第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan. 1984

# 偏序集、极大元与定向集*

王国俊

（陕西师范大学数学系）

## 摘　　要

偏序集的定义有多种形式，极大元的定义相应地也有所不同，这两者的定义必须配套，否则将会导致错误。比如，按[15]对偏序集与极大元的那种定义，Zorn引理就不成立。关于定向集的定义也存在类似的问题。本文拟就上述问题作一初步探讨。

## §1 引　　言

按Bourbaki学派的观点，代数结构、拓扑结构与序结构合称为数学中的三大母结构。可见对序关系的研究有广泛的意义。实际上序关系也确已成为许多数学学科共同关心的课题。早在1895年，Cantor, G. 就系统地给出了全系集的理论[1]。由于要求每两个元素都可比较大小，全序集的理论有较大的局限性。事实上大量的数学对象之间存在着另一种广义的序关系——偏序关系，它不要求任二元素都可比较大小，而把传递性作为最基本的一条要求。比如，一个集$X$的幂集$\mathscr{P}(X)$的成员按包含关系所成的序，一个群$G$的一切子群之集按包含关系所成的序，自然数集$\mathbb{N}$按整除关系定义的序以及$[0,1]$上全体连续函数之集$\mathbb{C}[0,1]$按通常意义所规定的序等等。所以偏序集的概念比之全序集的概念有更广泛与更重要的背景。Hausdorff, F. 于1904年就系统地整理了偏序集的理论[2]。不过，由于各学科内容上的差异与侧重点的不同，或是由于各著者表述习惯有别，近年来各数学著作中对偏序集的定义很不统一。相应地，极大元的定义也有多种。上述不同的定义之间存在着某些联系，而偏序集与极大元的定义应如何相配尤其值得注意。这是本文所要探讨的问题之一。

另一方面，定向集是又一个重要的基本概念，由此出发所导出的网（nets）或定向系统（directed systems）的概念是建立Moore-Smith收敛理论的基础。然而关于这一基本概念也存在着不同的定义方式。众所周知，在拓扑学中利用滲透（filters）和网都可以建立起完满的收敛理论，用这两种工具都可以成功地刻划诸如聚点、闭包、连续性、紧性等一系列拓扑概念。其实，这二者之间是存在着简单而直接的关系的，即本文§4的定理。这一定理在反映网与滲透的关系方面无疑是一个重要而漂亮的结果。然而为保证这一命题

1982年7月2日收到。

的成立，对定向集的定义就不能不进行恰当的选择。但我们发现有不少著作似乎并未注意到此问题，其中代数方面的不妨搁置勿论，而作为拓扑学的著作似应以照顾到上述命题的成立为好。这是本文所要探讨的第二个问题。

由于作者的水平所限，本文可能有许多不妥之处，请各位学者赐教。

## §2 预 备

为叙述方便起见，我们把下文涉及的基本概念作一简要介绍。

设$X$、$Y$是集，$R\subset X\times Y$，则称$R$为二元关系。当$(x,y)\in R$时称$x$与$y$满足关系$R$，这时也写$xRy$。

$$D(R)=\{x\in X\mid 有\ y\in Y\ 使\ xRy\},$$
$$G(R)=\{y\in Y\mid 有\ x\in X\ 使\ xRy\},$$
$$F(R)=D(R)\cup G(R)$$

