第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan. 1984

关于Marx猜测*

吴卓人

（同济大学 数学力学系）

五十年前，A.Marx 提出了一个关于星象函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 取值范围的猜测。五十年来引起了许多人的注意和研究。现在我们概括地介绍一下这方面的进展情况。

设 $f(z)=z+\cdots$ 在单位圆 $(|z|<1)=U$ 内是解析的单叶函数。如果 f 在 U 内满足

$$\mathrm{Re}\{zf'(z)/f(z)\}>\rho,\quad 0\leqslant\rho<1,$$

称 f 是 ρ 级星象函数，其全体记为 S_ρ^*，简记 $S_0^*=S^*$，$S_{\frac{1}{2}}^*=S_*$。凸象函数族 K 是 S_* 的真子族。对每个 $\rho\in[0,1)$，函数

$$k_\rho(z)=z/(1-z)^{2(1-\rho)}$$

在 S_ρ^* 中。对于 $\rho=0$，Koebe 函数 $k_0(z)$ 记为 $k(z)=z/(1-z)^2$。

如果 $f(z)$ 与 $F(z)$ 都是 U 内的解析函数，$f(0)=F(0)$，且有 U 内的解析函数 $\omega(z)$，$|\omega(z)|\leqslant|z|\ (z\in U)$ 适合 $f(z)=F(\omega(z))$，称 $f(z)$ 在 U 内从属于 $F(z)$，记为 $f(z)\prec F(z)$，$(z\in U)$。

1932年，A. Marx 证明：当 $f\in S^*$ 时，$\dfrac{f(z)}{z}\prec\dfrac{k(z)}{z}$。因此，对于凸象函数 $\varphi(z)\in K$，有 $\varphi'(z)\prec\dfrac{k(z)}{z}$。接着他证明：当 $|z|\leqslant r\leqslant\sin\dfrac{\pi}{8}=0.382\cdots$ 时有

$$f'(z)\prec k'(z),\qquad (f\in S^*).$$

A.Marx 猜测，这一从属关系对 S^* 中任何函数 f 在 U 内都成立[1]。

后来，R.M.Robinson 将 Marx 的结果改善为 $r\leqslant\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=0.438\cdots$。P.L.Duren 与 R.McLaughlin 又分别改善为 $r\leqslant 0.736$[5]。

在 1957 年，我们获得了一个与此有关的结果[2]：

定理 对于 $f\in S_\rho^*$，$0\leqslant\rho<1$，任取 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 中的 λ，在 U 内成立：

$$\psi(z)=\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{\lambda}{1-\rho}}\left[\frac{1}{2(1-\rho)}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}+1-2\rho\right)\right]^{2(1-\lambda)}\prec\frac{k(z)}{z},$$

这里左端的幂取主值，使得当 $z\to0$ 时，$\psi(z)\to1$。

特别地，这一定理包括了 Marx 的前述结果，而且可以从中得到两个重要结论：

系1. 对于任何 $f\in S_*$，在 U 内成立

$$f'(z)\prec\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{z}{1-z}\right)'.$$

换句话说，Marx 猜测在子族 S_* 中成立。

*1982年4月26日收到。

系2. 当 $f\in S^*$ 时，对任何 $\lambda\in[0,1]$，在 U 中成立

$$\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\lambda}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right)\right]^{2(1-\lambda)}\prec\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{k(z)}{z}.$$

在此式中置 $\lambda=\frac{1}{2}$，可得

$$\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right)\right]\prec\frac{1}{(1-z)^2}.$$

从这些结果看，要在整个圆域 $|z|<1$ 内成立 Marx 猜测，似乎是不可能的。

到1972年，J.A.Hummel 提出了一个反例，表明 A.Marx 的猜测对充分大的 $r(<1)$ 是不对的[3]。Hummel 的例子是如下的函数：

$$f_b(z)=z/[1-e^{is}z)^b(1-e^{it}z)^{2-b}],\ 0\leqslant b\leqslant 2,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

$w=f_b(z)$ 把 U 映照到除去两条伸向 ∞ 的裂纹的平面。

有趣的是，在此同时，紧跟着 Hummel 的文章，P.L. Duren 和 R. McLaughlin 发表了如下的结果[4]：

定理 对于形如

$$f_1(z)=z/[(1-e^{is}z)(1-e^{it}z)]$$

的函数，在 U 内成立

$$f_1'(z)\prec k'(z).$$

他们的证明基于对 $k'(z)$ 及 f' 的单叶性的研究。他们证明 $\sqrt{k'(z)}$ 是单叶的，并且证明了 $\log k'(z)$ 在 U 内是星象函数。

据 R.McLaughlin 在[5]中说，J.A.Pfaltzgraff 于 1969 年也证得前述系 1 的结果，但至今未见发表。

综上所述，A. Marx 的猜测虽然对整个函数族 S^* 在圆 $|z|<1$ 内是不成立的，但下述问题还有待解决：

问题1 Marx 猜测

$$f'(z)\prec k'(z) \tag{1}$$

在 $|z|<1$ 内成立的充要条件，即 $f(z)$ 的几何特征是什么？

问题2 对于函数族 S^*，使 (1) 在 $|z|<r\ (r<1)$ 内成立的最大半径等于什么？

问题3 对于 $0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}$ 当 $f\in S_\rho^*$ 时使得

$$f'(z)\prec k_\rho'(z) \tag{2}$$

在 $|z|<1$ 内成立的最小值 ρ 等于什么？是否为 $\frac{1}{2}$？

参 考 文 献

[1] Marx,A., Untersuchungen über schlichte Abbildungen, *Math. Ann.* 107(1932/33), 40-67.

[2] 吴卓人，劳勃生的特殊星象函数和特殊凸象函数，数学学报，7:2(1957)，167—182.
Wu Zwao-Jen, Some classes of starlike functions, *American Math. Soc. Translations*, Ⅱ. *Ser.* 38.(1964)277-289.

[3] Hummel, J.A., The Marx conjecture for starlike functions, *Michigan Math. J.* 19(1972),257—266.

[4] Duren; P.L., McLaughlin,R. Two-slit mappings and the Marx conjecture, *Michigan Math.J.* 19 (1972), 267—273.

[5] McLaughlin,R., On the Marx conjecture for starlike functions of order α. *Trans. Amer. Math. Soc.* 142(1969), 249—256.