第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RRSEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan. 1984

叙列空间上的二级囿变函数(II)*

吴从炘　　　　赵林生

(哈尔滨工业大学)　　(哈尔滨第17中学)

作者在[1]中引入了叙列空间上的二级囿变函数，本文是它的继续。首先在[1]的基础上讨论叙列空间上二级囿变函数相应的凸函数分解，二级变差函数以及两个二级囿变函数的运算等问题，这也就是 §1。§2 再引进二级强囿变与二级弱囿变等概念。最后的 §3 研究可距离化和可赋范的完备（按 köthe 意义：$\lambda^{**}=\lambda$）空间，即(KF)和(KB)空间上的二级囿变函数并且顺带给出完备空间为(KF)型的一个特征。

文中沿用[1],[2]的名词和记号。

§1 二级囿变函数的若干进一步性质

我们分别记从$[a,b]$到叙列空间λ的囿变函数和二级囿变函数$X(t)=\{x_k(t)\}$的全体为$\bigvee([a,b],\lambda)$和$\bigvee^2([a,b],\lambda)$。

命题1 若$X(t)\in\bigvee([a,b],\lambda)$，则$\bigvee\limits_a^t(X)\triangleq\{\bigvee\limits_a^t(x_k)\}$在$t_0$处连续当且仅当$X(t)$在$t_0$处连续（指对任何$U\in\lambda^*$有$\lim\limits_{t\to t_0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k||x_k(t)-x_k(t_0)|=0$，见[2]定义 6)。

证　充分性 设$U\in\lambda^*,\varepsilon>0$，则由[2]定理 5 有自然数$k_0$使得

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|u_k|\bigvee_a^b(x_k)<\varepsilon/4,$$

易见$x_k(t)$在t_0处连续，从而再由熟知结果可知$\bigvee\limits_a^t(x_k)$在t_0处均连续，于是有$\delta>0$使得

$$|\bigvee_a^t(x_k)-\bigvee_a^{t_0}(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2k_0\max\limits_{1\le l\le k_0}|u_l|}(|t-t_0|<\delta,k=1,2,\cdots,k_0),$$

从而当$|t-t_0|<\delta$时

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k||\bigvee_a^t(x_k)-\bigvee_a^{t_0}(x_k)|\leqslant\sum_{k=1}^{k_0}|u_k||\bigvee_a^t(x_k)-\bigvee_a^{t_0}(x_k)|+2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|u_k|\bigvee_a^b(x_k)<\varepsilon.$$

必要性 只须注意对任何$U\in\lambda^*$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k||x_k(t)-x_k(t_0)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k||\bigvee_a^t(x_k)-\bigvee_a^{t_0}(x_k)|.$$

*1981年10月6日收到。

定理1　若$X(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$，则$\bigvee_a^t{}^2(X)\triangleq\{\bigvee_a^t{}^2(x_k)\}$在$t_0$处连续当且仅当$t_0\notin\bigcup_{k=1}^\infty E_0^{(k)}$（$E_0^{(k)}$的含意见[1]定理2）且$X'(t+0)$，$X'(t-0)$有一在$t_0$处连续。

证　充分性　于$U\in\lambda^*$，$\varepsilon>0$，为确定起见，不妨设$X'(t+0)$在t_0处连续，则由命题1，$\bigvee_a^t{}'(X'(t+0))$在t_0处也连续；于是有$\delta_1>0$，使得$t_0-\delta_1\notin\bigcup_{k=1}^\infty E_0^{(k)}$且当$|t-t_0|\leqslant\delta_1$时，

$$\sum_{k=1}^\infty|u_k|\,|\bigvee_a^t(x_k'(t+0))-\bigvee_a^{t_0}(x_k'(t+0))|<\varepsilon/2.$$

又由[1]定理2，有自然数k_0使得

$$\sum_{k=k_0+1}^\infty|u_k|l_k<\varepsilon/8.$$

再利用[1]定理1和$t_0\notin\bigcup_{k=1}^\infty E_0^{(k)}$，有$\delta_2>0$使得$t_0-\delta_2\notin\bigcup_{k=1}^\infty E_0^{(k)}$且

$$\sum_{t_{nk}^*\in E_0^{(k)}\cap[t_0-\delta_2,t_0+\delta_2]}|x_k'(t_{nk}^*+0)-x_k'(t_{nk}^*-0)|<\frac{\varepsilon}{8k_0\max\limits_{1\leqslant l\leqslant k_0}|u_l|}$$

