第4卷 第2期
1984年4月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.2
April 1984

环模及其张量积的广义对偶性*

佟文廷

（南京大学）

§1 引言与记号

如众周知，环模及其张量积的对偶性乃是线性空间及其张量积的对偶性之推广，研究对偶性乃是模论及多重线性代数中的重要课题之一。本文的主要目的是将经典的对偶性进行推广。显然可以看出，本文的结果都是相应的经典结果的改进与推广。

为方便起见，本文使用如下记号：

$R\in\mathscr{R}_1$ 指R为酉环，$K\in C\mathscr{R}_1$ 指K为可换酉环，$R\in{}_k\mathscr{A}_1$指R为有单位元的K-代数，$M\in{}_R\mathscr{M}$指M为左R-模，$M'\in\mathscr{M}_S$指M'为右S-模，$P\in{}_R\mathscr{M}_S$指P为左R-,右S-双模，$\Phi\in\mathrm{Hom}_R(M_1,M_2)$指$\Phi$为从左（右）$R$-模$M_1$到左（右）$R$-模的模同态，$M_1<M_2$指$M_1$为$M_2$的子模。对其他记号，将在文中第一次出现时说明其含义。本文中的模均指酉模，对环的张量积均指K-环的张量积，模的张量积均指文[1]中定义的张量积。模M的零元素将记为O_M，在不至于发生混淆时则记为O。

§2 环模的广义对偶性

定义 1 设$R,S\in\mathscr{R}_1,M\in{}_R\mathscr{M},M'\in\mathscr{M}_S,P\in{}_R\mathscr{M}_S$，$\varphi:M\times M'\to P$满足

$$\varphi(r_1X_1+r_2X_2,X_1's_1+X_2's_2)=\sum_{i,j=1}^{2}r_i\varphi(X_i,X_j')s_j,$$

$$\forall r_i\in R,s_j\in S,X_i\in M,X_j'\in M'.$$

则称φ为M与M'上的R-S映射（或双线性映射），记为$\varphi\in L(M,M';P)$。

再记

$$N_\varphi(M)=\{X\,|\,\varphi(X,M')=O_P\},$$
$$N_\varphi(M')=\{X'\,|\,\varphi(M,X')=O_P\}.$$

当$N_\varphi(M)=O_M$，$N_\varphi(M')=O_{M'}$时称φ为非退化的（或称φ为M与M'上的纯量积），而此时称M,M'为对偶模，记为$(M,M'\in)\mathscr{D}_{\varphi,P}$。

取$R=S=P$，即得[2]中定义的对偶模概念，自然地，本文的定义更概括了经典的对偶性。

*1983年6月15日收到。

定义 2　设 $R,S\in\mathscr{R}_1,M\in{}_R\mathscr{M},M'\in\mathscr{M}_S,(M,M')\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$.定义

$$fs:(fs)(X)=f(X)s,\forall f\in \mathrm{Hom}_R(M,P)\equiv M^{\Delta*},X\in M.$$

使 $M^{\Delta*}\in\mathscr{M}_S$。仿此记 $M^{\Delta*\Delta*}\equiv\mathrm{Hom}_S(M^{\Delta*},P)$，则 $M^{\Delta*\Delta*}\in{}_R\mathscr{M}$。对 $f\in M^{\Delta*},X\in M$ 记 $f(X)=X^{**}(f)$ 得 $X^{**}\in\mathrm{Hom}_S(M^{\Delta*},P)\equiv M^{\Delta*\Delta*}$.取 $\sigma(X)=X^{**},\forall X\in M$，得 $\sigma\in\mathrm{Hom}_R(M,M^{\Delta*\Delta*})$。当 σ 为单射时称 M 为半自反模，记为 $M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$。当 σ 为满单射时，称 M 为自反模，记为 $M\in\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$。

