t^*$ 时，则有 $|u| \to +\infty$。这就是解的爆破现象。详见

Kaplan, Comm. Pure Appl. Math., 16(1963), 305—330;

Fujita, J. Fac. Sci. llrkv. Tokyo, 13(1966), 109—124;

Portnoy, J. Math. Anal. Appl., 55：2(1976), 291—294;

Levine Payne, Ibid., 329—334.

这种爆破现象也见于半线性波动方程：

John F., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 76(1979), 1559—1560.

对于椭圆型方程，则有关于空间变量的爆破：

Levine, Payne, SIAM J. Math, Anal., 7(1976), 337—343.

另一方面，H. Kawarada 对半线性般传导方程

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$$

的混合问题发现存在空间变量 x 的临界值 a^*，当 $0 \leqslant x \leqslant a < a^*$ 时，混合问题有光滑的全局解(关于 t)；而当 $a > a^*$ 时，解的导数有爆破现象，这就是熄灭现象。这方面的讨论有：

Kawarada, Publ. RIMS Kyoto Univ., 10(1975), 729—736;

A. Acker, W. Walter, Lecture Notes in Math., Vol. 564, Springer, 1976, PP. 1—12;

W. Walter, SIAM J. Math. Anal., 6(1975), 85—90.

看来，这些现象有一定的普遍性，多少有些类似于弧子的情形。

此外，对于非线性定型方程的定解问题，分支解的研究是一个古老而又持久的重要课题。三十年代以来一直作为基本方法的关于紧算子的Leray-Schauder不动点原理及拓扑变理论，似乎已让位于关于更一般算子(例如增算子、单调算子等)的相应理论。详见

R. Carroll, Abstract Methods in PDE, New York, 1969.

关于定型非线性方程定解问题正解的讨论、周期解的讨论，以及关于极小曲面方程和拟线性双曲型方程组间断初值等问题的讨论，由于所知甚少，不多妄谈。

(四) 某些重要方程

最后提到几个近年来讨论较多的非经典方程，由于形式较简单或有一定代表性，有可能成为一些模型方程。

1. 拟抛物方程(Sobolev 方程)：

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u - A(x)u_t + B(x)u = f$$

例如见：

V. G. Sigillito, SIAM J. Math. Anal., 6(1975), 222—229;

W. Rundell, M. Stecker, Ibid. 7(1976), 898—912; 9(1978), 1120—1125;

R. P. Gilbert, J. Diff. Eq., 37(1980), 261—284.

2. Stokes 方程：

$$u_{tt} = u_{xxt} + \frac{\partial}{\partial t}[\sigma(u_x)]$$

例如见：

J. Greenberg et al., Arch. Rat. Mech. Anal., 19(1965), 100—116;

J. Math. Mech., 17(1968), 707—728;

G. Andrews, J. D. ff, Eg., 35(1980), 200—231.

3. Benjamin-Bona-Mahony 方程：

$$u_t + u_x + uu_x - \nu u_{xx} = \alpha u_{xxt}$$

例如见：

L. A. Medeiroo, G. P. Menzala, SIAM J. Math. Anal., 8(1977), 792—799;

J. L. Bona, V. A. Douglis, J. Math. Anal. Anal., 75(1980), 503—522.

4. Orr-Sommerfeld 方程：

$$yu_{xyy} + (\sin x)u_{yyy} = \lambda u_{yyyy}$$

例如见：

R. Haberman, Studies in Appl. Math., 51(1972), 139—161;

W. H. Reid, Ibid., 341—384;

P. M. Eagles, Quartly J. Mech. Appl. Math., 22(1969), 129—182;

Lin C. C., Ibid., 3(1945), 117—142, 218—234, 277—301.

能否从这些方程及其它非经典方程发现一些什么，看来也可能是有意义的。