$(k=1,2,\cdots,k_0)$。总之当$0<h\leqslant\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$时有

$$\sum_{k=1}^\infty|u_k|\,|\bigvee_a^{t_0+h}{}^2(x_k)-\bigvee_a^{t_0}{}^2(x_k)|\leqslant\sum_{k=1}^\infty|u_k|\Big(\bigvee_{t_0}^{t_0+h}{}^2(x_k)+|x_k'(t_0+0)-x_k'(t_0-0)|\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^\infty|u_k|\bigvee_{t_0}^{t_0+h}{}^2(x_k)\sum_{k=1}^\infty|u_k|\Big(\bigvee_{t_0}^{t_0+h}(x_k'(t+0))+2\sum_{t_{nk}^*\in E_0^{(k)}\cap[t_0,t_0+h]}|x_k'(t_{nk}^*+0)-x_k'(t_{nk}^*-0)|\Big)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^\infty|u_k|\,|\bigvee_a^{t_0+h}(x_k'(t+0))-\bigvee_a^{t_0}(x_k'(t+0))|+2\sum_{k=k_0+1}^\infty|u_k|l_k$$

$$+2\sum_{k=1}^{k_0}|u_k|\sum_{t_{nk}^*\in E_0^{(k)}\cap[t_0-\delta_2,t_0+\delta_2]}|x_k'(t_{nk}^*+0)-x_k'(t_{nk}^*-0)|<\varepsilon$$

和
$$\sum_{k=1}^\infty|u_k|\Big|\bigvee_a^{t_0-h}{}^2(x_k)-\bigvee_a^{t_0}{}^2(x_k)\Big|\leqslant\sum_{k=1}^\infty|u_k|\Big(\bigvee_a^{t_0}{}^2(x_k)-\bigvee_a^{t_0-\delta}{}^2(x_k)\Big)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^\infty|u_k|\Big(\bigvee_{t_0-\delta}^{t_0}{}^2(x_k)+|x_k'(t_0-\delta+0)-x_k'(t_0-\delta-0)|\Big)=\sum_{k=1}^\infty|u_k|\bigvee_{t_0-\delta}^{t_0}{}^2(x_k)<\varepsilon$$

（注意[1]的命题1和定理B）。

必要性　设$\bigvee_a^t{}^2(X)$在t_0处连续，则易见$\bigvee_a^t{}^2(x_k)$在t_0处均连续，从而由[1]定理1可知：$t_0\notin E_0^{(k)}(k=1,2,\cdots)$，即$t_0\notin\bigcup_{k=1}^\infty E_0^{(k)}$。

于$U\in\lambda^*$，$\varepsilon>0$，取$\delta>0$使$t_0\pm\delta\notin\bigcup_{k=1}^\infty E_0^{(k)}$且当$0<h\leqslant\delta$时，

$$\sum_{k=1}^\infty|u_k|\,|\bigvee_a^{t_0\pm h}{}^2(x_k)-\bigvee_a^{t_0}{}^2(x_k)|<\varepsilon.$$

于是由[1]命题1和定理B当$0<h\leqslant\delta$时有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k||x_k'(t_0+h+0)-x_k'(t_0+0)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_{t_0}^{t_0+h}(x_k'(t+0))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_{t_0}^{t_0+\delta}(x_k'(t+0))$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_{t_0}^{t_0+\delta}{}^2(x_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(\bigvee_{a}^{t_0+\delta}{}^2(x_k)-\bigvee_{a}^{t_0}{}^2(x_k)\right)<\varepsilon$$

和

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k||x_k'(t_0-h+0)-x_k'(t_0+0)|<\varepsilon.$$

同样也可证得 $X'(t-0)$ 在 t_0 处连续。

命题2　若 $X(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$，则 $X(t)$ 绝对连续（其定义见[3]）。

证　因为由[1]定理 2，$x_k(t)$ 为二级囿变函数，再由[4]，$x_k(t)$ 为绝对连续 $(k=1,2,\cdots)$，又由[1]推论 2 和[2]定理5，$\bigvee_a^b(X)\in\lambda^{**}$，故最后由[3]的定理即知 $X(t)=\{x_k(t)\}$ 为绝对连续。

定义1　设 $X(t)=\{x_k(t)\}$ 为从 $[a,b]$ 到叙列空间 λ 的抽象函数，若对任何 k，$x_k(t)$ 均为凸函数，则称 $X(t)$ 为凸函数。

定理2　设 λ 为完备空间，则下列命题等价：

(1) $X(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$；

(2) 存在凸函数 $X^{(i)}(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$ $(i=1,2)$ 使得 $X(t)=X^{(1)}(t)-X^{(2)}(t)$；