命题 1　设 $R,S\in\mathscr{R}_1,M\in{}_R\mathscr{M},M'\in\mathscr{M}_S,(M,M')\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$，则 $M'\lneqq M^{\Delta*}$(即 M' 同构于 $M^{\Delta*}$ 的一个子模)。

证　对 $X'\in M'$ 记 $\varphi(X,X')=f_{X'}(X),\forall X\in M$。则 $f_{X'}\in M^{\Delta*}$。取 $\Phi\in\mathrm{Hom}_S(M',M^{\Delta*})$ 使 $\Phi(X')=f_{X'}$。若 $f_{X'}=0$，则

$$O_P=f_{X'}(X)=\varphi(X,X'),\forall X\in M.$$

由 φ 之非退化知 $X'=0$，于是 Φ 为单同态，即 $M'\lneqq M^{\Delta*}$.

命题 2　设 $R,S\in\mathscr{R}_1,M\in{}_R\mathscr{M},P\in{}_R\mathscr{M}_S$,则存在 $M'\in\mathscr{M}_S$ 与 $\varphi\in L(M,M';P)$ 使 $(M,M')\in\mathscr{D}_{\varphi,P}\Leftrightarrow M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$.

证 $\Rightarrow$:由 φ 非退化知对任一个 $O_M\neq X\in M$ 必有 $X'\in M'$ 使 $\varphi(X,X')\neq O_P$。因此，存在 $f_{X'}\in M^{\Delta*}$ 使 $f_{X'}(X)=\varphi(X,X')\neq O_P$。由此知，必有 $X^{**}\in M^{\Delta*\Delta*}$ 使 $X^{**}(f_{X'})=f_{X'}(X)\neq O_P$。于是 $X^{**}\neq 0$。故由定义知 $M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$.

$\Leftarrow$:若 $M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$，取 $M'=M^{\Delta*},\varphi(X,f)=f(X)$，$\forall f\in M'$。则 $\varphi\in L(M,M';P)$。如果 $f(M)=O_P$，当然 $f=O_{M'}$，于是 $N_\varphi(M')=O_{M'}$。如果 $\varphi(X,f)=f(X)=O_P,\forall f\in M'$，但 $X\neq O_M$，则由 $M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$ 知 $X^{**}\neq 0$，而 $X^{**}(f)=f(X)\neq O_P$ 这与 $f(X)=O_P$ 矛盾。于是命题证毕。

定义 3　设 $R,S\in\mathscr{R}_1,M\in{}_R\mathscr{M},M'\in\mathscr{M}_S$，$P\in{}_R\mathscr{M}_S,M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$。$M'<M^{\Delta*}$ 且对一切 $O_M\neq X\in M$ 都有 $f\in M'$ 使 $f(X)\neq O_P$。则 M' 称为 $M^{\Delta*}$ 的全子模。记为 $M'\underset{t}{<}M^{\Delta*}$.

命题 3　设 $R,S\in\mathscr{R}_1,M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M},M'\in\mathscr{M}_S,P\in{}_R\mathscr{M}_S$,则存在 φ 使 $(M,M')\in\mathscr{D}_{\varphi,P}\Leftrightarrow$ 存在 $M_1^{\Delta}\underset{t}{<}M^{\Delta*}$ 使 $M'\cong M_1^{\Delta}$，即 $M'\lneqq_t M^{\Delta*}$.

证 $\Rightarrow$:由 $(M,M')\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$ 用命题 1 知 $M'\lneqq M^{\Delta*}$。于是由 φ 非退化知对一切 $O_M\neq X\in M$ 有 $X'\in M'$ 使 $f_{X'}(X)=\varphi(X,X')\neq O_P$。因此 $M'\underset{t}{<}M^{\Delta*}$.

