第4卷 第2期
1984年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.2
April 1984

# 正规算子和亚正规算子的一些特征*

杜鸿科

（陕西师大数学系）

## 一 引 言

本文的算子是指可分复希氏空间$H$上的线性有界算子，$B(H)$表示$H$上所有有界线性算子代数．若$T\in B(H)$，使$T^*T=TT^*$或$T^*T\geqslant TT^*$成立时，则$T$分别称为正规算子或亚正规算子，其中$T^*$表示$T$的共轭算子．复数集合$W(T)=\{(Tx, x);\ x\in H,\ \|x\|=1\}$称为算子$T$的数值域，$\mathrm{cl}(W(T))$表示$W(T)$的闭包．算子$T$的谱记为$\sigma(T)$，则熟知$\sigma(T)\subset\mathrm{cl}(W(T))$［1．P111］，若$r_\sigma(T)$和$r_w(T)$分别表示算子$T$谱半径和数值域半径，则一般有$\|T\|\geqslant r_w(T)\geqslant r_\sigma(T)$［1．P114］．当$\|T\|=r_w(T)$时，算子$T$称为可正规化的．

我们在本文中利用严绍宗在［2］中引入的极・积算子给出了正规算子和亚正规算子的一些特征，得出了：$T\in B(H)$是正规算子的必充条件是存在一$\lambda\notin\mathrm{cl}(W(T))$，使$U_\lambda=(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$是亚正规的；$T\in B(H)$是亚正规算子的必充条件是存在一$\lambda\notin\mathrm{cl}(W(T))$，使$U_\lambda=(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$是可正规化的．所得结果推广了［2］中的有关结果．

## 二 结果和证明

**引理1** (Singh, U. N., Mangla, K.)［3］算子$T\in B(H)$，若有$H$上可逆算子$S$，其中$0\notin\mathrm{cl}(W(S))$，使$T^*=S^{-1}T^{-1}S$，则$T$相似于一酉算子．

**引理2** 算子$T\in B(H)$是亚正规的必充条件是存在一$\lambda\in\rho(T)$，使$\|U_\lambda\|=1$．

这里，$U_\lambda=(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$，$\rho(T)$表示$T$的预解集．

**证明** 这一结论隐含于［2］中定理3的推论(1)和例1中，直接证明也是很简单的，故略去证明．

应说明的一点是，若$T$是亚正规算子，则对任意$\lambda\in\rho(T)$都有$\|U_\lambda\|=1$．

**定理1** 算子$T\in B(H)$，则$T$是正规算子的必充条件是存在一$\lambda\notin\mathrm{cl}(W(T))$，使$U_\lambda=(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$是亚正规的．

**证明** 首先我们看到，由于$\sigma(T)\subset\mathrm{cl}(W(T))$，从而$\lambda\in\rho(T)$，所以$(T-\lambda)^{*-1}$存在，$U_\lambda=(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$是有意义的．

必要性 从$T$的正规性，易知$U_\lambda$是一酉算子，自然$U_\lambda$也是一亚正规算子．

*1981年9月4日收到．

充分性 记 $T_1 = T - \lambda$，注意到 $\lambda \notin \mathrm{cl}(W(T))$ 时，$0 \notin \mathrm{cl}(W(T_1))$，由此立即得出 $0 \notin \mathrm{cl}(W(T-\lambda)^{*-1})) = \mathrm{cl}(W(T_1^{*-1}))$，但

$$U_\lambda^* = T_1^* T_1^{-1} T_1^* T_1^{*-1} = T_1^* U_\lambda^{-1} T_1^{*-1},$$

根据引理1，$U_\lambda$ 相似于一酉算子，所以 $\sigma(U_\lambda)$ 包含于复平面的单位园周上．由假设 $U_\lambda$ 是亚正规的，于是由[4]立即得出 $U_\lambda$ 是一正规算子，进而 $U_\lambda$ 还是一酉算子，所以

$$1 = U_\lambda U_\lambda^* = T_1^{*-1} T_1 T_1^* T_1^{-1}.$$

由此得

$$T_1^* T_1 = T_1 T_1^*,$$

$T_1$ 是正规算子，从而 $T$ 也是正规算子，证完．

在定理1中，实际上对任一 $\lambda \notin \mathrm{cl}(W(T))$，当 $T$ 是正规的时，$U_\lambda$ 都是亚正规的，但由定理1的证明过程中，我们还有更进一步的结果．

**推论1** 算子 $T \in B(H)$，对任一 $\lambda \notin \mathrm{cl}(W(T))$，则 $T$ 是正规算子的必充条件是 $U = (T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$ 是酉算子．

**推论2** 算子 $T \in B(H)$，对任一 $\lambda \notin \mathrm{cl}(W(T))$，则 $T$ 是正规算子的必充条件是 $U_\lambda = (T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$ 是正规算子．

