悖论与数学基础问题(补充二)

徐利治　朱梧槚　袁相碗　郑毓信

如文(Ⅰ)所述,"抛球问题"是由西方数理哲学家作为Zeno悖论的引伸而提出来的(见本刊1982年第三期)。很明显,如果把时间连续统的数学模型取成标准实数集R的话,则该问题将无从产生,也就谈不上有何悖论,原因是抛球运动对时点$t=1$并无定义。

另一方面,如果把时间连续统的数学模型取成为非标准实数连续统$^*R$,则时点t的变域将包括半开区间$[0,1)$内一切非标准的与标准的实数点。于是"时间t到达1"的含义可解释为"时点t按其标准部份(standard part)取到标准实数1"。这就是说,"时点t最终将进入实数点1的左半单子(monad)"。文章(Ⅰ)中考虑的时点序列正是进入1的单子左侧的点列:

$$t_{\nu_j}<1,\ t_{\mu_j}<1,\ \mathrm{st}(t_{\nu_j})=\mathrm{st}(t_{\mu_j})=1.$$

既然,对每一标准自然数n,$t_n=\mathrm{st}(t_n)<1$,所以上述进入单子的点列的足标ν_j,μ_j必须取为非标准自然数(非标准的奇数及偶数),也即$\nu_j\in\mathbb{N}$,$\mu_j\in\mathbb{N}$。这就说明可以利用模型$^*R$和$\mathbb{N}$来解释抛球问题的悖论属性。在我们文章(Ⅰ)中曾提到时间$t=1$是有"内部结构"的,显然这句话只有相对于模型$^*R$来说才有意义,意思是指"1的单子"是有内部结构的(实际上R上的关系$t=1$对应于$^*R$上的$\mathrm{st}(t)=1$)。

综上所论,可知抛球问题及其悖论性质之是否存在,完全取决于"时点集"的数学模型是否取成$^*R$。这样,西方数理哲学家提出的问题,便可通过关于"时间流"的模型假设而获得澄清。

至于反映物质世界时间流结构的数学模型R与$^*R$两者中,究竟是哪一个更较切近客观真实的问题,那是属于物理科学中的哲学问题,显然不是数学分析本身所能解答的。但值得指出的是,当"时点集"取为$^*R$后,由于$^*R$上的$\mathrm{st}(t)=0$对应于R上的标准时点$t=0$,故所谓"飞矢有不行不止之时"等说法,也可得到相对解释:时点与飞矢的"不行"是把无限分割的极限点局限在R上来考察的,而在$^*R$的时点单子中运动仍然存在。精细解释读者当能自行补出。