$\Leftarrow$:不失一般可设 $M'\underset{t}{<}M^{\Delta*}$.由取 $f(X)=\varphi(X,f),\forall X\in M,f\in M'$.得 $\varphi\in L(M,M';P)$。若 $\varphi(X,f)=f(X)=O_P.\forall X\in M$,则 $f=O_{M'}$。若 $\varphi(X,f)=f(X)=O_P,\forall f\in M'$，由 $M'\underset{t}{<}M^{\Delta*}$ 知 $X=O_M$，因此 φ 非退化。故 $(M,M')\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$.

定理 1 若 $R,S\in\mathscr{R}_1,M\in{}_R\mathscr{M}.P\in{}_R\mathscr{M}_S$，则下述各点是等价的：

① $M\in s.\mathrm{ref}.{}_R\mathscr{M}$;

② 存在 φ 使 $(M,M^{\Delta*})\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$;

③ 对一切 $O_M\neq X\in M$ 有 $f\in M^{\Delta*}$ 使 $f(X)\neq O_P$;

④ 存在 M_1^{Δ} 使 $M_1^{\Delta}\underset{t}{<}M^{\Delta*}$;

⑤ 存在 $M'\in\mathscr{M}_S$ 与 $\varphi\in L(M,M';P)$ 使 $(M,M')\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$;

又当 P 为自由双模（即 P 有对于双模的基）时，上述各点又都等价于

⑥ $M \cong_t M^{\Delta_R\Delta_{S^0}}$，其中$S^0$为$S$的反环。

证 由命题 2 已知①⟺⑤，我们只需再证下述各点：

①⟺③：注意定义 2 中的$\sigma: M \to M^{\Delta_R\Delta_S}$为单同态$\Leftrightarrow \forall O_M \neq X \in M, \sigma(X) = X^{**} \neq O_{M^{\Delta_R\Delta_S}} \Leftrightarrow \forall O_M \neq X \in M$有$f \in M^{\Delta_R}$使$f(X) = X^{**}(f) \neq O_P$，即得①⟺③。

又显然可以看出

$$\begin{array}{c} ③ \Leftrightarrow M^{\Delta_R} \underset{t}{<} M^{\Delta_R} \Leftrightarrow ④ \\ \Updownarrow \text{（命 题 3）} \\ ② \end{array}$$

这就证出定理中前五点的等价性。

再注意$P \in {}_R\mathscr{M}_S$可看成$P \in {}_{S^0}\mathscr{M}_{R^0}$，$M \in {}_R\mathscr{M}$可看成$M \in \mathscr{M}_{R^0}$，$M^{\Delta_R} \in \mathscr{M}_S$可看成$M^{\Delta_R} \in {}_{S^0}\mathscr{M}$，因此，若$\{P_i\}$为$P$之基，$\varphi(X,Y) = \sum r_i P_i S_i \in P, X \in M, Y \in M^{\Delta_R}$，则取$\varphi_1(Y,X) = \sum S_i P_i r_i$即知$(M^{\Delta_R}, M) \in \mathscr{D}_{\varphi_1,P}$等价于②，于是由命题 3 知此时②⟺⑥。定理证毕.

§3　环模张量积的广义对偶性

设$K \in C\mathscr{R}_1, R, S \in {}_K\mathscr{A}_1, M \in {}_R\mathscr{M}, N \in {}_S\mathscr{M}$，周伯壎教授在[1]中给出了$M \otimes N \in {}_{R\otimes S}\mathscr{M}$的定义。这个定义可分别推广到双模与右模的张量积（注意$\mathscr{M}_S = {}_{S^0}\mathscr{M}$，${}_R\mathscr{M}_S = {}_{R\otimes S^0}\mathscr{M}$）。现在我们将§2 中环模的广义对偶性向环模张量积上开拓，从而得出环模张量积的广义对偶性的一些基本结果。自然，它们都是经典结果（包括[2]）的改进与推广。先证明