(3) 存在凸函数 $X^{(i)}(t)$ 使得 $X^{(i)\prime}(a)$，$X^{(i)\prime}(b)$ 存在 $(i=1,2)$ 并且 $X(t)=X^{(1)}(t)-X^{(2)}(t)$。

证　(1)⇒(2)　因为由[5]可知对任何 k

$$x_k(t)=x_k(a)+\int_a^t x_k'(t-0)\,dt,$$

而 $x_k'(t-0)$ 为囿变，故可命

$$X^{(1)}(t)=\left\{\int_a^t\bigvee_a^t(x_k'(t-0))\,dt\right\}.$$

由[1]命题 1，$\left|\int_a^t\bigvee_a^t(x_k'(t-0))\,dt\right|\leqslant\int_a^t\bigvee_a^t{}^2(x_k)\,dt\leqslant(b-a)\bigvee_a^b{}^2(x_k)$，

再由[1]定理 2 便知 $X^{(1)}(t)\in\lambda^{**}=\lambda$，从而自然又有 $X^{(2)}(t)\triangleq X(t)-X^{(1)}(t)\in\lambda$。至于 $X^{(i)}(t)$ $(i=1,2)$ 的凸性，由熟知的结论即得。

最后证明 $X^{(1)}(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$，从而 $X^{(2)}(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$ 自然也成立。

事实上，命 $y_k(t)=\bigvee_a^t(x_k'(t-0))$，则由[6]定理 2 有

$$\bigvee_a^b(y_k)=\bigvee_a^b(x_k'(t-0)),$$

于是由[1]命题 1 对任何 $U\in\lambda^*$ 有

$$\bigvee_a^b{}^2(X^{(1)},U)=\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{\int_a^{t_{i+1}}y_k(t)\,dt-\int_a^{t_i}y_k(t)\,dt}{t_{i+1}-t_i}-\frac{\int_a^{t_i}y_k(t)\,dt-\int_a^{t_{i-1}}y_k(t)\,dt}{t_i-t_{i-1}}\right|$$

$$=\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}y_k(t)\,dt-\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}y_k(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k||y_k(t_{i+1})-y_k(t_{i-1})|$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_a^b(y_k)\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_a^{b}{}^2(x_k),$$

再由[1]定理2，便知$X^{(1)}(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$。

(2)⇒(3) 显然只须证$X^{(i)\prime}(a),X^{(i)\prime}(b)\in\lambda(i=1,2)$，并且可只证$X^{(1)\prime}(a)\in\lambda$。

如若不然，则因λ完备，故有$U^{(0)}\in\lambda^*$且不妨设$u_k^{(0)}\neq 0(k=1,2,\cdots)$，自然数$N_n$和$\varepsilon_n>0$使得

$$\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}||x_k^{(1)\prime}(a)|=n+\varepsilon_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于[4]$x_k^{(1)\prime}(a)$存在，所以可取$\frac{a+b}{2}>t_n^*>a$使对$k=1,2,\cdots,N_n$恒有

$$\left|\left|\frac{x_k^{(1)}(t_n^*)-x_k^{(1)}(a)}{t_n^*-a}\right|-|x_k^{(1)\prime}(a)|\right|<\frac{\varepsilon_n}{2^{k+1}|u_k^{(0)}|},$$

又可设$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k^{(0)}|\left(\left|x_k^{(1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|x_k^{(1)}(b)|\right)=L<\infty$。于是再由凸函数$x_k(t)$的一个不等式（譬如见[7]的(1.4)），便知对分划D_n：$a<t_n^*<\frac{a+b}{2}<b$有

$$\bigvee_a^{b}{}^2(X^{(1)},U^{(0)})\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left\{\left|\frac{x_k^{(1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)-x_k^{(1)}(t_n^*)}{\frac{a+b}{2}-t_n^*}-\frac{x_k^{(1)}(t_n^*)-x_k^{(1)}(a)}{t_n^*-a}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\frac{x_k^{(1)}(b)-x_k^{(1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{a+b}{2}}-\frac{x_k^{(1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)-x_k^{(1)}(t_n^*)}{\frac{a+b}{2}-t_n^*}\right|\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left\{\frac{x_k^{(1)}(b)-x_k^{(1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{a+b}{2}}-\frac{x_k^{(1)}(t_n^*)-x_k^{(1)}(a)}{t_n^*-a}\right\}$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left(\left|\frac{x_k^{(1)}(t_n^*)-x_k^{(1)}(a)|}{t_n^*-a}\right|-\frac{2}{b-a}\left|x_k^{(1)}(b)-x_k^{(1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}|\left(|x_k^{(1)\prime}(a)|-\frac{\varepsilon_n}{2^{k+1}|u_k^{(0)}|}-\frac{2}{b-a}\left(|x_k^{(1)}(b)|+\left|x_k^{(1)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}|u_k^{(0)}||x_k^{(1)\prime}(a)|-\varepsilon_n-\frac{2}{b-a}L=n-\frac{2}{b-a}L\ (n=1,2,\cdots),$$

