第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan, 1984

# 中国投递员问题综述*

管梅谷

(山东师范大学)

## §1 引 言

中国投递员问题(Chinese Postman Problem)是1960年我们从生产实际中提出的一个数学问题，它是从下述实际问题中抽象出来的："一个投递员应该怎样选择一条路线，才能既把所有由他负责送的信都送到，而所走的路程又最短."

在我们开始研究中国投递员问题以前，国外有人研究过所谓旅行售货员问题(Traveling Salesman Problem)，即："一个售货员要到$n$个城市去售货，问他应该选择怎样的一条路线，才能既走遍所有城市，并且走的路程又最短." 这是一个著名的难题，当$n$较大时，即使用大型电子计算机，也难以解决.

投递员面临的问题显然可以归结为旅行售货员问题. 事实上，只要把投递员必须送信的每一个地点看成是一个"城市"就行了. 但是一般说来，投递员每次要到约二、三百个地点送信，如果归结为旅行售货员问题来解，将是一个规模很大的问题，是无法解决的·但是，在仔细地分析了投递员面临的问题后，我们发现这个问题具有一定的特点，即需要送信的地点一般是比较密集地排列在街道上的，因此，实际上，可以假设投递员必须走遍整条街道. 这样，我们就提出了一个新的问题，就是："一个投递员应该怎样选择一条路线，才能既走遍由他负责送信的所有街道，而所走的路程又最短."当时我们称这个问题为"最短投递路线问题"，1965年以后，国外称之为"中国投递员问题".

在[1]中，给出了解中国投递员问题的一种算法(也可见[2]、[3]). 注意中国投递员问题与旅行售货员问题的主要区别是：前者要求走遍一些"线"，而后者要求走遍一些"点". 表面上看，这两个问题是相似的，许多实际问题既可以归结为前者，也可以归结为后者(送信问题即是一例). 但是后面将看到，这两个问题在难度上却是有本质的区别的.

从1965年以来，国外有不少人研究了中国投递员问题，包括计算方法的改进，问题的变形与推广，以及在各方面的应用. 并且已经普遍采用"中国投递员问题"这一名称. 不少图论与组合最优化的书籍已将这一内容编入(见[4]，[5]，[6]，[7]，[8]，[9]，[10]). 但是国内对这一问题的研究反而很少，除了1960年发表的[1]外，只有作者最近写的[11]，[12]，[13].

* 1981年11月30日收到.

本文将对中国投递员问题的发展情况作一综合评述，其目的是引起国内有兴趣的同志对此问题进行研究，也希望引起搞实际工作的同志的注意，共同来研究如何将这个问题用到生产实际中去。

## §2 无向图上的中国投递员问题

由于一个投递员必须走的街道一般是连成一片的，因此，上一节提出的问题可以用图论的述语叙述为：

“设 $G$ 是一个连通图，每一条边有正的长度，求一条包含 $G$ 的每条边至少一次，且总长度最短的回路。”

一般，我们称包含 $G$ 的每条边恰好一次的回路为 $G$ 的欧拉回路；而称包含 $G$ 的每条边至少一次的回路为 $G$ 的投递路线。因此，上述问题也就是：找出 $G$ 的一条最短投递路线。

另外，我们要找的投递路线只要求包含 $G$ 的所有边，而不考虑通过各条边时的方向，因此，这个问题可以称为“无向图上的投递员问题”。

[1] 中给出了解无向图上投递员问题的一种算法，其大意如下。

设 $E_1$是图 $G=[V,E]$ 的一个边集，若把 $E_1$ 中的边加入 $G$ 中（作为重复边），得到的图 $G'$ 就没有奇次顶点了，就称 $E_1$ 为一组可行解。总长度最短的可行解叫做最优解。不难看出，可行解一般可以看成是一些把 $G$ 的奇次顶点一对一对地连接起来的链。

由于$G'$ 没有奇次顶点，即 $G'$ 是欧拉图，因此有欧拉回路。不难看出，$G'$ 的欧拉回路一定是 $G$ 的投递路线。因此，要找 $G$ 的最短投递路线，只要先找出一个最优解 $E_1$，然后把 $E_1$ 加在 $G$ 上得 $G'$，最后找出 $G'$ 的一条欧拉回路即可。