命题 4　设$K \in C\mathscr{R}_1$，$R_j, S_j \in {}_K\mathscr{A}_1$，$M_j \in {}_{R_j}\mathscr{M}$，$N_j \in \mathscr{M}_{S_j}$，$P_j \in {}_{R_j}\mathscr{M}_{S_j}$，$\varphi_j \in L(M_j, N_j; P_j), j = 1, 2$，则存在唯一的$\chi \in L(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2; P_1 \otimes P_2)$使得

(1)　　$\chi(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2) = \varphi_1(X_1, Y_1) \otimes \varphi_2(X_2, Y_2), \forall X_j \in M_j, Y_j \in N_j, j = 1, 2,$

我们将记成$\chi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$。

证 注意$M_1 \otimes M_2$由$\{X_1 \otimes X_2 \mid \forall X_j \in M_j, j = 1, 2\}$ $R_1 \otimes R_2$一生成，$N_1 \otimes N_2$由$\{Y_1 \otimes Y_2 \mid \forall Y_j \in N_j, j = 1, 2\}$，$S_1 \otimes S_2$，一生成，因此$\chi$若存在则必唯一。下面只需证明$\chi$的存在性。

事实上，$N_j \in {}_{S_j^0}\mathscr{M}$，$P_j \in {}_{R_j \otimes S_j^0}\mathscr{M}$（如此见[3]，P.16）。因此由左模张量积的泛性质（见[1]）知有$f_j \in \mathrm{Hom}_{R_j \otimes S_j^0}(M_j \otimes N_j, P_j)$使下图可换：

$$\begin{tikzcd} M_j \times N_j \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "\otimes"'] & P_j \\ M_j \otimes N_j \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

即$f_j \otimes = \varphi_j, j = 1, 2$。

由[1]，§4 知必有唯一的

$$f_1 \otimes f_2 \in \mathrm{Hom}_{(R_1 \otimes S_1^0) \otimes (R_2 \otimes S_2^0)}((M_1 \otimes N_1) \otimes (M_2 \otimes N_2), P_1 \otimes P_2)$$

使下图可换：

$$\begin{array}{ccc} (M_1\otimes N_1)\times(M_2\otimes N_2) & \xrightarrow{f_1\times f_2} & P_1\times P_2 \\ \big\downarrow\otimes & & \big\downarrow\otimes \\ (M_1\otimes N_1)\otimes(M_2\otimes N_2) & \xrightarrow{f_1\otimes f_2} & P_1\otimes P_2 \end{array}.$$

注意（由[1]知）作为K环的张量积必有K-环同构σ使

$$(R_1\otimes S_1^0)\otimes(R_2\otimes S_2^0)\xrightarrow[\cong]{\sigma}(R_1\otimes R_2)\otimes(S_1^0\otimes S_2^0),$$

于是由[1]知必有σ同构η使$\eta((X_1\otimes X_2)\otimes(Y_1\otimes Y_2))=(X_1\otimes Y_1)\otimes(X_2\otimes Y_2)$. $\forall X_j\in M_j$, $Y_j\in N_j$, $j=1,2$。且

$$(M_1\otimes M_2)\otimes(N_1\otimes N_2)\xrightarrow[\cong]{\sigma}(M_1\otimes N_1)\otimes(M_2\otimes N_2).$$

由此知，必有χ:$(M_1\otimes M_2)\times(N_1\otimes N_2)\longrightarrow P_1\otimes P_2$使下图可换：

$$\begin{array}{ccc} (M_1\otimes N_1)\otimes(M_2\otimes N_2) & \xrightarrow{f_1\otimes f_2} & P_1\otimes P_2 \\ \big\uparrow\eta & & \big\uparrow\chi \\ (M_1\otimes M_2)\otimes(N_1\otimes N_2) & \xleftarrow[\otimes]{} & (M_1\otimes M_2)\times(N_1\otimes N_2) \end{array}$$

即$\chi(u,v)=(f_1\otimes f_2)\eta(u\otimes v)$, $\forall u\in M_1\otimes M_2$, $v\in N_1\otimes N_2$。因此，有$\chi\in L(M_1\otimes M_2,N_1\otimes N_2;P_1\otimes P_2)$使(1)成立。