这与$X^{(1)}(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$矛盾。

(3)⇒(1) 因为由[4]可知对任何k有

$$\bigvee_a^{b}{}^2(x_k^{(i)})=x_k^{(i)\prime}(b)-x_k^{(i)\prime}(a)\quad(i=1,2),$$

故对任何$U\in\lambda^*$有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_a^b{}^2(x_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(\bigvee_a^b{}^2(x_k^{(1)})+\bigvee_a^b{}^2(x_k^{(2)})\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|(|x_k^{(1)\prime}(b)|+|x_k^{(1)\prime}(a)|+|x_k^{(2)\prime}(b)|+|x_k^{(2)\prime}(a)|)<\infty,$$

从而再由[1]定理 2 即得 $X(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$。

定理3　设 λ 为完备空间，则对任何 $X(t)$，$Y(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$ 恒有 $X(t)Y(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$ 的充要条件为对任何 $U\in\lambda^*,Z(t)\in\bigvee([a,b],\lambda)$ 有 $\{|u_k|(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k))\}\in\lambda^*_1$。

证　充分性　因为由[1]推论 2 之证知对任何 $t',t''\in[a,b]$ 有

$$|x_k(t')-x_k(t'')|\leqslant L_k|t'-t''|\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 $L_k=2\left(\bigvee_a^b{}^2(x_k)+\max\left(\left|\frac{x_k(t_0^*)-x_k(a)}{t_0^*-a}\right|,\left|\frac{x_k(b)-x_k(t_0^*)}{b-t_0^*}\right|\right)\right)$，$t_0^*$ 为 (a,b) 的一个定点并且 $\{L_k\}\in\lambda^{**}$，故对任何 $U\in\lambda^*$，

$$\bigvee_a^b{}^2(XY,U)=\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{x_k(t_{i+1})y_k(t_{i+1})-x_k(t_i)y_k(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{x_k(t_i)y_k(t_i)-x_k(t_{i-1})y_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|$$

$$\leqslant\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(\left|\frac{x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{x_k(t_i)-x_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right||y_k(t_{i+1})|\right.$$
$$+\left|\frac{y_k(t_{i+1})-y_k(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{y_k(t_i)-y_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right||x_k(t_i)|$$
$$\left.+|y_k(t_{i+1})-y_k(t_{i-1})|\left|\frac{x_k(t_i)-x_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(|y_k(a)|+\bigvee_a^b(y_k)\right)\cdot\bigvee_a^b{}^2(x_k)+\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(|x_k(a)|+\bigvee_a^b(x_k)\right)\cdot\bigvee_a^b{}^2(y_k)$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\bigvee_a^b(y_k)\cdot L_k<\infty.$$

必要性　于 $U\in\lambda^*,Z(t)\in\bigvee([a,b],\lambda)$，则对任何 $X^{(0)}=\{x_k^{(0)}\}\in\lambda$，命

$$x_k(t)=\begin{cases}(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k))t & (t^*<t\leqslant b)\\ \frac{1}{2}(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k))(t+t^*) & (a\leqslant t\leqslant t^*)\end{cases},$$

$$y_k(t)=\begin{cases}|x_k^{(0)}|t & (t^*<t\leqslant b)\\ \frac{1}{2}|x_k^{(0)}|(t+t^*) & (a\leqslant t\leqslant t^*)\end{cases},$$

其中 t^* 为 (a,b) 的一个定点，则因

$$x_k'(t+0)=\begin{cases}|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k) & (t^*\leqslant t\leqslant b)\\ \frac{1}{2}(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k)) & (a\leqslant t<t^*)\end{cases},$$

故对 $k=1,2,\cdots$,

$$\bigvee_a^b(x_k'(t+0))=x_k'(t^*+0)-x_k'(t^*-0)=\frac{1}{2}\left(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k)\right),$$

于是由[1]命题1可知 $x_k(t)$ 为二级囿变，又由[2]定理5有 $\{|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k)\}\in\lambda^{**}=\lambda$，从而再由[2]定理5 $X'(t+0)\in\bigvee([a,b],\lambda)$，另外此时 $l=\{l_k\}=\left\{\frac{1}{2}\left(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k)\right)\right\}\in\lambda$，总之由[1]定理2即得 $X(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$，同理 $Y(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$。