[1] 中给出了一种找最优解的办法，它是以下述定理为基础的。

**定理** 一个可行解 $E_1$ 为最优解的充要条件是下述两个条件都成立：

(1) $E_1$ 中没有重复出现的边。

(2) 在 $G$ 的每个圈上，属于 $E_1$ 的边的长度不超过圈长的一半。

利用上述定理可以得出一种求最优解的叠代法，就是：先任意求一个可行解，然后用上述定理检查它是不是最优解，如果不是，就进行调整……，直到得到一个最优解为止。但是这种方法有一个明显的缺点，主要是用定理中的条件(2) 来检查一个可行解是不是最优解时，要检查图 $G$ 的“每一个圈”，而当图 $G$ 较复杂时，$G$ 的圈往往非常多(圈数可能是顶点数的指数函数)，要检查所有的圈，是难以做到的。不过，对于圈不太多的图来说，上述方法还是可用的，特别是，对于当时在邮局中遇到的大多数实际问题，用上述方法一般都能找到最短投递路线。

## §3 Edmonds 提出的求最短投递路线的算法

1965 年，J.Edmonds 在 [14] 中给出了一种求任意图最大权匹配的算法，并指出了这种算法是多项式的。同年，在 [15] 中，Edmonds 又指出了利用 [14] 中的算法可以得出找最短投递路线的一种多项式算法。Edmonds 在 [15] 中第一次用了“中国投递员问题 (Chinese Postman Problem)”这一名称。

Edmonds 的算法的大意是：从给定的图 $G$ 出发，构造一个新图 $\bar{G}$，$\bar{G}$ 的顶点就是 $G$ 的所有奇次顶点，$\bar{G}$ 的任意两个顶点之间都连有一条边（即 $\bar{G}$ 是有偶数个顶点的完全图），连结顶点 $v_i$ 与 $v_j$ 的边的权（长度）等于在 $G$ 中顶点 $v_i$ 与 $v_j$ 间的最短路的长度。然后，在 $\bar{G}$ 中找一个总权最小的完美匹配（只要将[14]中的算法稍加变化即可解决这一问题），再在 $G$ 中将互相匹配的奇次顶点用最短路相连，就能得到上一节讲的最优解（关于这种算法，也可参看[3]）。

Edmonds 的工作的重要性是显然的，因为他证明了中国投递员问题有多项式算法。特别是在 1970 年以后，Cook、Karp（[16][17][18]）等人关于 NP- 完全性的理论出现以后。我们知道旅行售货员问题是 NP- 完全的，而中国投递员问题却是 P- 问题。因此，许多实际问题，如果既可归结为旅行售货员问题，也可归结为中国投递员问题，一般就应尽量归结为中国投递员问题来解，这就使中国投递员问题的应用范围大为扩大。

Edmonds 与 Johnson 在[19]中又提出了一种不必构造图 $\bar{G}$，而在图 $G$ 上直接求最短投递路线的算法。

## §4　有向图上的投递员问题

Edmonds 与 Johnson 在[19]中，以及 Koh 与 Teh 在[20]中提出了有向图上的投递员问题，其提法是：

“设 $G=(V, A)$ 是一个连通有向图，每一条弧有正的长度，要求找一条包含 $G$ 的每一条弧至少一次的回路（即投递路线），且使总长度为最小。”

如果一个城市的街道都是只允许单向行驶的，则投递员就将面临上述问题。

应该注意，对于有向图来说，单单连通不足以保证投递路线是存在的。可以证明，存在投递路线的充要条件是 $G$ 是强连通的。

有趣的是，有向图上的投递员问题解起来并不比无向图上的难。解法的基本思想与无向图的情况是一样的，即在图 $G$ 上增加弧集合 $E_1$ 来得到一个图 $G'$，使得 $G'$ 是有向欧拉图，即每一个顶点的入次与出次都相等的图。于是图 $G'$ 的欧拉回路就是 $G$ 的投递路线。为了求得 $G$ 的最短投递路线，必须使 $E_1$ 中各弧的总长度为最短。与无向图的情况不同的是，为了求总长度最短的 $E_1$，需要解的辅助问题不是匹配问题，而是一个最小费用流问题（详细的解法除了[19]，[20]外，可以参看[7]的第六章）。