推论 1 若$R=S=K\in C\mathscr{R}_1$, $M_j,N_j\in{}_K\mathscr{M}$, $\varphi_j\in L(M_j,N_j;K)$, $j=1,2$, 则

$$(\varphi_1\otimes\varphi_2)(X_1\otimes X_2,Y_1\otimes Y_2)=\varphi_1(X_1,Y_1)\varphi_2(X_2,Y_2),\ \forall X_j\in M_j,\ Y_j\in N_j,\ j=1,2.$$

证 注意$K\in C\mathscr{R}_1$, 由[1], §2 知$K\otimes K=K$, $ab=a\otimes b$, $\forall a,b\in K$. 因此推论成立。

下面我们将左R-模与右S-模的张量积均理解为左R-模与左S^0-模的张量积、双模的张量积亦按[3](P.16)理解为左模的张量积。

定理 2 设$K\in\mathscr{D}$(即K为整环)。$R_j,S_j\in{}_K\mathscr{A}_1$，均为自由的，$M_j\in{}_{R_j}\mathscr{M}$, $N_j\in\mathscr{M}_{S_j}$, 且$P_j\in{}_{R_j}M_{S_j}$为自由的，$\varphi_j\in L(M_j,N_j;P_j)$, $j=1,2$。则

(2) $$N_{\varphi_1\otimes\varphi_2}(M_1\otimes M_2)=N_{\varphi_1}(M_1)\otimes M_2+M_1\otimes N_{\varphi_2}(M_2).$$

(3) $$N_{\varphi_1\otimes\varphi_2}(N_1\otimes N_2)=N_{\varphi_1}(N_1)\otimes N_2+N_1\otimes N_{\varphi_2}(N_2).$$

证 由(1)式立知(2)右⊆(2)左，(3)右⊆(3)左。现证它们的反向包含关系。任取$X_1\otimes X_2\in$(2)左，则

(4) $(\varphi_1\otimes\varphi_2)(X_1\otimes X_2,Y_1\otimes Y_2)=\varphi_1(X_1,Y_1)\otimes\varphi_2(X_2,Y_2)=O_{P_1\otimes P_2}$. $\forall Y_1\otimes Y_2\in N_1\otimes N_2$.

若$\forall Y_2\in N_2$使$\varphi_2(X_2,Y_2)=O_{P_2}$，则$X_2\in N_{\varphi_2}(M_2)$。于是

$$X_1\otimes X_2\in M_1\otimes N_{\varphi_2}(M_2)\subseteq(2)_{右}.$$

若有$Y_2'\in N_2$使$\varphi_2(X_2,Y_2')\neq O_{P_2}$。由(4)知

$$\varphi_1(X_1,Y_1)\otimes\varphi_2(X_2,Y_2')=O_{P_1\otimes P_2},$$

于是由[1], §3，推论 1 知$\varphi_1(X_1,Y_1)=0$，$\forall Y_1\in N_1$即$X_1\in N_{\varphi_1}(M_1)$，因此

$$X_1\otimes X_2\in N_{\varphi_1}(M_1)\otimes M_2\subseteq(2)_{右}$$

总上知(2)成立，同理知(3)成立。

推论 2　设$K\in C\mathscr{R}_1$，$R_j,S_j\in {}_K\mathscr{A}_1$，$M_j\in {}_{R_j}\mathscr{M}$，$N_j\in \mathscr{M}_{S_j}$，$P_j\in {}_{R_j}\mathscr{M}_{S_j}$，$\varphi_j\in L(M_j,N_j;P_j)$，$j=1,2$，则(2)右$\subseteq$(2)左，(3)右$\subseteq$(3)左。因此，若$K\in\mathscr{D}$，$M_j$，$N_j$均为自由的，$R_j,S_j$也是自由的，$j=1,2$，则