现在作分划：$a<t^*<s_1<s_2<b$，则自然有

$$\infty>\bigvee_a^{b}{}^2(XY,U)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{x_k(b)y_k(b)-x_k(s_2)y_k(s_2)}{b-s_2}-\frac{x_k(s_2)y_k(s_2)-x_k(s_1)y_k(s_1)}{s_2-s_1}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\left(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k)\right)|x_k^{(0)}|((b+s_2)-(s_2+s_1))\right|$$

$$=(b-s_1)\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k)\right)\cdot|x_k^{(0)}|,$$

这表明
$$\left\{|u_k|\left(|Z_k(a)|+\bigvee_a^b(Z_k)\right)\right\}\in\lambda^*.$$

由定理3和[2]定理8即得

推论1 设 λ 为完备空间，则对任何 $X(t),Y(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$ 均有 $X(t)Y(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$ 当且仅当对任何 $X(t),Y(t)\in\bigvee([a,b],\lambda)$ 均有 $X(t)Y(t)\in\bigvee([a,b],\lambda)$。

§2 叙列空间上的二级强、弱囿变函数

定义2 设 λ 为叙列空间，$X(t)=\{x_k(t)\}$ 为从 $[a,b]$ 到 λ 的抽象函数，若对 λ^* 的任何有界集 N $\left(\text{指对任何}X^{(0)}\in\lambda\text{有}\sup_{U\in N}\left|\sum_{k=1}^{\infty}u_kx_k^{(0)}\right|<\infty\right)$有

$$\bigvee_a^{b}{}^2(X,N)\triangleq\sup_D\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left[\frac{x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{x_k(t_i)-x_k(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right]\right|<\infty,$$

则称 $X(t)$ 为二级强囿变函数。

定义3 若对任何 $U\in\lambda^*$，$UX(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_kx_k(t)$ 为通常的二级囿变函数，则称 $X(t)$ 为二级弱囿变函数。

显然，二级强囿变⇒二级囿变⇒二级弱囿变⇒$x_k(t)$ 为二级囿变 $(k=1,2,\cdots)$。

定理4 设 λ 为完备空间，则对从 $[a,b]$ 到 λ 的抽象函数，二级强囿变与二级囿变概念等价的充要条件是对 λ^* 的任何有界集 N 有 $U^{(N)}\in\lambda^*$，其中 $u_k^{(N)}=\sup_{U\in N}|u_k|$。

证 充分性如同[2]定理9之证。

今证必要性。如若不然，则有 λ^* 的有界集 N_0 和 $X^{(0)}\in\lambda$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k^{(N_0)}x_k^{(0)}|=\infty.$$

设 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots<b$，命

$$x_k(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}|x_k^{(0)}|(t+t_{k+1}) & (t_{k+1}<t\leqslant b)\\ |x_k^{(0)}|t & (t_k<t\leqslant t_{k+1})\ (k=1,2,\cdots),\\ \frac{1}{2}|x_k^{(0)}|(t+t_k) & (a\leqslant t\leqslant t_k)\end{cases}$$

则仿定理 3 必要性的证明便知 $X(t)\in\bigvee^2([a,b],\lambda)$，于是由假设 $X(t)$ 为二级强囿变函数。

另一方面对分划 D_n：

$$a=t_0<s_1^{(1)}<t_1<s_1^{(2)}<s_2^{(1)}<t_2<s_2^{(2)}<s_3^{(1)}<\cdots<s_n^{(1)}<t_n<s_n^{(2)}<b$$

有

$$\bigvee_a^b{}^2(X,\tilde{N}_0)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sup_{U\in\tilde{N}_0}\left|\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left[\frac{x_k(s_i^{(2)})-x_k(t_i)}{s_i^{(2)}-t_i}-\frac{x_k(t_i)-x_k(s_i^{(1)})}{t_i-s_i^{(1)}}\right]\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sup_{U\in\tilde{N}_0}\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|\left|\frac{x_k(s_i^{(2)})-x_k(t_i)}{s_i^{(2)}-t_i}-\frac{x_k(t_i)-x_k(s_i^{(1)})}{t_i-s_i^{(1)}}\right|$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sup_{U\in\tilde{N}_0}|u_i|\left|\frac{x_i(s_i^{(2)})-x_i(t_i)}{s_i^{(2)}-t_i}-\frac{x_i(t_i)-x_i(s_i^{(1)})}{t_i-s_i^{(1)}}\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sup_{U\in\tilde{N}_0}|u_i|\left||x_i^{(0)}|-\frac{1}{2}|x_i^{(0)}|\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sup_{U\in N_0}|u_i||x_i^{(0)}|$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}u_i^{(N_0)}|x_i^{(0)}|\to\infty\quad(n\to\infty),$$