分别称作$R$的定义域、值域和域。

设$R\subset X\times X$，则称$R$为集$X$上的关系。此外

(1) 如果对每个$x\in X$都有$xRx$，则称$R$为自反的(reflexive)。

(2) 如果对每个$x\in X$，$xRx$都不成立，则称$R$为反自反的(irreflexive)。

(3) 如果从$xRy$且$yRz$能推得$xRz$，则称$R$为传递的(transitive)。

(4) 如果从$xRy$且$yRx$能推得$x=y$，则称$R$为反对称的(antisymmetric)。

(5) 如果对$X$中任二不同的元$x$与$y$，必有$xRy$或$yRx$成立，则称$R$为连通的(connected)。

此外我们约定：

(6) 如果存在$a\in X$，使对$X$中任何异于$a$的元$x$，$xRa$和$aRx$都不成立，则称$a$为孤立元。

(7) 称$\Delta(X)=\{(x,x)\mid x\in X\}$为$X\times X$的对角线。

## §3 偏序集与极大元

**1.** 偏序集的几种定义。

以下设$\prec$是$X$上的关系。

**定义 1** $\prec$叫$X$上的偏序，如果

(1) $\prec$是反自反的，(2) $\prec$是传递的。

采用这一定义的著作见[3—6]等。

**定义 2** $\prec$叫$X$上的偏序，如果

(1) $\prec$是自反的，(2) $\prec$是传递的，(3) $\prec$是反对称的。

采用这一定义的著作见[7—13]等。

**定义 3** $\prec$叫$X$上的偏序，如果

(1) $\prec$是自反的，(2) $\prec$是传递的。

采用这一定义的著作见[14—15]等。

**2.** 各种偏序定义的关系。

以上定义 1 与定义 2 从表面上看差别很大，其实由下述两个命题可看出它们在某种意义上讲是一致的。

**命题 1**　设 $\prec$ 是 $X$ 上的第一种偏序。令

$$\prec^{+}=\prec\cup\Delta(X),\tag{A}$$

则　（i）$\prec^{+}$ 是 $X$ 上的第二种偏序。

（ii）如果 $a\neq b$，则 $a\prec b$ 当且仅当 $a\prec^{+}b$。

（iii）为使 $F(\prec)=F(\prec^{+})$，必须且只须 $F(\prec)=X$，且此时 $(X,\prec^{+})$ 无孤立元。

**证**　先证 $\prec^{+}$ 是 $X$ 上的第二种偏序。事实上，(1) 由 $\Delta(X)\subset\prec^{+}$ 知 $\prec^{+}$ 是自反的。(2) 设 $a\prec^{+}b$ 且 $b\prec^{+}c$。如果 $a=b$ 或 $b=c$，则立即得到 $a\prec^{+}c$。所以不妨设 $a\neq b$ 且 $b\neq c$。这时由（$A$）知 $a\prec b$ 且 $b\prec c$。故由 $\prec$ 的传递性得 $a\prec c$。但 $\prec\subset\prec^{+}$，所以 $a\prec^{+}c$。即 $\prec^{+}$ 是传递的。(3) 设 $a\prec^{+}b$ 且 $b\prec^{+}a$。如果 $a\neq b$，则由（$A$）得 $a\prec b$ 且 $b\prec a$，从而由 $\prec$ 的传递性得 $a\prec a$。这与 $\prec$ 的反自反性相矛盾，所以 $a=b$。即 $\prec^{+}$ 是反对称的。综上所述可知 $\prec^{+}$ 是 $X$ 上的第二种偏序。

其次，设 $a\prec b$，则由 $\prec\subset\prec^{+}$ 得 $a\prec^{+}b$。反之，设 $a\prec^{+}b$ 且 $a\neq b$，则由（$A$）得 $a\prec b$。

最后，因为对第二种偏序 $\prec^{+}$ 而言恒有 $F(\prec^{+})=X$，所以为使 $F(\prec)=F(\prec^{+})$ 必须 $F(\prec)=X$。反之，如果 $F(\prec)=X$，则因 $\prec\subset\prec^{+}$，自然有 $F(\prec^{+})=X$，所以 $F(\prec)=F(\prec^{+})$。又 $F(\prec)=X$ 等价于 $(X,\prec)$ 无孤立元，所以 $(X,\prec^{+})$ 也无孤立元。