1〉　$\varphi_1\otimes\varphi_2$非退化$\Rightarrow\varphi_1,\varphi_2$均非退化；

2〉　$(M_1\otimes M_2,N_1\otimes N_2)\in\mathscr{D}_{\varphi_1\otimes\varphi_2,P_1\otimes P_2}\Rightarrow(M_j,N_j)\in\mathscr{D}_{\varphi_j,P_j}$，$j=1,2$。

证　由(1)得(2)右$\subseteq$(2)左，(3)右$\subseteq$(3)左。由[1]，§3，推论1得1〉，2〉。

为了研究在什么条件下，推论2中的“$\Rightarrow$”可改为“$\Leftrightarrow$”，先引进胡述安[4]关于zh^R-平坦与忠实zh^R-平坦的定义，它们分别为经典的平坦及忠实平坦概念的推广。

定义 4　[4]设$K\in C\mathscr{R}_1,R,S\in {}_K\mathscr{A}_1,B\in {}_S\mathscr{M}$，若对${}_R\mathscr{M}$中任一正合列$0\to A'\xrightarrow{\sigma} A\xrightarrow{\pi} A''\to 0$必有${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的正合列$0\to A'\otimes B\xrightarrow{\sigma\otimes 1} A\otimes B\xrightarrow{\pi\otimes 1} A''\otimes B\to 0$，则称$B$为$Zh^R$-平坦模，如果$B$又满足“$M\otimes B=0,M\in {}_R\mathscr{M}\Rightarrow M=0$”，则$B$又称为忠实$Zh^R$-平坦模。

我们先来证明如下命题：

命题 5　设$K\in C\mathscr{R}_1,R,S\in {}_K\mathscr{A}_1,M_1<M\in {}_R\mathscr{M},N_1<N\in {}_S\mathscr{M}$. $M\otimes N_1=0,M_1\otimes N=0$，且下述条件：

①　$R,S\in$PID（即R,S为主理想整环）M,N均为自由模；

②　N为忠实Zh^R-平坦模，M为忠实Zh^S-平坦模；

③　N为Zh^R-平坦模，M为Zh^S-平坦模且对R的任何真理想$L,R/L\otimes N\neq 0$，对S的任何真理想J，$M\otimes S/J\neq 0$。

④　R为可换Noether局部环，M,N均为有限生成模。

中至少有一个成立时，则，$M_1=0$，$N_1=0$。

证　注意PID上自由模之子模仍为自由的，自由模的张量积仍为自由的([1]，定理2)，则由①可得$M_1=0,N_1=0$。

由$R\otimes S\cong S\otimes R$知$M\otimes N_1$与$N_1\otimes M$为$\sigma$同构的，于是由定义4知，由②可得$M_1=0$，$N_1=0$。

由[4]命题6.1知②$\Leftrightarrow$③。因此由③亦得$M_1=0,N_1=0$。

由于Noether环上有限生成模之子模仍为有限生成的，则由[5]，P.31知④$\Rightarrow M_1=0$，$N_1=0$。定理证毕。

从定理2与命题5，可得

定理 3　设$K\in\mathscr{D},R_j,S_j\in {}_K\mathscr{A}_1$为自由的，$M_j\in {}_{R_j}\mathscr{M},N_j\in\mathscr{M}_{S_j}$，且$P_j\in {}_{R_j}\mathscr{M}_{S_j}$为自由的，$\varphi_j\in L(M_j,N_j;P_j)$。$j=1,2$，则

1〉　φ_1,φ_2均非退化$\Rightarrow\varphi_1\otimes\varphi_2$非退化；

2〉　$(M_j,N_j)\in\mathscr{D}_{\varphi_j,P_j},j=1,2\Rightarrow(M_1\otimes M_2,N_1\otimes N_2)\in\mathscr{D}_{\varphi_1\otimes\varphi_2,P_1\otimes P_2}$。