矛盾（注意 $\tilde{N}_0$ 表示所有满足 $|v_k|\leqslant|u_k|$ $(k=1,2,\cdots)$ 的 $V=\{v_k\}$ 的全体，显然若 N_0 为 λ^* 的有界集，则 $\tilde{N}_0$ 亦为 λ^* 的有界集并且 $\sup\limits_{U\in\tilde{N}_0}|u_k|=\sup\limits_{U\in N_0}|u_k|$）。

推论2　设 λ 为完备空间，则对 $[a,b]$ 到 λ 的抽象函数，二级强囿变与二级囿变概念等价当且仅当强囿变与囿变概念等价。

证　由定理 2 和[2]定理 9 即得。

由推论 2 及[2]定理 11，12 即得

推论3　对完备收敛自由空间和 gestufen 空间上的抽象函数，二级强囿变与二级囿变概念等价。

仿[2]定理 13 之证便有

命题3　设 $X(t)=\{x_k(t)\}$ 为从 $[a,b]$ 到完备收敛自由空间 λ 的抽象函数，则下列概念等价：

1° $X(t)$ 为二级囿变；2° $X(t)$ 为二级弱囿变；

3° $x_k(t)$ 为二级囿变 $(k=1,2,\cdots)$ 且 $X(t)$ 有界（系指 $\{X(t)\mid a\leqslant t\leqslant b\}$ 为 λ 的有界集，亦即

对任何$U\in\lambda^*$有$\sup\limits_{a<t<b}\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_kx_k(t)\right|<\infty$。

定理5 设$X(t)=\{x_k(t)\}$为从$[a,b]$到gestufen空间λ的抽象函数，则下列概念等价：

1° $X(t)$为二级囿变；2° $X(t)$为二级弱囿变；

3° $x_k(t)$为二级囿变$(k=1,2,\cdots)$且$X(t)$有界，

当且仅当$\lambda=\omega$。

证 充分性由命题1即得。

今证必要性。如同[2]定理14之证，不妨设$A^{(1)}\notin\phi$且$a_k^{(1)}\neq 0(k=1,2,\cdots)$。取$L_k$为$b_k^{(k)}/b_k^{(1)}$的整数部分，其中$b_k^{(n)}=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_k^{(i)}|$，对$k=1,2,\cdots$，取$t_i^{(k)}$满足

$$a+\frac{b-a}{k+1}<t_1^{(k)}<t_2^{(k)}<\cdots<t_{4L_k}^{(k)}<a+\frac{b-a}{k},$$

并且使得$t_{i+1}^{(k)}$与$t_{4L_k-i}^{(k)}$关于$\left[a+\frac{b-a}{k+1},a+\frac{b-a}{k}\right]$为对称$(i=0,1,2,\cdots,2L_k-1)$。命

$$x_k(t)=\begin{cases}0 & (a\leqslant t\leqslant t_1,\ t_{4L_k}^{(k)}<t\leqslant b)\\ \dfrac{2}{[3+(-1)^i]b_k^{(k)}}(t-t_1^{(k)}) & (t_i^{(k)}<t\leqslant t_{i+1}^{(k)},\ i=1,2,\cdots,2L_k-1)\\ \dfrac{2}{[3+(-1)^i]b_k^{(k)}}(t_{4L_k}^{(k)}-t) & (t_{4L_k-i}^{(k)}<t\leqslant t_{4L_k-i+1}^{(k)},\ i=1,2,\cdots,2L_k-1)\\ \dfrac{1}{b_k^{(k)}}(t_{4L_k}^{(k)}-t_1^{(k)}) & (t_{2L_k}^{(k)}<t\leqslant t_{2L_{k+1}}^{(k)})\end{cases}$$

则

$$x_k'(t+0)=\begin{cases}0 & (a\leqslant t<t_1^{(k)},\ t_{4L_k}^{(k)}\leqslant t\leqslant b,\ t_{2L_k}^{(k)}\leqslant t<t_{2L_{k+1}}^{(k)})\\ \dfrac{2}{[3+(-1)^i]b_k^{(k)}} & (t_i^{(k)}\leqslant t<t_{i+1}^{(k)},\ i=1,2,\cdots,2L_k-1)\\ \dfrac{-2}{[3+(-1)^i]b_k^{(k)}} & (t_{4L_k-i}^{(k)}\leqslant t<t_{4L_k-i+1}^{(k)},\ i=1,2,\cdots,2L_k-1)\end{cases}$$

