第4卷 第1期 1984年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.1 Jan. 1984

关于连贯与错排计数问题的评注*

初文昌

（大连工学院数学系）

近两年来，连贯与错排的计数问题引起了国内某些学者的兴趣，并对之进行了一系列研究。张忠辅、蔡茂诚、林诒勋在[5]中给出了错排问题的一个计数公式；钟集[6]，陈义、刘明华[7]分别利用递归方法研究了这类问题的计数。但均未能得到简洁而实用的计数公式。

事实上，从上世纪末到本世纪四十年代，这类问题的概率分布曾引起各国数学家的广泛注意，许多学者对此进行了广泛的研究。关于这方面的资料可见 A. M. Mood 写于1940年的综述论文[1]。在那篇文章中，Mood 本人实质上已彻底解决了这一问题。

沿用已有的记号，设 $F(m_1, m_2, \cdots, m_k; n)$ 表示 m_1 个 a_1，m_2 个 a_2，…，m_k 个 a_k 所构成的连贯数为 n 的排列个数，$f(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 表示 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_k 个 a_k 所构成的错排数（关于连贯与错排的概念可见[1—7]），则在 Mood 的1940年的综述论文[1]中，(4.3)式即为

$$\sum_{\substack{1\leqslant r_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant k)}}\prod_{i=1}^{k}\binom{n_i-1}{r_i-1}f(r_1,r_2,\cdots,r_k)=\binom{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k}\tag{1}$$

反演上式便得到 $f(n_1,n_2,\cdots,n_4)$ 的计数公式为

$$f(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\sum_{\substack{1\leqslant r_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant k)}}\prod_{i=1}^{k}(-1)^{n_i-r_i}\binom{n_i-1}{r_i-1}\binom{r_1+r_2+\cdots+r_k}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k}\tag{2}$$

对[1]中的(4.2)，两端关于 r_1，r_2，…，r_k 在域 R

$$\sum_{i=1}^{k}r_i=n,\ 1\leqslant r_i\leqslant m_i,\ (1\leqslant i\leqslant k)$$

上进行卷积求和，则可得

$$F(m_1,m_2,\cdots,m_k;n)=\sum_{R}\prod_{i=1}^{k}\binom{m_i-1}{r_i-1}f(r_1,r_2,\cdots,r_k)\tag{3}$$

*1983年8月6日收到。

将(2)代人上式并交换求和次序，通过简单的运算便得$F(m_1, m_2, \cdots, m_k; n)$的简洁的计数公式.

$$F(m_1,m_2,\cdots,m_k;n)=\sum_{\substack{1\le r_i\le m_i\\(1\le i\le k)}}(-1)^n\prod_{i=1}^{k}(-1)^{r_i}\binom{m_i-1}{r_i-1}$$

$$\times\binom{\sum_{i=1}^{k}(m_i-r_i)}{n-\sum_{i=1}^{k}r_i}\binom{r_1+r_2+\cdots+r_k}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k} \tag{4}$$

由此，这类计数问题便得到彻底解决. 应当指出，[5—7]中的结果均不如上述计算简便.

二十年以后，这一问题又被重新提起，M. T. L. Bizley[3]在1963年利用同样方法给出了错排的计数公式(2)；A. W. Joseph和M. T. L. Bizley[4]于1960年给出了与(2)类似的另一类错排计数式（详见文[3]的(7)和(8)两式).

鉴于上述事实，重新提出并研究连贯与错排的计数公式显然并无必要. 特此评注.

参考文献

[1] *Mood, A. M.*, The distribution theory of runs, *Annals of Math. Stat.*, 11, (1940), 367—392.

[2] *David, F. N. & Barton, D. E.*, Combinatorial Chance, Charles Griffin & Company Limited, London, 1962. ch. 6, 8.

[3] *Bizley, M. T. L.*, A problem in permutations, *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963) 722—730.

[4] *Joseph A. W. & Bizley, M. T. L.*, The two-pack matchinq pnoblem, *J. Roy. Stat. Soc.* (B), 22 (1960), 114.

[5] 张忠辅、蔡茂诚、林诒勋，关于连贯的计数问题，应用数学学报，3 (1982), 285-290.

[6] 钟集，有给定连贯数的序列的计数问题，华南师范大学学报，2 (1982), 1-8.

[7] 陈义、刘明华，连贯计数的递归公式及其推论，《湖南数学年刊》1、2 (1982).