**命题 2**　设 $\prec$ 是 $X$ 上的第二种偏序。令

$$\prec^{-}=\prec\backslash\Delta(X),\tag{B}$$

则　（i）$\prec^{-}$ 是 $X$ 上的第一种偏序。

（ii）如果 $a\neq b$，则 $a\prec b$ 当且仅当 $a\prec^{-}b$。

（iii）为使 $F(\prec)=F(\prec^{-})$，必须且只须 $(X,\prec)$ 无孤立元。

**证**　先证 $\prec^{-}$ 是 $X$ 上的第一种偏序。事实上，(1) 由 $\prec^{-}\cap\Delta(X)=\varnothing$ 知对每个 $x\in X$，$x\prec^{-}x$ 都不成立。即 $\prec^{-}$ 是反自反的。(2) 设 $a\prec^{-}b$ 且 $b\prec^{-}c$，则由 $\prec^{-}\subset\prec$ 知 $a\prec b$ 且 $b\prec c$。故由 $\prec$ 的传递性得 $a\prec c$。这时必然 $a\neq c$，因为反之则有 $a\prec b$ 且 $b\prec a$，从而由 $\prec$ 的反对称性得 $a=b$。这与 $a\prec^{-}b$ 的假设以及已证得的 $\prec^{-}$ 的反自反性相矛盾。所以 $a\neq c$，那么 $a\prec^{-}c$。即 $\prec^{-}$ 是传递的。因此 $\prec^{-}$ 是 $X$ 上的第一种偏序。

(ii) 与 (iii) 的证明与命题 1 中相应的条款的证明类似，略去。

**注意**　一般说来，按公式（$A$）或（$B$）所联系着的两种偏序的域可能有很大差异。比如，$\prec=\Delta(X)$ 是 $X$ 上的第二种意义下的平凡的偏序。按公式($B$)，它所对应的第一种偏序 $\prec^{-}$ 将是空集。这时 $F(\prec)=X$ 但 $F(\prec^{-})=\varnothing$ 之所以有这种差异是因为第二种偏序 $\prec$ 满足自反律，即对每个 $x\in X$ 总有 $x\in D(\prec)$ 以及 $x\in G(\prec)$，从而对第二种偏序 $\prec$ 恒有 $F(\prec)=X$。而第一种偏序自然不必具有此性质。所以在命题 1 中要求 $F(\prec)=X$ 或在命题 2 中要求 $(X,\prec)$ 无孤立元可以使两种偏序间有更紧密的联系。同时，在命题 1 中要求 $F(\prec)=X$ 在某种意义上讲也并不失一般性。因为对每个第一种偏序 $\prec$ 而言，只要把与 $\prec$ 无

涉的元素不予考虑，也即仅限于在 $F(\prec)$ 上考虑 $\prec$ 同时称 $F(\prec)$ 为 $X$，就自然引出 $F(\prec)=X$ 的假定。同理，在命题2中要求 $(X,\prec)$ 无孤立元相当于不考虑那些仅仅与自身有偏序关系的“平凡元”。所以为使两种偏序有更好的联系，在以上两个命题中加上 $F(\prec)=F(\prec^+)$ 或 $F(\prec)=F(\prec^-)$ 的要求看来是很自然的。

命题1与命题2说明，在某种意义上讲第一种偏序与第二种偏序在本质上并无多大区别，只不过有一个对角线 $\Delta(X)$ 之差而已。但是第三种偏序则显然要比第二种偏序广泛。即，存在 $X$ 上的第三种偏序，它不是 $X$ 上的第二种偏序，同时也不存在像命题1与命题2那种对应关系。

**例**　设 $X=\{a,b\}$，$\prec=X\times X$。则 $\prec$ 是 $X$ 上的第三种偏序，但不是第二种偏序。因为 $\prec$ 不具有反对称性。事实上，$a\prec b$ 且 $b\prec a$ 但 $a\neq b$。

3．极大元的几种定义及其相互关系。

由于偏序关系的定义有所不同，极大元的定义相应地也应有所不同，即，极大元的定义应当与偏序关系的定义配套，否则将会导致错误。

下面给出的极大元的三个定义应当按顺序分别与偏序关系的三个定义相对应。

设 $(X,\prec)$ 是偏序集。

**定义1**　$X$ 中的元 $m$ 叫极大元，如果对每个 $x\in X$，$m\prec x$ 都不成立。

**定义2**　$X$ 中的元 $m$ 叫极大元，如果对每个 $x\in X$，$m\prec x\rightarrow m=x$。

**定义3**　$X$ 中的元 $m$ 叫极大元，如果对每个 $x\in X$，当 $x$ 与 $m$ 可比较时有 $x\prec m$。

容易验证以下事实：

(i) 如果 $m$ 是第一种偏序集 $(X,\prec)$ 中的第一种极大元，$\prec^+$ 如 $(A)$ 所示，则 $m$ 是第二种偏序集 $(X,\prec^+)$ 中的第二种极大元。