3〉　若下述条件

①　$R_j,S_j\in$PID$,M_j,N_j$均为自由的。$j=1,2$。

②　M_i为忠实Zh^{R_j}-平坦模，N_i为忠实Zh^{S_j}-平坦模，$i\neq j$，$i,j=1,2$。

③　M_i为Zh^{R_j}-平坦模，N_i为Zh^{S_j}-平坦模，且对R_j的任意真理想$L_j,j=1,2$. $R_1/L_1\otimes M_2\neq 0$，对S_i的任意真理想$J_j,j=1,2,S_1/J_1\otimes N_2\neq 0,N_1\otimes S_2/J_2\neq 0$。

④　R_j, S_j 均为可换 Noether 局部环，M_j, N_j 均为有限生成模 $j=1,2$。
中至少有一个成立，则1〉,2〉中的"⇒"均可改为"⇔"。

证　由定理2之(2),(3)知"$N_{\varphi_1}(M_1)=0, N_{\varphi_2}(M_2)=0 \Rightarrow N_{\varphi_1\otimes\varphi_2}(M_1\otimes M_2)=0$"且"$N_{\varphi_1}(N_1)=0, N_{\varphi_2}(N_2)=0 \Rightarrow N_{\varphi_1\otimes\varphi_2}(N_1\otimes N_2)=0$"，于是1〉,2〉成立。

由定理2之(2),(3)知"$N_{\varphi_1\otimes\varphi_2}(M_1\otimes M_2)=0 \Rightarrow N_{\varphi_1}(M_1)\otimes M_2=0, M_1\otimes N_{\varphi_2}(M_2)=0$"且"$N_{\varphi_1\otimes\varphi_2}(N_1\otimes N_2)=0 \Rightarrow N_{\varphi_1}(N_1)\otimes N_2=0, N_1\otimes N_{\varphi_2}(N_2)=0$"。于是由命题5即得3〉。定理证毕。

参考文献

[1] 周伯壎，左环模的张量积与范畴，南京大学学报(自然科学版)，1(1979)，1—20.

[2] 刘迎胜，左模的张量积及其线性映射，数学研究与评论，2(1981)，21—38.

[3] Rotman, J. J., An Introduction to Homological Algebra, Academic Press. New York, 1979.

[4] 胡述安；左模张量积函子，I．数学研究与评论，1(1983)，21—28.

[5] Atiyah, M. F., MacDonald, I. G., Introduction to Commutative Algebra, Addison-wesley, Reading, Mass., 1969.

Generalized duality of ring modules and their tensor products

Tong Wenting

Abstract

Let R, S be rings, M, N be left R-and right S-modules respectively, P be a left R- right S- bimodule. A bilinear mapping φ of $M\times N$ into P is said to be nondegenerate if $N_\varphi(M)\equiv\{X\,|\,\varphi(X,N)=O_P,\ X\in M\}=0$ and $N_\varphi(N)\equiv\{Y\,|\,\varphi(M,Y)=O_P,\ Y\in N\}=0$. In this case, M and N is called dual and denoted $(M,N)\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$. If $N=M^*\equiv\mathrm{Hom}_R\ (M,R)$, $P=R$, $S=R$, then $(M,N)\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$ is the classical dual, i.e. $(M,N)\in\mathscr{D}_{\varphi,R}$, hence the duality of this paper is a generalization of the classical duality.

In §2 of this paper we gave some sufficient and necessary conditions for $(M,N)\in\mathscr{D}_{\varphi,P}$.

In §3 of this paper we gave some sufficient and necessary conditions for that $(M_j,N_j)\in\mathscr{D}_{\varphi_j,P_j}, j=1,2 \Leftrightarrow (M_1\otimes M_2, N_1\otimes N_2)\in\mathscr{D}_{\varphi_1\otimes\varphi_2,P_1\otimes P_2}$.

The results of this paper are a generalization of the classical results.