## §5　混合图上的投递员问题

在[19]中，Edmonds 与 Johnson 提出了混合图上的投递员问题，就是：

“设 $G=(V, A, E)$ 是一个混合图，其中 $A$ 为有向弧集合，$E$ 为无向边集合，求一条最短的投递路线，经过每条弧与边至少一次，在经过边时方向为任意的，而经过弧时，必须与图中弧的方向一致。”

当一个城市中，有一部分街道为单向行驶的街道时，就会遇到这种问题。

在[19]中（也可参看[7]），给出了当混合图为偶图时的多项式算法。这里所谓“偶图”，指的是与每一顶点关联的边与弧的总数是偶数。

1976年，在[21]中，Papadimitriou证明了一般混合图上的投递员问题是NP-完全的。[21]中还证明了，即使对于平面图，并且边与弧的长度都是0与1，混合图上的投递员问题仍是NP-完全的。在[22]中，E·Minieka指出了混合图上的投递员问题可以归结为有增益的最大流问题。

在[23]中，P·Brücker给出了求混合图上投递员问题近似解的一种方法。据说他曾用这种方法在巴西的一个城市（该城市中有许多街道是单向行驶的）中为邮局设计投递路线。

## §6 乡村投递员问题与一般路线问题

在[24]、[25]中，Orloff提出了投递员问题的一种推广，就是：

"设$G=[V,E]$是一个连通无向图，$H$是$G$的子图。求$G$的一条回路，包含$H$中的所有顶点和边，且使总长度为最小。"

Orloff称上述问题为一般路线问题（General Routing Problem），它的特殊情况包括：

1. $H$由若干个孤立点组成，就是旅行售货员问题。

2. $H$是一个连通子图，就是无向图上的中国投递员问题。

3. $H$由几个连通片组成，这种情况称为乡村投递员问题（Rural Postman Problem），因为乡村投递员一般为几个村庄送信，每一个村庄中的街道为一个连通片。

一般路线问题的提法很广泛，它包含了旅行售货员问题，当然是NP-完全的。即使是乡村投递员问题，也已证明是NP-完全的（见[26]）。Orloff曾指出，他提出并研究这种很广泛问题的理由，主要是看到了"走遍一些边"的问题一般说来比"走遍一些点"的问题容易解。但是，有些实际问题，不可能完全归结为"走遍一些边"的问题，这时，如果能将必须走遍的所有点中，一部分转化为边，所得的问题也比完全归结为"走遍一些点"的问题容易解。例如，一个投递员要到200个地点去送信，其中10个地点是比较孤立的，另外190个地点则密集地排列在一些街道上，这时，虽然不能把问题完全归结为中国投递员问题，而只能把190个地点转化成一些边，从而归结为必须经过10个顶点和一些边的一般路线问题，但这个问题还是要比解200个点的旅行售货员问题容易。

[24]、[25]中提出用来解一般路线问题的方法主要是分枝与定界法。[27][28]对一般路线问题也进行了讨论与研究，[28]中包含了当$H$由两个连通分支组成，且其中之一是一个孤立顶点时的解法。

在[29]中，Orloff还研究了$M$个投递员（或$M$辆车）情况下一般路线问题的解法。

## §7 带风向的投递员问题

在[22]中，Minieka提出了一类问题，也是中国投递员问题的推广，称为带风向的投递员问题（Windy Postman Problem）。提法是：

"设$G=[V,E]$是一个无向图，现将$G$的每一条边$e_i$看成是两条方向互反的弧$a'_i$与$a''_i$，各有长度$l(a'_i)$与$l(a''_i)$，要求一条投递路线，对于任意$i$，经过$a'_i$或$a''_i$中至少一个，且总长度最小。"

当考虑到顺风、逆风的影响，或上、下坡的影响时，就会遇到上述问题。

在［22］中，Minieka 指出了带风向的投递员问题可以归结为混合图上的中国投递员问题。在［12］中，作者指出了，反过来，混合图上的投递员问题也可以归结为带风向的投递员问题，从而证明了带风向的投递员问题也是 NP- 完全的。

在［11］中，作者指出了，当弧长 $l(a_i')$ 与 $l(a_i'')$ 满足下述条件（$\alpha$）时，带风向的投递员问题可以有多项式算法。条件（$\alpha$）是：