同样可求出$x_k'(t-0)$，另外此时有

$$\bigvee_a^b(x_k'(t+0))=2\left(1+1+\frac{1}{2}(2L_k-1)\right)=\frac{2(L_k+1)}{b_k^{(k)}},$$

$$\sum_{t_{nk}^*\in E_0^{(k)}}|x_k'(t_{nk}^*+0)-x_k'(t_{nk}^*-0)|=\frac{2(L_k+1)}{b_k^{(k)}},$$

故再由[1]命题1便知

$$\bigvee_a^{b}{}^2(x_k)\leqslant\bigvee_a^b(x_k'(t+0))+\sum_{t_{nk}^*\in E_0^{(k)}}|x_k'(t_{nk}^*+0)-x_k'(t_{nk}^*-0)|=\frac{4(L_k+1)}{b_k^{(k)}}.$$

而从易见的不等式

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}b_k^{(n)}|x_k(t)|\leqslant(b-a)\sup_{1\leqslant k<\infty}b_k^{(n)}/b_k^{(k)}$$

并仿[2]定理14之证又得$X(t)$有界。

另一方面，$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(1)}\bigvee_a^b(x_k'(t+0))=\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(1)}\cdot\frac{2(L_k+1)}{b_k^{(k)}}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}2=\infty,$$

由[2]定理5 $X'(t+0)$非囿变，同样$X'(t-0)$亦非囿变，再由[1]定理2，$X(t)$非二级囿变，于是得到矛盾。

§3　(KF)与(KB)空间上的二级囿变函数

完备空间 λ 关于强拓扑（即在 λ^* 的有界集上一致收敛的拓扑）可赋范成 Banach空间，则称它为(KB)空间；又对可距离化成 Frechet 空间的情形叫做(KF)空间。

如同[2]的定理之证有

命题4　在(KB)空间中二级强囿变与依范二级强囿变（指$\sup\limits_D\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left\|\dfrac{X(t_{i+1})-X(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\dfrac{X(t_i)-X(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right\|<\infty$）等价。

利用定理 4 又可将[2]定理 21，22 转到二级囿变的情形，也就是有

命题5　若 λ 为(KF)空间，则二级强囿变与二级囿变概念等价当且仅当 λ 为可列多个 Stufen 生成的 gestufen 空间。

命题6　若 λ 为(KB) 空间，则二级强囿变与二级囿变概念等价当且仅当 λ 为有限多个 Stufen 生成的 gestufen 空间。

最后顺便将[2]中用到但未给予证明的完备空间 λ 为(KF)和(KB)空间的条件的未在其它文章中发表过的部分叙述如下（关于(KB)空间的条件见[8]定理1的 2°与3°的等价性）：

定理6　完备空间 λ 关于强拓扑为(KF)空间当且仅当λ^* 存在可列多个有界集$\{N_n\}$，它可以吸收 λ^* 的任何有界集，即若 $N\subset\lambda^*$ 有界，则有 N_{n_0} 和 α 使得 $N\subset\alpha N_{n_0}$。

证　充分性　因为此时

$$\left\{X\,\middle|\,\sup_{U\in N_n}|UX|<\frac{1}{m}\right\}\quad(n,m=1,2,\cdots)$$

显然构成 λ 的强拓扑的零点邻域基，故由拓扑线性空间的一熟知结果（参看[9]P.106 定理(1)）即知 λ 关于强拓扑为(KF)空间。

必要性　由同一结果可知有 λ^* 的有界集 N_n 和 $\varepsilon_n>0\,(n=1,2,\cdots)$ 使 $M_n=\{X|\sup\limits_{U\in N_n}|UX|\leqslant\varepsilon_n\}\,(n=1,2,\cdots)$ 为 λ 的强拓扑的零点邻域基并且不妨设 $M_{n+1}\subset M_n$。命

$$N_n'=\left\{U\,\middle|\,\sup_{X\in M_n}|UX|\leqslant 1\right\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则因对任何 $X^{(0)}\in\lambda$，记 $\sup\limits_{U\in N_n}|UX^{(0)}|=\alpha_n$，就有$\dfrac{1}{\alpha_n\varepsilon_n}X^{(0)}\in M_n$，故

$$\sup_{U\in N_n'}|UX^{(0)}|=\alpha_n\varepsilon_n\sup_{U\in N_n'}\left|U\frac{1}{\alpha_n\varepsilon_n}X^{(0)}\right|\leqslant\alpha_n\varepsilon_n,$$