(ii) 如果 $m$ 是第二种偏序集 $(X,\prec)$ 中的第二种极大元，且 $m$ 不是孤立元，$\prec^-$ 如 $(B)$ 所述，则 $m$ 是第一种偏序集 $(X,\prec^-)$ 中的第一种极大元。

由以上两条可见，前两种极大元的定义在某种意义上讲也是一致的。但第三种极大元的定义却比第二种要弱。即，凡第二种极大元必然是第三种极大元，且反之不真。事实上，设 $m$ 是第二种极大元，即

$$\forall x\in X,\ m\prec x\rightarrow m=x, \tag{C}$$

今证 $m$ 是第三种极大元。设 $x$ 与 $m$ 可比较，则无非有两种情况：(1) $x\prec m$。(2) $m\prec x$，这时由 $(C)$ 得 $m=x$。所以由 $\prec$ 的自反性得 $x\prec m$。总之，当 $x$ 与 $m$ 可比较时总有 $x\prec m$ 成立，故 $m$ 是第三种极大元。另外，在前面给出的例子中，$a$ 与 $b$ 显然都是第三种极大元，但都不是第二种极大元。比如，$a\prec b$ 但是 $a\neq b$，所以 $a$ 不是第二种极大元。同理 $b$ 也不是第二种极大元。

我们发现并非各著者都注意到了偏序定义与极大元定义的配套问题。比如，在[15]中，Husain, T. 给出的偏序 $\leqslant$ 属于第三种(见第8页)，因为他首先要求 $\leqslant$ 是传递的，随后又声明“A Partial ordering $\leqslant$ on a partially ordered Set $(X,\leqslant)$ is always reflexive, Since $x\leqslant x$ trivially holds”。但在第9页他定义的极大元却属于第二种：“An element x of a partially ordered Set $(X,\leqslant)$ is maximal if there exists no $y\in X$ such that $x<y$”。这里著者所说的 $x<y$ 指 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$。所以这等价于

$$x \leqslant y \longrightarrow x = y.$$

可见他的极大元定义确属第二种。而这样一来，他在随后未加证明所给出的 Zorn 引理将不成立。事实上，只须考虑我们在前面给出的例。在那里每个链都有上界（$a$ 与 $b$ 是每个链的上界），但是如前所述，$X$ 中不存在任何（第二种意义下的）极大元。可见按 Husain, T 的定义 Zorn 引理不成立。

## §4 偏序集与定向集

定向集的定义如下：

**定义** 设$\prec$是$D$上的关系。$D$叫定向关系，如果

(i) $\prec$是自反的，(ii) $\prec$是传递的，

(iii) 设$a$，$b \in X$，则存在$c \in X$使$a \prec c$且$b \prec c$。这时称$(X, \prec)$为定向集。

上述定义也可这样表达：如果$\prec$是$D$上满足条件（iii）的第三种偏序，则称$(D, \prec)$为定向集。但我们发现有不少著者称$D$上满足条件（iii）的第二种偏序为定向关系，如[7][9—13]等。他们要求定向关系具有反对称性。看来这一要求似乎是多余的，至少它对证明拓扑学中的某些命题是不利的。下面我们就来讨论这一问题。

设$D$是定向集。$\mathscr{S}: D \to X$是映射，则称$\mathscr{S}$为$X$中的网，并记作$\mathscr{S} = \{S(n), n \in D\}$。网是序列概念的推广，关于网的 Moore-Smith 收敛理论与滲透的收敛理论有同等的重要性。下述定理是揭示网与滲透关系的一个重要命题：

**定理** 设$X$是拓扑空间，则

(i) 对$X$中的每个网$\mathscr{S}$，存在一个相应的滲透$\mathscr{F}$，满足条件

$$\mathrm{ad}\mathscr{F} = \mathrm{ad}\mathscr{S}, \qquad \lim\mathscr{F} = \lim\mathscr{S}. \tag{D}$$