“每一个无向圈对应的两个方向相反的有向圈的长度相等。”

上述条件看起来似乎很难检查，因要需要检查图中的每一个圈，但是可以证明（见［12］）：只要检查一个圈基底中的每一个圈就足够了。

另一方面，对于许多涉及到上坡、下坡或顺风、逆风的实际问题，上述条件（$\alpha$）都可以看成是成立的（或近似成立的）。

在实际问题中，也常常遇到一些图，对于它们来说，条件（$\alpha$）只是近似地成立，确切些说，就是：存在一个 $\varepsilon \geqslant 0$，使得对于图中的每一个圈，沿两个方向走的长度之差的绝对值不超过 $\varepsilon$，作者在［12］中给出了一种算法，用来求这类图上带风向的投递员问题的近似最优解。

## §8　中国投递员问题与圈装箱问题

在［13］中，作者提出了一个图论中的最优化问题，即最大权圈装箱问题。

设 $G$ 是一个无向图，$\mathscr{C}=\{c_1, c_2, \cdots, c_t\}$ 为 $G$ 的若干个边不相重的圈的集合，我们称 $\mathscr{C}$ 为一个圈装箱（Cycle Packing），这里装箱（Packing）这个名字来源于超图的理论（见［30］）。所谓最大权圈装箱问题指的是下述问题：设 $G$ 的每条边 $e$ 有非负权 $l(e)$，求一个圈装箱 $\mathscr{C}$，使 $\mathscr{C}$ 中所有圈的长度之和为最大。

有趣的是，上述最大权圈装箱问题与中国投递员问题是等价的（见［13］）。事实上，如果把 $\mathscr{C}$ 看成是一个边集合，则其特征是：每个顶点的次均为偶数。现在先把 $G$ 的每条边都改成重复边，得图 $\bar{G}$，则 $\bar{G}$ 中每个顶点的次均为偶数，易见，从 $\bar{G}$ 中去掉一个圈装箱 $\mathscr{C}$，余下的恰好是 $G$ 的一个欧拉扩图，即为一条 $G$ 的投递路线，反之亦真。因此，从 $\bar{G}$ 中去掉一个最大权圈装箱，余下的是最短投递路线。反之，从 $\bar{G}$ 中去掉一条最短投递路线，余下的是一个最大权圈装箱。

一般说来，与圈装箱有关的问题都是很困难的（见［31］），但是，由上面的结论可知，最大权圈装箱问题却是有多项式算法的。

由于最大权圈装箱问题与中国投递员问题的等价性，可以引出一个与带风向的投递员问题有关的类似的问题，即：设 $G$ 的每条边 $e$ 对应方向互反的两条弧 $a'$ 与 $a''$，$l(a')$ 与 $l(a'')$ 不一定相等，求一组有向圈集合 $\mathscr{C}=\{c_1, c_2, \cdots, c_t\}$，使得对于每一条边 $e$，对应的 $a'$ 与 $a''$ 至多有一个出现在 $\mathscr{C}$ 中，且要求 $\mathscr{C}$ 中的弧的总长度为最大。

不过上述问题并不与带风向的投递员问题等价，上述问题是否有好的解法也不知道。

与上面的问题相似，还可以考虑有向图中的“最大权有向回路装箱”问题，即在一个有向图中，找出一组弧不相重的有向回路，使得属于各回路的权的总和达到最大。这个问题是否有好的算法也还不知道。

## §9 应 用

据国外报道，曾把中国投递员问题（或与其他问题结合）用来解决投递路线问题，扫雪车、洒水车。校车的路线问题以及拉圾收集等各种问题，可参看〔4〕、〔32〕、〔33〕等。

## 参 考 文 献


〔1〕 管梅谷，奇偶点图上作业法，数学学报，Vol. 10 (1960)，263—266.

〔2〕 管梅谷，图上作业法，上海教育出版社，1965年.

〔3〕 管梅谷，极大对集与最短投递路线问题，曲阜师院学报，自然科学版，1978年第1、2、3期.

〔4〕 Mandl, C., Applied Network Optimization, Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1979.

〔5〕 Liebling, T., Graphen Theorie in planungs-und Touren problemen, Lecture Note in Operations Research, Vol.21, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

〔6〕 Christofides, N., Graph Theory—An Algorithmic Approach, Academic Press, New York, 1975.