即 N_n' 为 λ^* 的有界集。

今证$\{N_n'\}$可吸收 λ^*的任何有界集。

事实上，于 λ^* 的有界集 N，若有 $U^{(n)}\in N$ 使 $U^{(n)}\notin N_n'$，则有 $X^{(n)}\in M_n$ 使 $|U^{(n)}X^{(n)}|>1\,(n=1,2,\cdots)$，于是 $\sup\limits_{U\in N}|UX^{(n)}|\geqslant|U^{(n)}X^{(n)}|>1$，即 $\{X^{(n)}\}$ 不强收敛于零元。另一方面对任何 M_m 有 $X^{(n)}\in M_n\subset M_m\,(n\geqslant m)$，即$\{X^{(n)}\}$强收敛于零元，矛盾。

推论 4　除 ω 外任何完备收敛自由空间不可距离化成(KF)空间。

证　如若不然，则有 λ^* 的可列多个有界集$\{N_n\}$，它可以吸收 λ^* 的任何有界集。因 $\lambda\neq\omega$，故存在无限指标集 $J=\{k_i\}$使得有 λ^* 的点在其上的坐标非零，设 J_n 为所有至少有一N_n 的点在其上坐标非零的指标集，显然我们可以假定 $J\subset J_n\,(n=1,2,\cdots)$。

由此可设

$$|u_{kl}|\leqslant L_{kl}^{(n)}\quad (U\in N_n;\ n=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots),$$

其中 $L_{kl}^{(n)}$ 不妨设它满足 $L_{kl}^{(n)}>2$。

令
$$N=\{U\,\big|\,|u_{kl}|\leqslant L_{kl}, u_m=0\,(m\neq k_l, l=1,2,\cdots)\},$$

其中 $L_{kl}=L_{kl}^{(1)}\cdots L_{kl}^{(l)}$，则易见$N$是 λ^* 的有界集（[10]§15 定理 3），故有 N_{n_0} 和 a 使得$N\subset aN_{n_0}$。

另一方面，令
$$U^{(0)}:\ u_{kl}^{(0)}=L_{kl}, u_m^{(0)}=0\,(m\neq k_l, l=1,2,\cdots),$$

则$U^{(0)}\in N$，但 $U^{(0)}\notin aN_{n_0}$，于是发生矛盾。

事实上，取 l_0 使 $2^{l_0-1}>a, l_0>n_0$，那末当 $l\geqslant l_0$ 时
$$\begin{aligned}u_{kl}^{(0)}&=L_{kl}=L_{kl}^{(1)}\cdots L_{kl}^{(n_0)}\cdots L_{kl}^{(l_0)}\cdots L_{kl}^{(l)}\\&>2^{l-1}L_{kl}^{(n_0)}\geqslant 2^{l_0-1}L_{kl}^{(n_0)}>aL_{kl}^{(n_0)}.\end{aligned}$$

推论5 任何可列多个Stufen生成的gestufen空间λ可距离化成(KF)空间。

证 由定理6和[9]P.423即得。

参 考 文 献

[1] 吴从炘、赵林生，叙列空间上的二级囿变函数Ⅰ，数学研究与评论 Vol.2(1982), no. 4, pp.143—150.

[2] 吴从炘，Функции с ограниченной на пространстве последовательностей, *Scientia Sinica*, 13 (1964), no. 9, 1359—1380.

[3] 吴从炘，叙列空间上的囿变函数Ⅰ，数学学报，14 (1963), no. 4, 548—557.

[4] 郭大钧，关于二级斯梯节积分的一些性质，四川大学学报(自然科学)，1955年第1期，21—32.

[5] 李子平，二级绝对连续函数和二级斯堤吉积分，四川大学学报(自然科学)，1956 年第2期，69—82.

[6] Huggins, F. N., Some interesting properties of the variation functions, *Amer. Math. Monthly*, 83 (1976), no. 7, 538—546.

[7] Красносельский, М. А., рутицкий, я. Ь., 凸函数和奥尔里奇空间，科学出版社(1962)，吴从炘译.

[8] 吴从炘，完备矩阵代数Ⅰ，数学学报，21 (1978), no. 2, 161—170.

[9] Köthe, G., Toplogische Lineare Räume Ⅰ (1960).

[10] Köthe, G. und Toeplitz, O., Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, *J. Reine Angew. Math.*, 117 (1934), 193—226.

The Bounded Variation Functions of Order 2 on the Sequence Spaces(II)

Wu Congxin(吴从炘) *Zhao Linsheng*(赵林生)

Abstract

In this paper we obtain some further properties of the bounded variation functions of order 2 from [a, b] to sequence spaces λ and introduce the strongly and weakly bounded variation functions on the sequence spaces. Finally, we give a criteria of Köthe—Fréchet spaces, which is needful for our subject.