(ii) 对$X$中的每个滲透$\mathscr{F}$，存在一个相应的网$\mathscr{S}$，满足条件

$$\mathrm{ad}\mathscr{S} = \mathrm{ad}\mathscr{F}, \qquad \lim\mathscr{S} = \lim\mathscr{F}. \tag{E}$$

这里$\mathrm{ad}\mathscr{F}$与$\mathrm{ad}\mathscr{S}$分别表示$\mathscr{F}$与$\mathscr{S}$的触点（adherence Points）之集，$\lim\mathscr{F}$与$\lim\mathscr{S}$分别表示$\mathscr{F}$与$\mathscr{S}$的极限点之集。

本定理的证明见[14]或[8]，我们不在此重复。但我们想扼要地介绍一下证明的轮廓，并从中看出反对称性对证明所起的破坏作用。

先看(i)。设$\mathscr{S} = \{S(n), n \in D\}$是$X$中的网。令

$$\mathscr{F} = \{F \subset X \mid \mathscr{S}\text{最终在}F\text{中}\},$$

则不论定向集$D$上的关系$\prec$是否反对称，都可证明$\mathscr{F}$是$X$中的滲透并且满足条件（D）。即，问题不发生在（i）的证明中。

再看(ii)。设$\mathscr{F}$是$X$中的滲透。令

$$D = \{(x, F) \mid x \in F \in \mathscr{F}\}.$$

在$D$上引入关系$\prec$如下：

$$(x, F) \prec (y, G) \longleftrightarrow G \subset F.$$

则$\prec$是自反的、传递的，并且由$\mathscr{F}$是渗透知$\prec$还满足本节初给出的定向集定义中的条件(iii)。所以$D$成为一定向集。作网$\mathscr{S}: D \to X$如下：

$$\mathscr{S}((x,F)) = x.$$

则可证明$\mathscr{S}$就是满足条件（$E$）的网。这里值得注意的是，$D$上的关系$\prec$一般不具有反对称性。比如，只要某个$F$中含有两个不同的点$x$与$y$，则由$F \subset F$知

$$(x,F) \prec (y,F) \text{ 且 } (y,F) \prec (x,F),$$

但$(x,F) \neq (y,F)$。换句话说，如果在定向关系的定义中添加了反对称性，则上述证明(ii)将无法进行。可见关于定向集的定义还是以采取本节初给出的形式为好。当然，一种常见的证明方法的失效并不意味着没有其它的证明方法使上述定理对狭义的网（即定向关系要求反对称性）仍成立。我们愿借此机会提出这一问题与大家共同商讨。

## 参考文献


[1] Cantor, G., Beiträge Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Math. Ann.* 46(1895), 481-512.

[2] Hausdorff, F., Der Potenzbegriff in der Mengenlehre, *Jahr. Deutsch Math.* Ver., 13(1904), 570.

[3] Jech, T., Set Theory, Academic Press, 1978.

[4] Levy, A., Basic Set Theory, Springer-Verlag, 1979.

[5] Enderton, H. B., Elements of Set Theory, Academic Press, 1977.

[6] Jame & Jame, Mathematic Dictionary, 4th edition, VNR, 1976.

[7] Kuratowski, K. & Mostowski, A., Set Theory, North-Holland Publ. co., 1976.

[8] Engelking, R., General Topology, Warszawa, 1977.

[9] Munkres, J. R., Topology, Prentice-Hall, 1975.

[10] Császár, A., General Topology, Adam Hilger LTD., 1978.

[11] Yosida, K., Functional Analysis 4th edition, Springer-Verlag, 1978.

[12] Grätzer, G., Universal Algebra, 2nd edition, Springer-Verlag, 1979.

[13] Köthe, G., Topologische Lineare Räume 1, Springer-Verlag, 1960.

[14] Gaal, S. A., Point Set Topology, Academic Press, 1964.

[15] Husain, T., Topology and Maps, Plenum Press, 1977.