推论2与[2]中定理3(2)："如果存在常数 $\alpha$，使 $\mathrm{Im}T \geqslant \alpha > 0$，则 $T$ 为正规算子的充要条件是 $U = T^{*-1}T$ 是正规的．" 在下列意义下是等价的；当 $\mathrm{Im}\,T \geqslant \alpha > 0$ 时显然 $0 \notin \mathrm{cl}(W(T))$；而当 $0 \notin \mathrm{cl}(W(T))$ 时，必有 $\theta \in [0, 2\pi)$ 存在使 $\mathrm{Im}e^{i\theta}T \geqslant \alpha > 0$．但推论2在表达形式上显然要比[2]中定理3(2)方便一些，而定理1易见是[2]中定理3(2)的推广．

在上列定理中，由下列简单例子可以看出 $\lambda \notin \mathrm{cl}(W(T))$ 一条是不能去掉的．取

$$T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

这里 $T$ 显然不是正规算子，但

$$U_0 = T^* T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$

是自共轭的，当然是亚正规的．这里 $0 \in \mathrm{cl}(W(T))$．

定理1中 $U_\lambda = (T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$ 可换以它的共轭算子 $U_\lambda^* = (T-\lambda)^*(T-\lambda)^{-1}$，这就是

**推论3** 算子 $T \in B(H)$，则 $T$ 是正规算子的必充条件是存在一 $\lambda \notin \mathrm{cl}(W(T))$，使 $U_\lambda^* = (T-\lambda)^*(T-\lambda)^{-1}$ 是亚正规的．

**证明** 完全仿定理1证明．

在定理1中即使把 $U_\lambda = (T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$，换以 $U_\lambda^{(0)} = (T-\lambda)(T-\lambda)^{*-1}$ 定理的结论也成立．仅需在证明中注意到 $T$ 为正规算子的必充条件是 $(T-\lambda)^{*-1}$ 是正规算子．

类似于定理1，我们来考查亚正规算子的下列特征．

**定理2** 算子 $T \in B(H)$，则 $T$ 是亚正规算子的必充条件是存在一 $\lambda \notin \mathrm{cl}(W(T))$，使 $U_\lambda = (T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$ 是可正规化的 (normaliod) 算子．

**证明**　必要性　若$T$是亚正规算子，则对任一$\lambda\notin cl(W(T))$，$T-\lambda$是亚正规算子，且由引理2知$\|U_\lambda\|=\|(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)\|=1$。类似于定理1的证明，我们知道$U_\lambda$相似于一酉算子，从而$\sigma(U_\lambda)$包含在复平面的单位园周上，$r_\sigma(U_\lambda)=1$。但一般地有$\|U_\lambda\|\geqq r_w(U_\lambda)\geqq r_\sigma(U)$，所以$\|U_\lambda\|=r_w(U_\lambda)$，由定义$U_\lambda$是可正规化的。

充分性　也仿定理1的证明得$\sigma(U_\lambda)$在复平面的单位园周上，此即$r_\sigma(U_\lambda)=1$。又已知$U_\lambda$是可正规化的，根据[1．问题173]，$\|U_\lambda\|=r_w(U_\lambda)=1$。于是由引理2知$T$是亚正规的，证完。

根据定理2，不难得出下列推论。

**推论4**　算子$T\in B(H)$，则$T$是正规算子的必充条件是存在$\lambda_1$，$\lambda_2\notin cl(W(T))$，使$U_{\lambda_1}=(T-\lambda_1)^{*-1}(T-\lambda_1)$ 和 $U_{\lambda_2}^{(0)}=(T-\lambda_2)^{-1}(T-\lambda_2)^*$都是可正规化的算子。

## 参　考　文　献


[1] Halmos, P. R., A Hilbert Space Problem Book, Von Nostrand, Princeton, N. J. (1967).

[2] 严绍宗，关于极·积算子$A^{*-1}A$，数学年刊，Vol. 1, No. 3, 4 (1980), 485—500.

[3] Singh, U. N, and Mangla. K., Operators with inveres similar to their adjoints, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38(1973), 258—260.

[4] Stampfli, J. G., Hyponormal Operators and spectral density, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117 (1965), 469—476.


# Some Characterizations of Normal and Hyponormal Operators


*Du Hongke*

(Shanxi Normal University)


## Abstract


In this paper it is proved that if $T$ is a bounded linear operator on a Hilbert space H and $\lambda\notin cl(W(T))$, where $cl(W(T))$ is the closure of $W(T)=\{(Tx,x);\ x\in H,\ \|x\|=1\}$, then $T$ is normal iff $U_\lambda=(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$ is hyponormal and $T$ is hyponormal iff $U_\lambda=(T-\lambda)^{*-1}(T-\lambda)$ is normaliod.