〔7〕 Minieka, E., Optimization Algorithms for Networks and Graphs, Marcel Dekker, New York, 1978.

〔8〕 Bondy,G., Murty, U.S.R., Graph Theory With Applications, Macmillan Press L.T.O., 1976.

〔9〕 Lawler, E., Combinatorial Optimization, Networks and Matroids, Holt Rinehart and Winston, 1976.

〔10〕 Chachra, V., Ghare, P.M., Moore, J.M., Applications of Graph Theory Algorithms, Elsevier North Holland, Inc. New York, 1979.

〔11〕 管梅谷，关于一类带风向的投递员问题，山东师大学报，自然科学版，1981年第二期，5—9.

〔12〕 管梅谷，关于带风向的投递员问题，将发表.

〔13〕 管梅谷，利用二次伪布尔规划解平面投递员问题，将发表.

〔14〕 Edmonds,J., Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 69B(1965), 125—130.

〔15〕 Edmonds, J., The Chinese Postman Problem, *Operations Research* Vol. 13, Supplement I(1965),B73.

〔16〕 Cook, S., The complexity of theorem-proving procedure, Conference Record of Third ACM Symposium on Theory of Computing (1970), 151-158.

〔17〕 Karp, R., Reducibility among combinatorial problems, in "Complexity of Computer Computation" Plenum Press, New York,1972.

〔18〕 Aho, A., Hopcroft, J., Ullman, J., The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley Publishing Company, 1975.

〔19〕 Edmonds, J., Johnson, E., Matching, Euler tours and the Chinese Postman, Mathematical Programming, Vol. 5(1973), 88—124.

〔20〕 Koh, K.M., Teh, H.H., On directed postman problem, *Nanyang University Journal*, Vol.8, 9 (1974/75),14—26.

〔21〕 Papadimitriou, C., On the complexity of edge traversing, *Journal of ACM*, Vol. 23 (1976), 544—554.

〔22〕 Minieka, E., The Chinese postman problem for mixed networks. *Management Science*, Vol. 25 (1979), 643—648.

〔23〕 Brücker, P., Approximation method for postman problem, Operational Research'81, Abstracts, p. A90, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1981.

〔24〕 Orloff, C., A fundamental problem in vehicle routing, *Networks*, Vol. 4(1974), 35—64.

〔25〕 Orloff, C., On general routing problem: comments, *Networks*, Vol.6(1976), 281—284.

〔26〕 Garey,M., Johnson,D., Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.

〔27〕 Lenstra,J., Rinnooy Kan, A.H.G., on general routing problem, *Networks*, Vol.6(1976), 273—280.

〔28〕 Maie,J., Liebman,J., Orloff, C., An improvement of Orloff's general routing problem, *Networks*, Vol. 7(1977),89—92.

〔29〕 Orloff, C., Routing a fleet of M vehicles to/from a central facility, *Networks*, Vol.4(1974), 147—162.

〔30〕 Berge, C., Packing problems and hypergraph theory: a survey, in "Discrete optimization" I p. 3—37, Annals of Discrete Mathematics 4, North Holland Publishing House, 1980.

〔31〕 Lovász, L., Graph theory and integer programming, in "Discrete Optimization" I, p.141—158, Annals of Discrete Mathematics 4, North Holland Publishing House, 1980.

〔32〕 Beltrami, E., Bodin, L., Networks and vehicle routing for municipal waste collection, *Networks*, Vol. 4 (1974), 65—94.

〔33〕 Stricker, R., Public sector vehicle routing: the Chinese Postman Problem, Doctoral thesis at M. I. T. (1970)


# A Survey on the Chinese Postman Problem


*Guan Mei-gu*

(Shandong Normal University)


## Abstract


This paper gives a brief survey on the Chinese Postman Problem, it contains:

1. Introduction,
2. Chinese Postman Problem on undirected graphs,
3. Edmonds' algorithm for solving the Chinese Postman Problm,
4. Chinese Postman Problem on directed graphs,
5. Chinese Postman Problem on mixed graphs,
6. Rural Postman Problem and the General Routing Problem,
7. Windy Postman Problem,
8. Chinese Postman Problem and cycle packing problem,
9. Applications.